Le problème du scrutin

Dans une élection, on a le choix entre deux candidats. p électeurs votent pour le candidat A, q votent pour le candidat B. On suppose $q > p$. Le vainqueur de l'élection sera donc B. On cherche la probabilité pour que B soit en tête durant tout le dépouillement.

1. On représente graphiquement le dépouillement de la manière suivante : dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on part de l'origine O . Si le premier bulletin est pour le candidat A, on trace un segment entre O et $O + \vec{u}$. Sinon, on trace un segment entre O et $O + \vec{v}$. Puis on recommence, représentant donc le dépouillement par une ligne polygonale (on dira désormais : un chemin) joignant O au point de coordonnées (p, q) et composée de p segments horizontaux « vers la droite » et de q segments verticaux « vers le haut ».
 - (a) Combien y-a-t-il de tels chemins? *Question équivalente : combien de dépouillements compatibles avec les données de départ?*

On peut représenter un chemin par une suite de $p + q$ lettres, dont p sont la lettre H et q sont la lettre V (la k -ième lettre est H si le k -ième segment est horizontal, V si le k -ième segment est vertical). On établit ainsi une bijection entre l'ensemble des chemins possibles et l'ensemble $\mathcal{A}$ des $p + q$ -uplets de lettres dont p sont des H et q sont des V . A un tel $p + q$ -uplet $(L_1, \dots, L_{p+q})$ où, pour tout i , $L_i \in \{V, H\}$, associons

$$\{k \in \llbracket 1, p + q \rrbracket ; L_k = H\}$$

On définit ainsi une bijection entre $\mathcal{A}$ et l'ensemble des parties à p éléments de $\llbracket 1, p + q \rrbracket$. Le cardinal cherché est donc $\binom{p+q}{p}$ ou encore $\binom{p+q}{q}$.

Bien évidemment, pour ce décompte, l'aspect « chemins » n'est pas très approprié. Il est plus simple de dire qu'on représente un dépouillement par une suite de $p + q$ lettres, dont p sont la lettre A et q sont la lettre B . Puis on continue comme ci-dessus.

-
- (b) Si un chemin commence par un segment horizontal, il correspond à un dépouillement durant lequel B n'est pas toujours en tête. Combien y-a-t-il de tels chemins?

L'ensemble des chemins commençant par un segment horizontal est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{A}'$ des éléments de $\mathcal{A}$ (notations de la question précédente) dont le premier terme est H . En associant à un élément

$(L_1, \dots, L_{p+q})$ de $\mathcal{A}'$ l'ensemble

$$\{k \in \llbracket 2, p+q \rrbracket ; L_k = H\}$$

on définit une bijection de $\mathcal{A}'$ dans l'ensemble des parties à $p-1$ éléments de $\llbracket 2, p+q \rrbracket$. Le cardinal cherché est donc

$$\binom{p+q-1}{p-1} \quad \text{ou} \quad \binom{p+q-1}{q}$$

- (c) On considère un chemin (C) qui commence par un segment vertical et qui rencontre la bissectrice (autrement dit, le premier bulletin est pour B, mais à un moment du dépouillement il y a égalité, B n'est donc pas toujours en tête). Soit M le premier point où (C) rencontre la bissectrice. On associe à (C) le chemin (C') qui coïncide avec (C) à partir de M , et qui est symétrique de (C) par rapport à la bissectrice jusqu'à M . Faire un dessin. Montrer que l'on définit ainsi une bijection entre l'ensemble des chemins qui commencent par un segment vertical et rencontrent la bissectrice et un autre ensemble de chemins à définir.
-

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des chemins commençant par un segment horizontal. Soit $\mathcal{B}'$ l'ensemble des chemins commençant par un segment vertical et ayant une intersection non vide avec la bissectrice.

L'énoncé définit une application ϕ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

Soit (C) un chemin de $\mathcal{B}$; il rencontre nécessairement la bissectrice; notons M son premier point d'intersection avec la bissectrice. On lui associe le chemin $\psi((C))$ qui coïncide avec (C) à partir de M , et qui est symétrique de (C) par rapport à la bissectrice jusqu'à M . On définit ainsi une application ψ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, dont il est facile de voir qu'elle est réciproque de ϕ . On a donc bien défini une bijection de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{B}$.

- (d) En déduire le nombre total de chemins qui rencontrent la bissectrice, puis la probabilité pour que B reste en tête durant tout le dépouillement.
-

Le nombre total de chemins qui rencontrent la bissectrice, c'est

$$|\mathcal{B}| + |\mathcal{B}'|$$

c'est-à-dire $2|\mathcal{B}|$, c'est-à-dire $2\binom{p+q-1}{q}$. La probabilité cherchée est donc a , avec

$$a = 1 - \frac{2\binom{p+q-1}{q}}{\binom{p+q}{p}} = 1 - 2\frac{p}{p+q} = \frac{q-p}{q+p}$$

2. Calculer (élémentairement) la probabilité pour que, si $p = 1$, B soit toujours en tête durant le dépouillement.

L'événement E : « B est toujours en tête » est l'événement « les deux premiers bulletins tirés sont pour B ». Par formule des probabilités composées,

$$P(E) = \frac{q}{q+1} \frac{q-1}{q}$$

(on note F_k l'événement « le k -ième bulletin dépouillé est pour B », on a $P(E) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) P_{F_1}(F_2)$). On trouve bien $(q-1)/(q+1)$.

3. Même question pour $p = 2$.

Si un des deux premiers bulletins dépouillés est pour A, B ne sera pas toujours en tête. Si les deux premiers bulletins dépouillés sont pour B, deux cas sont à envisager :

Cas 1 : Le troisième bulletin dépouillé est aussi pour B. Alors B sera toujours en tête.

Cas 2 : Le troisième bulletin dépouillé est pour A. Alors B sera toujours en tête si et seulement si le quatrième bulletin est pour B.

Reprenant les notations précédentes, on aura (encore les probabilités composées)

$$\begin{aligned} P(E) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap F_4) \\ &= \frac{q}{q+2} \times \frac{q-1}{q+1} \times \left(\frac{q-2}{q} + \frac{2}{q} \times \frac{q-2}{q-1} \right) \\ &= \frac{(q-1)(q-2)}{(q+1)(q+2)} + \frac{2(q-2)}{(q+1)(q+2)} \\ &= \frac{q-2}{q+2} \end{aligned}$$

-
4. En utilisant le même type de considération géométrique que dans la question 1., calculer la probabilité (dans le cas général $q > p$) pour que A ne soit jamais en tête pendant le dépouillement. *On autorise donc ici les égalités, contrairement au cas précédent.*

On commence (virtuellement, car le code électoral n'approuve pas ce genre de manoeuvre) par mettre un bulletin pour B dans l'urne... ou encore (version géométrique) on décale les chemins d'une unité vers le haut. On cherche donc à dénombrer les chemins qui mènent du point $(0, 1)$ au point $(p, q+1)$ sans toucher la bissectrice. Le nombre total de chemins menant de $(0, 1)$ à $(p, q+1)$ est le même que le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (p, q) . Le nombre de chemins qui mènent de $(0, 1)$ à $(p, q+1)$ sans toucher la bissectrice est égal au nombre de chemins qui mènent de $(0, 0)$ à $(p, q+1)$ sans toucher la bissectrice

(il n'y a qu'à rajouter ou enlever le segment $[(0,0), (0,1)]$ pour passer des uns aux autres. On a calculé ce nombre. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\binom{p+q+1}{q+1} - 2\binom{p+q}{q+1}}{\binom{p+q}{p}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{q-p+1}{q+1}$$