Oral 1. Notons $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme ∞. Pour $f \in \mathcal{C}$ on note $Af(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t$ si $x \in [0,1[$ et $Af(1) = 0$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ soit convergente. La démontrer.
2. Justifier que pout tout $f \in \mathcal{C}$, Af est correctement définie.
3. Justifier que pout tout $f \in \mathcal{C}$, $Af \in \mathcal{C}$.
4. Montrer que A est un endomorphisme continu de $\mathcal{C}$, calculer sa norme subordonnée.
5. Etudier la dérivabilité de Af pour une fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^1.

---

1. A faire avec autorité.
2. OK.
3. Changement de variable $t = x + (1-x)u$ pour unfier la définition et se ramener à un segment d'intégration fixe : $[0,1]$.
4. Une majoration directe donne la continuité, et le fait que la norme subordonnée est ≤ 2, atteinte pour $f = 1$ par exemple.
5. Le théorème de classe C^1 donne la classe C^1 de f sur $[0,1[$.

Oral 2. Soit $n \in \mathbf{N}_*$. On pose $S_\alpha = \left\{M \in S_n^+(\mathbf{R}),\ \det(M) \geq \alpha\right\}$. Montrer que, si $A \in S_n^+(\mathbf{R})$,

$$\inf_{M \in S_\alpha} \operatorname{tr}(AM) = n\left(\alpha \det(A)\right)^{1/n}$$

Recette habituelle : on introduit une racine carrée $A^{1/2}$ de A, dans S_n^+, l'existence est facile par le théorème spectrale, et pour l'unicité, on n'en a pas besoin (mais c'est bien de savoir la montrer). On est ramené à montrer

$$\inf_{M \in S_\alpha} \operatorname{tr}(A^{1/2} M A^{1/2}) = n\left(\alpha \det(A)\right)^{1/n}$$

Montrons d'abord que le second membre est un minorant ; pour cela, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^{1/2} M A^{1/2}$, qui sont positives, et on note que

$$\alpha \det(A) \leq \det(A^{1/2} M A^{1/2}) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$$

et on se ramène à la classique inégalité (convexité) entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique.
Minorant atteint lorsque déjà il y a égalité dans l'inégalité précédente, on va imposer

$$A^{1/2} M A^{1/2} = k I_n$$

(pour que les λ_k soient égaux. On écarte le cas où A non inversible, simple, et sinon on veut

$$M = k A^{-1}$$

Mais il faut rester dans S_α, on prend donc

$$k = \left(\alpha \det(A)\right)^{1/n}$$

et on conclut.

Oral 3. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0, la suite définie par $a_{n+1} = 2^n - a_n$ est-elle croissante ?

On a $a_{n+2} = 2^{n+1} - 2^n + a_n = 2^n + a_n$, donc les suites (a_{2p}) et (a_{2p+1}) sont croissantes. On calcule, si $b_p = a_{2p}$,

$$b_p = 2^{2(p-1)} + \cdots + 1 + a_0 = \frac{4^p - 1}{3} + a_0$$

et, si $c_p = a_{2p+1}$,

$$c_p = 2^{2p-1} + \cdots + 2 + a_1 = 2\frac{4^p - 1}{3} + a_1$$

La suite est donc croissante si et seulement si, pour tout naturel p,

$$a_0 + \frac{4^p - 1}{3} \leq 2\frac{4^p - 1}{3} + 1 - a_0$$

ce qui équivaut à, pour tout naturel p,

$$2a_0 \leq \frac{4^p - 1}{3} + 1$$

ce qui se résume à $a_0 \leq 1/2$

Oral 4. Trouver les matrices $M \in M_2(\mathbf{R})$ telles que

$$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Classiquement, si M est solution, M commute avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ et donc laisse stables ses sous-espaces propres (il vaut mieux ici parler des endomorphismes associés), ce qui montre qu'elle est triangulaire supérieure. La résolution se fait alors banalement.

Oral 5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires discrètes, et $(X_n)_n$, $(Y_n)_n$ des suites de variables aléatoires discrètes. On note $(*)$ la condition suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad (\star)$$

1. Soit x, y réels et $\epsilon > 0$. Justifiez l'implication :

$$|x + y| \geq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ou} \quad |y| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

2. On suppose la condition $(\star)$ satisfaite. Etablir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to]{} 0$$

3. Application : soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0, 1]$ et $V_n = U_n + U_{n+1}$, pour tout n entier naturel. Etablir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i - 2p \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

4. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Etablir

$$\mathbf{P}(|X| > M) \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$$

5. On suppose la condition $(\star)$ satisfaite. Montrer

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X_n Y_n - (XY)| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

---

1. Inégalité triangulaire et contraposition.
2. On a, par ce qui précède,

$$|X_n - X + (Y_n - Y)| \geq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |X_n - X| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ou} \quad |Y_n - Y| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ce qui est la traduction fonctionnelle de l'implication, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|X_n(\omega) - X(\omega) + (Y_n(\omega) - Y(\omega))| \geq \epsilon \quad \Longrightarrow \dots$$

mais qui surtout s'exprime en inclusion d'évènements :

$$(|X_n - X + (Y_n - Y)| \geq \epsilon) \quad \subset \quad \left(|X_n - X| \leq \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \left(|Y_n - Y| \leq \frac{\epsilon}{2}\right)$$

et donc (probabilité d'une réunion, croissance de la probabilité) :

$$\mathbf{P}\left(|X_n - X + (Y_n - Y)| \geq \epsilon\right) \quad \leq \quad \mathbf{P}\left(|X_n - X| \leq \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \leq \frac{\epsilon}{2}\right)$$

La conclusion en découle.

3. Le cours (loi faible des grands nombres, dont les hypothèses qu'il faudra rappeler sont évidemment vérifiées ici) dit que

$$\forall\epsilon > 0 \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i - p \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Mais pour les mêmes raisons,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_{i+1} - p \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il suffit alors d'utiliser la question précédente.

4. Par continuité décroissante,

$$\mathbf{P}(|X| > n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(|X| > n)\right) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$$

et on conclut, car $\mathbf{P}(|X| > M) \leq \mathbf{P}(|X| > \lfloor M \rfloor)$ pour tout réel $M > 0$.

5. On commence par, classiquement,

$$|X_nY_n - XY| \leq |X|\ |Y_n - Y| + |Y_n|\ |X_n - X|$$

et donc

$$(|X_nY_n - XY| \geq \epsilon) \subset (|X|\ |Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}) \cup (|Y_n|\ |X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2})$$

On va donc commencer par montrer que $\mathbf{P}(|X|\ |Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Si $M > 0$,

$$(|X|\ |Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}) \subset (|X| > M) \cup \Big((|X| \leq M) \cap (|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2M})\Big)$$

et donc

$$\mathbf{P}(|X|\ |Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}) \leq \mathbf{P}(|X| > M) + \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2M}\right)$$

Soit $\alpha > 0$, on fixe M tel que $\mathbf{P}(|X| > M) \leq \alpha/2$, etc. . .on connaît ce genre de découpage.
Il reste à montrer que $\mathbf{P}(|Y_n|\ |X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. . .ce qu'on n'aura sûrement pas le temps de faire pendant un véritable oral ! Du fait que

$$\mathbf{P}(|Y_n| > M) \leq \mathbf{P}(|Y| > M - 1) + \mathbf{P}(|Y_n - Y| > 1)$$

on fixe $\alpha > 0$, on considère M tel que $\mathbf{P}(|X| > M - 1) \leq \alpha/3$, etc. . .

Oral 6. Pour $n \in \mathbf{N}_*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}(\ln n)^2$.

1. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent simple de v_n.
2. Etudier la suite de terme général v_n (variations, convergence).
3. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$ où γ est un réel appelé constante d'Euler. Après avoir justifié que la série converge, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)$.

---

1. On peut signaler que la suite (u_n) diverge. On regarde la décroissance de $x \mapsto \ln x/x$, ce qui conduit à encadrer $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$ par deux intégrales qui sont équivalentes toutes les deux à $\dfrac{(\ln n)^2}{2}$.
2. On calcule $v_{n+1} - v_n$. Ou plutôt on en fait un développement asymptotique pour parvenir à l'équivalent
$$v_{n+1} - v_n \sim \frac{-\ln n}{2n^2}$$
On en déduit que (v_n) décroît au moins à partir d'un certain rang, et converge par lien suites/séries télescopiques.
3. On en déduit l'existence d'un α tel que
$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \alpha + \mathrm{o}(1)$$
Après avoir remarqué que la série converge (séries alternées), on découpe
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \\ &= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}\end{aligned}$$
On écrit $\ln(2p) = \ln 2 + \ln p$ et on utilise les développements trouvé et rappelé, on arrive au résultat.

Oral 7. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$, $n \in \mathbf{N}_*$, $(x_i)_{i\in\mathbf{N}_n} \in [a,b]^{\mathbf{N}_n}$ et $(y_i)_{i\in\mathbf{N}_n} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}_n}$. On note $E = C([a,b],\mathbf{R})$ supposé muni de la norme de la convergence uniforme et P l'ensemble des applications polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que l'adhérence de l'ensemble

$$\{p \in P \ ; \ \forall i \in \mathbf{N}_n,\ p(x_i) = y_i\}$$

est $\{f \in E \ ; \ \forall i \in \mathbf{N}_n,\ f(x_i) = y_i\}$.

Que l'adhérence de ...soit incluse dans ...est simple. Soir réciproquement une fonction $f \in E$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout i. Considérons une suite (ϕ_s) d'éléments de P qui converge uniformément vers f (théorème de Weiestrass). Soit $(L_0,\ldots,L_n)$ la famille des polynômes de Lagrange tels que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Posant

$$\psi_s = \phi_s + \sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - \phi_s(x_k))L_k$$

on obtient une suite (ψ_s) d'éléments de l'ensemble ...qui converge vers f.

Oral 8. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ se prolonge en une application C^∞ sur $\mathbf{R}$.
2. On suppose de plus que $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe une application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que $g^2 = f$

---

1. On écrit $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$. Changement de variable $t = xu$, théorème de dérivation sous le signe $\int$ avec domination sur tout segment, un classique mais qui demande un peu de temps pour être expliqué clairement, or la deuxième question n'est pas trop facile...
2. Considération préalable : $f'(0) = 0$ car f atteint un minimum en 0. Et de $f''(0) \neq 0$ on déduit que $f''(0) > 0$. On écrit alors Taylor avec reste intégral :
$$f(x) = f''(0)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\mathrm{d}t$$
On fait le changement de variable $t = xu$ dans l'intégrale. On met en facteur $f''(0)\dfrac{x^2}{2}$. On est ramené au fait que si u est C^∞, $\sqrt{1+u}$ est C^∞ au voisinage de 0, seule chose qui nous importe car $\sqrt{f}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Oral 9. On considère une fonction f continue sur $\mathbf{R}^+$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

1. Etudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout compact de la suite de fonctions définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_n(x) = f(nx)$.
2. Etudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout compact de la suite de fonctions définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_n(x) = f(x/n)$.

---

1. Convergence simple vers 0, uniforme sur tout $[a, +\infty[$, mais pas uniforme sur tout compact sauf si f est nulle car sur $[0, a]$, $a > 0$, à partir d'un certain rang $|f_n|$ atteindra $\|f\|_\infty$.
2. Convergence uniforme sur tout segment vers 0, pas sur $\mathbf{R}^+$ entier.

Oral 10. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}_*^+$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Montrer que $\sum f(k)$ converge et donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Chercher une fonction qui vérifie cette condtion amène rapidement à voir qu'on a quelque chose qui va très vite vers 0 (en décroissant). La première question peut donc se résoudre en affaiblissant pas mal l'hypothèse. Si $x \geq M$, $f'(x) \leq -f(x)$, donc $x \mapsto e^x f(x)$ décroît sur $[M,+\infty[$. On a donc, si $x \geq M$,

$$0 \leq f(x) \leq \alpha e^{-x}$$

où α est une constante, et cela résout le problème de la convergene de la série. La convergence étant très rapide, on peut conjecturer que l'équivalent cherché est $f(n)$. Si $A > 0$, soit M tel que si $x \geq M$, $f'(x) \leq -Af(x)$. La fonction $x \mapsto e^{Ax} f(x)$ décroît sur $[M,+\infty[$. Autrement dit, si $M \leq j \leq k$,

$$e^{kA} f(k) \leq e^{jA} f(j)$$

d'où l'on tire, si $n \geq M$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq e^{(n+1)A} f(n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kA} = f(n+1) \times \frac{1}{1-e^{-A}}$$

Mais également $f(n+1) \leq e^{-A} f(n)$. Notons que si $\epsilon > 0$ on peut trouver $A > 0$ tel que

$$\frac{e^{-A}}{1-e^{-A}} \leq \epsilon$$

et on en tire que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = \mathrm{o}\left(f(n)\right)$$

ce qui conclut.

Oral 11. Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On munit $L(E)$ de la norme N subordonnée. On note G un sous-groupe de $GL(E)$ vérifiant $N(g - \mathrm{Id}) < 1$ pour tout $a \in G$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbf{U}$ pour tout $g \in G$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$ pour tout $g \in G$.

---

1. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$, si x est un vecteur propre associé, on a

$$\|g(x) - x\| < \|x\|$$

Donc $|\lambda - 1| < 1$. Plus précisément, notant $\alpha = N(g - \mathrm{Id})$, $|\lambda - 1| \leq \alpha$. Donc $1 - \alpha \leq |\lambda| \leq 1 + \alpha$.
Or si $g \in G$, $g^k \in G$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, et λ^k est valeur propre de g^k donc vérifie l'inégalité précédente. Donc $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| > 1$ sont impossibles.

2. Faire un dessin ! Et écrire

$$|e^{it} - 1| \leq 1$$

sous la forme $|\sin(t/2)| \leq 1/2$. On dessine la zone où doivent rester les valeurs propres (argument entre $-\pi/3$ et $\pi/3$) et on voit que si λ est dans cette zone, et distinct de 1, à partir d'un certain rang λ^k n'y sera plus, contradiction.

Oral 12. Soit E, F des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, E)$ tels que $uvu = u$ et $vuv = v$. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$.
2. Soit $u \in L(E, F)$, E_1 un supplémentaire de Ker$u$ dans E, F_1 un supplémentaire de Im(u) dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in L(F, E)$ tel que Ker $v = F_1$, Im $v = E_1$, $uvu = u$ et $vuv = v$.

---

1. On peut (facultatif) commencer par montrer que la somme est directe : si $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(v)$, on écrit $x = v(y)$ et on a $uv(y) = 0_F$. Alors $vuv(y) = 0_E$. Donc $x = 0_E$.
   Maintenant, la somme est E entier : soit $x \in E$, supposons
   $$x = y + v(z)$$
   où $u(y) = 0_F$. Alors $u(x) = uv(z)$. Donc $v(z) = vu(x)$. On retrouve le fait que la somme est directe, car si elle existe la décomposition est
   $$x = (x - vu(x)) + vu(x)$$
   dont on vérifie sans problème qu'elle convient.
2. On nous ordonne de prendre v nul sur F_1, définir v revient à le définir sur Im(u). On se souvient que u induit un isomorphisme de E_1 sur Im(u). Notons ϕ cet isomorphisme, et prenons v coïncidant avec ϕ^{-1} sur Im(v). On vérifie que tout marche bien en utilisant bien sûr le fait que deux endomorphismes qui coïncident sur les facteurs d'une somme directe supplémentaire sont égaux.

Oral 13. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$.

1. A quelle condition a-t-on $P(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$?
2. A quelle condition a-t-on $P(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$?
3. A quelle condition a-t-on $P(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$?

---

1. Une inclusion est simple. L'inclusion réciproque découle de D'Alembert-Gauss, à condition d'avoir $\deg(P) \geq 1$.
2. Si $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, si $\deg(P) = n \geq 0$, prenons un $n+1$-uplet (x_k) de réels, l'unique polynôme de $\mathbf{R}[X]$ qui prend en les x_k les valeurs y_k (Lagrange) est aussi l'unique polynôme de $\mathbf{C}[X]$ qui...(car il est unique, justement). On peut aussi l'écrire avec les polynômes de Lagrange si on veut être plus convaincu. Bref, l'inclusion dans ce sens équivaut à $P \in \mathbf{R}[X]$. Et on a aussi traité le début de la troisième question.
   L'inclusion réciproque, si le degré est impair, se déduit du théorème des valeurs internédiaires. Si le degré est pair, l'analyse classique nous montre que la fonction polynôme associée est minorée ou majorée. Ce qui exclut cette inégalité réciproque.
3. L'inclusion $P(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$ se règle comme précédemment, le raisonnement avec Lagrange valant pour n'importe quel sous-corps de $\mathbf{R}$.
   Pour avoir l'égalité, il faut évidemment que le degré soit impair, mais on voit bien (prendre $P = X^3$) que ça ne va pas du tout être suffisant. Conjecturer qu'en fait il faut avoir un degré 1 est accessible, mais pas du tout évident à démontrer. Constatons d'abord qu'on peut supposer P à coefficients entiers quitte à tout multiplier par un entier convenable, ça ne change pas le problème. Supposons donc
   $$P = a_n X^n + \cdots + a_0$$
   où les a_k sont des entiers, $n \geq 2$, $a_n \in \mathbf{N}_*$. On veut que tout entier soit un $P(a/b)$ où a et b sont deux entiers premiers entre eux, $b \neq 0$. On vérife que cela oblige b à diviser a_n. Tout entier est donc nécessairement un $P(k/a_n)$, pour un certain entier k. Mais si $n \geq 2$, il n'est pas très dur de montrer (accroissements finis) que $|P((k+1)/a_n) - P(k/a_n)| > 1$ si $k \geq k_0$, les entiers ne pourront pas tous être atteints.

Oral 14. Soient G un groupe fini et $\Omega = G^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On pose $C = \{(x,y) \in G^2\ ;\ xy = yx\}$ et $p = \mathbf{P}(C)$.

1. Montrer que $p > 0$. Que dire si $p = 1$?
   Dans la suite on suppose que G n'est pas commutatif.
2. Calculer p lorsque $G = S_3$ puis lorsque $G = S_4$.
3. On définit la relation $\sim$ sur G^2 par

$$x \sim y \iff \exists g \in G\ x = gyg^{-1}$$

   Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
4. On note s le nombre de classes d'équivalence. Montrer que $p = \dfrac{s}{\mathrm{Card}(G)}$.

---

1. Il y a des tas de choses dans C : les (x,x), les (e,x), les (x,e)...Donc $\mathrm{Card}(C) > 0$. Dire que $p = 1$ signifie que $\mathrm{Card}(C) = \mathrm{Card}(G)$, ou encore $C = G$, ou encore G est commutatif.
2. On décrit $S_3 = \{\mathrm{I}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Notons c et c^2 les deux 3-cyles, τ_1, τ_2, τ_3 les transpositions. Dans C on a les couples (I,σ), les couples (σ, I) (attention à ne pas compter deux fois le couple (I,I)), les couples (σ,σ) (ne pas recompter (I,I)), les couples (c,c^2) et (c^2,c), c'est tout. On montre facilement que deux transpositions distinctes (et "non disjointes", ici) ne commutent pas :

$$(a\ b)(a\ c) = (a\ c\ b) \neq (a\ b\ c)$$

   et une transposition τ et un 3-cycle c ne peuvent pas commuter : en effet, τc est une permutation impaire, donc ici une transposition, donc $\tau c \tau c = I$, et donc $\tau c \tau = c^2$, donc $\tau c = c^2 \tau \neq c\tau$.
   Bref, $\mathrm{Card}(C) = 18$ et $p = 1/2$.
3. Réflexivité, symétrie et transitivité se font bien.
4. Faire le lien entre les classes pour $\sim$ et la commutation n'est pas si évident. On a deux points de départ possibles :

$$xy = yx \iff y^{-1}xy = x$$

   ou

$$gyg^{-1} = hyh^{-1} \iff (h^{-1}g)y = y(h^{-1}g)$$

   Notons $C_x = \{y \in G\ ,\ xy = yx\}$. On peut noter que C_x est un sous-groupe de G (l'introduction de C_x peut être suggérée par l'examinateur). La deuxième remarque ci-dessus montre que si l'on définit la surjection

$$\phi\ :\ g \longmapsto gyg^{-1}$$

de G sur $\overline{y}$ on a $\phi(g) = \phi(h) \iff g \in hC_y$. On en déduit (détailler, mais à l'oral on se contentera peut-être d'un dessin)(si on doit détailler, on introduira une nouvelle relation d'équivalence : $g\mathcal{R}h \Leftrightarrow \phi(g) = \phi(h)$) que

$$\mathrm{Card}(\overline{y}) = \frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}(C_y)}$$

Reste à remarquer que

$$\mathrm{Card}(C) = \sum_{y \in G} \mathrm{Card}(C_y)$$

(en classant les éléments de C suivant leur deuxième composante, mais si on les classe suivant leur première composante ça revient au même). Donc

$$\mathrm{Card}(C) = \sum_{y \in G} \frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}(\overline{y})}$$

Si $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_s}$ sont les classes d'équivalence pour $\sim$,

$$\sum_{y \in G} \frac{1}{\mathrm{Card}(\overline{y})} = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{y \in \overline{y_k}} \frac{1}{\mathrm{Card}(\overline{y})} \right) = s$$

ce qui conclut. On peut montrer que $p \leq 5/8$, exercice d'oral d'ens. On peut montrer qu'il y a égalité pour le groupe diédral D_4, plus intéressant que S_4 et, surtout, faisable.
Plutôt que traiter S_4 en deuxime question, trop long, ce serait plus intéressant de vérifier la formule pour S_3.

Oral 15. Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i v_i \right\| \leq \sqrt{n}$$

C'est moins dur si on sait qu'il s'agit d'un exercice de probabilités. Un exercice un peu plus difficile techniquement mais utilisant le même cadre a été posé à l'oral de l'ENS de Lyon à Matéo Frely.
On considère $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ un n-uplet de variables de Rademacher indépendantes. On calcule l'espérance de

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i v_i \right\|^2$$

Puis on se souvient que l'espérance est une moyenne, le résultat découle simplement d'un raisonnement par l'absurde.

Oral 16. Soit E un espace vectoriel normé et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On considère des v.a. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i.i.d. telles que $\mathbf{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbf{P}(\epsilon_i = -1) = \dfrac{1}{2}$. Si $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ on pose $N(v_1, \dots, v_n) = \mathbf{E}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k v_k\right\|\right)$. Démontrer que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [-1, 1]^n$, $N(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) \leq N(v_1, \dots, v_n)$.

On voit assez vite qu'il suffit de montrer que, si $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$N(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n) \leq N(v_1, \dots, v_n)$$

et en écrivant la définition de l'espérance, on se ramène à montrer, si x et y sont dans E et λ dans $[0, 1]$,

$$\|x + \lambda y\| + \|x - \lambda y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$$

qui est au moins vrai si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ et qui ressemble à une inégalité de convexité. On trouve α et β tels que

$$x + \lambda y = \alpha(x + y) + (1 - \alpha)(x - y)$$

$$x - \lambda y = \beta(x + y) + (1 - \beta)(x - y)$$

et on conclut ensuite assez rapidement.

Oral 17. Soit $n \in \mathbf{N}_*$ et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{R}_*^+$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right)$, $1 \leq k \leq n$.

A première vue, c'est bien simple : les espérances existent (v.a. à valeurs dans $[0,1]$) et il est « clair » que $e_k = \mathbf{E}\left(\dfrac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right)$ ne dépend pas de k. Mais par linéarité

$$e_1 + \cdots + e_n = 1$$

donc $e_k = 1/n$ pour tout $n \geq 1$, la réponse à la question étant donc k/n, par linéarité.
La grande question est : où intervient l'indépendance ? Elle fait que $(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$ a même loi que $(X_k, \ldots, X_1, \ldots, X_n)$, d'où l'égalité des e_k mentionnée plus haut.
Si les X_k ne sont pas indépendantes, les e_k ne sont pas en général égaux. Prenons par exemple X_1 qui suit une loi uniforme sur $1, 2, 3$ et $X_2 = 2$ si $X_1 = 1$, $X_2 = 3$ si $X_1 = 2$, $X_2 = 1$ si $X_1 = 3$. Alors X_1 et X_2 ont même loi mais ne sont pas indépendantes. On peut calculer
$\mathbf{E}\left(\dfrac{X_1}{X_1 + X_2}\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{89}{180} \neq \dfrac{1}{2}$

Oral 18. Soit F l'application qui à une norme N sur $\mathbf{R}^n$ associe la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour N.

1. L'application F est-elle injectve ?
2. Quelle est l'image de F ?

Enoncé intéressant, il faut se poser les bonnes questions.

---

1. Autrement dit, si on connaît B la boule fermée unité, connaît-on $\|.\|$? Soit $x \neq 0_E$. Alors

$$\forall t \geq 0 \qquad tx \in B \iff t \leq \frac{1}{\|x\|}$$

Donc

$$\|x\| = \frac{1}{\sup\{t > 0 \ ; \ tx \in B\}}$$

Donc B détermine $\|.\|$, on a donc injectivité.

2. Il s'agit de voir quelles propriétés de B font de la définition de $\|.\|$ ci-dessus une norme. On sait que B doit être compact, convexe, contenir 0_E dans son intérieur, et (pas si évident mais se dévoile pour l'homogénéité)

$$x \in B \iff -x \in B$$

Définissons à partir de B une norme $\|.\|$ comme ci-dessus, avec évidemment $\|0_E\| = 0$. On montre que c'eszt bien défini, et la difficulté est de montrer

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ou encore

$$\frac{1}{\|x\|+\|y\|} \leq \frac{1}{\|x+y\|}$$

ou encore

$$\frac{1}{\|x\|+\|y\|}(x+y) \in B$$

Mais sont dans B les vecteurs $\frac{1}{\|x\|}x$ et $\frac{1}{\|y\|}y$ et B est convexe, il suffit alors d'écrire

$$\frac{1}{\|x\|+\|y\|}(x+y) = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)$$

et l'homogénéité est plus simple.

Oral 19. (X) Soit $(G, .)$ un groupe de cardinal $p^\alpha m$ avec p premier, $\alpha \in \mathbf{N}^*$, $m \geq 2$ et $p \wedge m = 1$. Soit E une partie de G de cardinal p^α. On pose $G_E = \{g \in G \ ; \ g.E = E\}$ et $O_E = \{g.E \ ; \ g \in G\}$.

1. Montrer que G_E est un sous-groupe de G de cardinal $\leq p^\alpha$.
2. Montrer que $G = |G_E| \times |O_E|$.
3. Montrer l'équivalence entre : **i)** $p \not| \, |O_E|$, **ii)** $|G_E| = p^\alpha$, **iii)** $|O_E| = m$.
4. On note X l'ensemble des parties de G de cardinal p^α. Déterminer le cardinal de X. Montrer que p ne divise pas $|X|$.
5. Montrer que G possède un sous-groupe de cardinal p^α.

---

1. Remarquons que $|g.E| = |E|$, car $h \mapsto g.h$ est une bijection de E sur $g.E$. Donc $g.E = E \ \Leftrightarrow \ g.E \subset E$. Montrer que G_E est un sous-groupe de E ne pose pas trop de problème. Fixons $h \in E$; l'application $g \mapsto g.h$ injecte G_E dans E. D'où l'inégalité cherchée sur le cardinal.
2. Soit ϕ l'application définie sur G par $\phi(g) = g.E$. ϕ est à valeurs dans O_E. Etudions l'injectivité de ϕ :
$$\phi(g) = \phi(g') \iff g.E = g'.E \iff ((g')^{-1}g).E = E$$
Donc
$$\phi(g) = \phi(g') \iff (g')^{-1}g \in G_E$$
G se partitionne donc, suivant les images par ϕ de ses éléments (on peut définir la relation d'équivalence $gRg' \iff g.E = g'.E$) en $|O_E|$ classes d'équivalence de cardinal $|G_E$. Ce qui donne la relation cherchée.
3. La question précédente montre que **ii)** et **iii)** sont équivalentes. **i** $\Rightarrow$ **ii** est assez simple. Et puis la réciproque aussi d'ailleurs !
4. Ce cardinal est bien sûr connu : c'est
$$\frac{p^\alpha m(p^\alpha \ m-1)\dots(p^\alpha m - p^\alpha + 1)}{1 \times \dots \times p^\alpha}$$
Les multiples de p^j au numérateur ($1 \leq j \leq \alpha$) sont
$$p^\alpha m, \ p^\alpha m - p^j, \dots, p^\alpha m - p^\alpha + p^j$$
et il y en a $p^{\alpha - j}$. Donc la valuation p-adique de ce numérateur est
$$p^{\alpha-1} + \dots + 1$$
La valuation p-adique du dénominateur est, de la même manière,
$$p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \dots + 1$$
ce qui conclut.

5. Si le résultat escompté est faux, alors $p||O_E|$ pour tout $E \in X$. Mais X se partitionne en O_E, en définissant la relation d'équivalence sur X :

$$E \; R \; E' \iff \exists g \in G \quad E' = g.E$$

X serait réunion d'ensembles de cardinal divisible par p, non vu la question précédente.

Oral 20. (Mines)
Soit $(G, *)$ un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre 2. Que peut-on dire de $|G|$?

On peut remarquer qu'un tel groupe est abélien. En effet, de $xyxy = 1$ on tire $yx = xy$ en composant par x à gauche et par y à droite. On conjecture en regardant des petits groupes que le cardinal est de la forme 2^n. On prend $x_1 \neq e$, $x_2 \notin \langle x_1 \rangle$, $x_3 \notin \langle x_1, x_2 \rangle$, jusqu'à x_n tel que $x_n \notin \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle$ et $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = G$. L'application

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \longmapsto x_1^{\epsilon_1} \ldots x_n^{\epsilon_n}$$

est alors une bijection de $\{0, 1\}^n$ dans G. On peut aussi introduire $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ mais il n'y a pas nécessité. Une méthode plus savante est en effet, notant $+$ la loi du groupe pour que ce soit plus clair, de le munir d'une structure de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel.

Oral 21. (Mines)
Les groupes $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Q}, +)$ sont-ils isomorphes ?

L'un est monogène, l'autre non...Donc non.

Oral 22. (**Centrale avec Python**)
On note S_n le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. Pour G un groupe fini, on pose

$$p_G = \frac{\left|\{(x, y) \in G^2 \; ; \; xy = yx\}\right|}{|G \times G|}$$

et, pour $x \in G$, $p_x = \dfrac{|\{y \in G \; ; \; xy = yx\}|}{|G|}$.
On dit que x est conjugué à y dans G s'il existe $z \in G$ tel que $y = zxz^{-1}$. On admet que cela définit une relation d'équivalence sur G. On note N_G le nombre de classes d'équivalence pour cette relation.

1. Soit $c = (a_1 \dots a_r)$ un r-cycle de $[\![1, n]\!]$. Pour $\sigma \in S_n$, montrer que $\sigma c \sigma^{-1}$ est un r-cycle que l'on déterminera.
2. Coder une fonction donnant une permutation aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Coder une fonction qui approxime p_{S_n} et tracer p_{S_n} pour $n \in [\![1, 5]\!]$.
3. Justifier les valeurs de p_{S_1}, p_{S_2} et p_{S_3}.
4. (a) Soit x et y conjugués. Montrer que $p_x = p_y$.
   (b) Soit x et y conjugués. Montrer que $\left|\{s \in G \; ; \; y = sxs^{-1}\}\right| = |\{t \in G \; ; \; tx = xt\}|$.
   (c) Montrer que $p_G = \dfrac{N_G}{|G|}$.

---

1. C'est $(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_r))$.
2. Python…
3. Pour un groupe commutatif, $p_G = 1$. Ne reste donc que S_3. Dans lequel il n'y a, à part l'identité, que des cycles. Par 1, pour que σ commute avec le cycle c, il faut que σ laisse stable le support de c. Donc aucun 3-cycle ne commute avec aucune transposition, et les transpositions ne commutent pas entre elles. En revanche les 3-cycles sont le carré l'un de l'autre, donc commutent. Les couples (x, y) qui commutent, hors $x = \mathrm{Id}_E$ ou $y = \mathrm{Id}_E$, sont les (x, x) et (c_1, c_2), (c_2, c_1) où c_1 et c_2 sont les 3-cycles. Il y en a donc :
   6 couples (x,x).
   5×2 couples (x, y) avec $x = \mathrm{Id}_E$ ou $y = \mathrm{Id}_E$, $x \neq y$.
   2 couples supplémentaires.
   Donc $p_{S_3} = 1/2$.
4. (a) Le commutant de x et celui de y sont conjugués, donc de même cardinal.
   (b) $x = zyz^{-1}$. Donc

   $$y = sxs^{-1} \iff x = zsx(zs)^{-1} \iff (zs)x = x(zs)$$

   D'où une bijection entre les deux ensembles donnés.

(c) Notons $A = \{(x,y) \in G^2 \ ; \ xy = yx\}$. Alors

$$A = \cup_{x \in G} \{(x,t) \ ; \ t \in C_x\}$$

où $C_x = \{t \in G \ ; \ tx = xt\}$. Soit d'autre part D_x l'ensemble des conjugués de x. La question précédente montre que $|D_x| \times |C_x| = |G|$. En effet, l'application $s \longmapsto sxs^{-1}$ est une surjection de G sur D_x, pour laquelle chaque élément de D_x a C_x antécédents. Donc, l'union définissant A étant clairement disjointe,

$$|A| = \sum_{x \in G} \frac{|G|}{|D_x|}$$

Notant $N_G = m$, $x_1, \ldots, x_m$ des représentants de chacune des classes de conjugaison,

$$|A| = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{x \in D_{x_k}} \frac{|G|}{|D_x|} \right)$$

Mais, pour $x \in D_{x_k}$, $D_x = D_{x_k}$, Donc $|A| = m|G| = |N_G| \times |G|$ ce qui conclut.

Oral 23. (Mines)
Montrer que 2021 a un mutliple dont tous les chiffres en base 10 valent 1.

Il s'agit de trouver n tel qu'il existe k tel que

$$2021 \times n = 1 + 10 + \cdots + 10^k$$

ce qui équivaut à

$$9 \times 2021 \times n = 10^{k+1} - 1$$

ou encore à

$$10^{k+1} \equiv 1 \ [9 \times 2021]$$

Mais 10 est dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ avec $m = 9 \times 2021$. Ce qui conclut.

Oral 24. (Mines)
Soit $a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n \in \mathbf{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbf{R}[X]$. Montrer que si $(b_0,\dots,b_{n-1})$ est suffisamment proche de $(a_0,\dots,a_{n-1})$ le polynôme $b_0+b_1X+\cdots+b_{n-1}X^{n-1}+X^n$ est simplement scindé sur $\mathbf{R}[X]$.

Notons $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ la suite strictement ordonnée des zéros de $a_0 + a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n$. Supposant n impair pour fixer les idées, choisissant $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \ldots < y_n < z_n < y_{n+1}$, l'application

$$(b_0,\dots,b_{n-1}) \longmapsto \big(b_0+\cdots+b_{n-1}y_1^{n-1}+y_1^n,\dots,b_0+\cdots+b_{n-1}y_{n+1}^{n-1}+y_1^{n+1}\big)$$

est continue, l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty,0[\times]0,+\infty[\times\cdots\times]0,+\infty[$ est un ouvert, ce qui conclut. Même démarche si n est pair.

Et si on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$? C'est un petit peu plus difficile. Supposons que le résultat ne soit plus vrai. Alors on peut trouver une suite $\Big((b_0^{(m)},\dots,b_{n-1}^{(m)})\Big)_{m\geq 0}$ convergeant vers $(a_0,\dots,a_{n-1})$ et telle que, pour tout m, le polynôme

$$b_0^{(m)}+b_1^{(m)}X+\cdots+b_{n-1}^{(m)}X^{n-1}+X^n$$

ait une racine z_m au moins double. L'idée est de « faire converger » la suite (z_m). Il n'y a aucune raison pour que la suite (z_m) converge, mais on peut montrer qu'elle est bornée. Et donc en extraire une suite convergente. Pour cela, on constate que si z est une racine de

$$b_0+b_1X+\cdots+b_{n-1}X^{n-1}+X^n$$

alors de deux choses l'une. Soit $|z|\leq 1$. Soit $|z|>1$, mais alors de

$$z^n = -b_0-b_1z+\cdots-b_{n-1}z^{n-1}$$

on déduit, en divisant par z^{n-1}, $|z|\leq |b_0|+|b_1|+\cdots+|b_{n-1}|$. Ceci permet assez facilement de conclure que (z_m) est bornée. On en extrait une suite $(z_{\phi(m)})$ convergente, on vérifie alors que sa limite est racine double de $a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n$, contradiction. Bien sûr, il faut savoir détailler tout ça.
Un corollaire important : les matrices $n\times n$ à valeurs propres 2 à 2 distinctes forment un ouvert. On peut montrer que cet ouvert est l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

Oral 25. (**Centrale**)
On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour $u \in E$, on note $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

1. Montrer que N_∞ et N sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ? On munit désormais E de la norme N_∞.
2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est d'intérieur vide. Quelle est son adhérence ?
3. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des suites à valeurs strictement positives.
4. Reprendre la question 2 en remplaçant la norme N_∞ par la norme N.
5. Reprendre la question 3 en remplaçant la norme N_∞ par la norme N.

---

1. Pas difficile, mais c'est du travail ! Ne pas oublier de justifier que les définitions sont correctes. On n'a pas $N_\infty \leq \alpha N$ (prendre la suite dont le $n$ème terme est 2^n, les autres nuls) mais $N \leq 2N_\infty$.
2. Intérieur vide : dans une boule ouverte quelconque, il y a facilement des suites dont aucun terme n'est nul...Pour l'adhérence, c'est un peu plus intéressant : il s'agit des suites qui convergent vers 0. Ici, la caractérisation de l'adhérence par les suites n'est pas forcément la plus maniable.
3. L'application $\phi_n \; : \; u \longmapsto u_n$ est une forme linéaire continue en vertu de l'inégalité $|\phi_n(u)| \leq N_\infty(u)$. Donc l'ensemble des suites à valeurs réelles positives est fermé comme intersection de fermés. Il est simple de voir que toute suite à valeurs réelles positives est adhérente à l'ensemble des suites à valeurs réelles strictement positives. Donc l'adhérence est l'ensemble des suites à valeurs réelles positives. L'intérieur est l'ensemble des suites minorées par un certain réel > 0, ce qui se voit simplement avec la définition de l'adhérence.
4. Pour N, toute suite bornée u est limite des suites obtenues en tronquant u au rang n. Donc l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense. Son intérieur est toujours aussi vide.
5. L'adhérence ne change pas, mais l'intérieur est vide : dans toute boule on trouvera une suite ayant un terme négatif.

Oral 26. (PLSR) Soit $(A, B) \in M_n(\mathbf{C})$ telles que $AB - BA \in \mathrm{Vect}(A, B)$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Il est intéressant de commencer par $AB = BA$. Les sous-espaces propres de A (il y en a car on est sur $\mathbf{C}$) sont stables par B, et B induit sur un tel sous-espace propre un endomorphisme qui a des vecteurs propres (car on...). Poursuivons avec des cas a priori un peu plus simple : si

$$AB - BA = A$$

alors $A^2B - ABA = A^2$ et $ABA - BA^2 = A^2$ donc, en ajoutant, $A^2B - BA^2 = 2A^2$. On peut penser montrer alors $A^kB - BA^k = kA^k$ pour $k \in \mathbf{N}$, ce qui se fait par récurrence en multipliant cette égalité par A à gauche par exemple, et en multipliant $AB - BA$ par A^k à droite, et en ajoutant. Par combinaison linéaire, si P est un polynôme, $P(A)B - BP(A) = AP'(A)$. Si P est le polynôme minimal de A, on en déduit que $P|XP'$. La seule racine possible de P est alors 0, donc A est nilpotent. Son noyau, non nul, est stable par B, et on conclut. Si $AB - BA = A + \mu B$, alors

$$(A + \mu B)B - B(A + \mu B) = A + \mu B$$

ce qui ramène au cas précédent puisqu'un vecteur propre commun à $A + \mu B$ et B est commun à A et B. Et enfin si $AB - BA = \lambda A + \mu B$ avec $\lambda \neq 0$, alors

$$A \times \left(\frac{1}{\lambda}B\right) - \left(\frac{1}{\lambda}B\right) \times A = A + \mu\left(\frac{1}{\lambda}B\right)$$

et nous sommes encore une fois ramenés au problème précédent !

Oral 27. (PLSR) Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ et $K = \begin{pmatrix} B \\ BA \\ \vdots \\ BA^{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\text{rg}(K) = n$ si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$.
2. Montrer que $\text{rg}(K) = n$ si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, en notant $(e_j)_{j \in J}$ une base de $E_\lambda(A)$, la famille $(Be_j)_{j \in J}$ est libre.

---

1. On remarque que $K \in M_{nm,n}(\mathbf{C})$. L'endomorphisme canoniquement associé est dans $L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^{nm})$, et donc est de rang maximal n si et seulement s'il est injectif. Soit donc $X \in M_{n,1}(\mathbf{K})$, calculons

$$KX = \begin{pmatrix} BX \\ BAX \\ \vdots \\ BA^{n-1}X \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$KX = 0 \iff \forall P \in \mathbf{C}[X] \quad BP(A)X = 0$$

(en utilisant Cayley-Hamilton). Donc, si $KX = 0$, $X \in \text{Ker}(B)$, et $P(A)X \in \text{Ker}(B)$ pour tout polynôme P. $\{P(A)X \ ; \ P \in \mathbf{C}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ stable par A. Si $X \neq 0$, ce sous-espace vectoriel est non nul, l'endomorphisme induit par A sur ce sous-espace a une valeur propre. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$. Ce qui nous donne une implication. Supposons réciproquement l'existence d'un X non nul tel que $BX = 0$ et $AX = \lambda X$. Alors $BAX = \lambda BX = 0$, etc. . .et la réciproque est faite.

2. Supposant d'abord $\text{rg}(K) = n$, soit $(e_j)_{j \in J}$ une base de $E_\lambda(A)$, supposant $\sum \alpha_j Be_j = 0$, on a $\sum \alpha_j e_j \in \text{Ker}(B)$. . .mais aussi $\in E_\lambda(A)$, on conclut que $\sum \alpha_j e_j = 0$ et donc les α_j sont tous nuls. Si maintenant $\text{rg}(K) < n$, il y a quelque chose de non nul dans $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, que l'on peut compléter en une base de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$; l'image par B ce cette base aura bien du mal, contenant le vecteur nul, à être libre.

Oral 28. (Mines)
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. Montrer que $\mathrm{rg}(A + B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$ puis que $|\mathrm{rg}(A) - \mathrm{rg}(B)| \leq \mathrm{rg}(A + B)$.

On passe aux endomorphismes canoniquement associés pour montrer la première inégalité à partir de l'inclusion $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$. La deuxième inégalité s'en déduit.

Oral 29. (Mines)
Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de $\Phi\ :\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mapsto A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Φ est diagonalisable de valeurs propres 1 et -1 avec des sous-espaces propres $S_n(\mathbf{K})$ et $A_n(\mathbf{K})$ dont les dimensions sont classiques, le déterminant est donc $(-1)^{n(n-1)/2}$.

Oral 30. (Mines)
Soit $n \geq 2$.

1. Soit V un sous-espace de $M_n(\mathbf{R})$ contenant toutes les matrices nilpotentes. Montrer que V contient une matrice inversible.
2. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbf{R})$ contient une matrice inversible.

---

1. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et somme de deux matrices nilpotentes.
2. Soit H un hyperplan ne contenant pas de matrice inversible. Comme $I_n \notin H$, $H \oplus \mathbf{R}I_n = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Toute matrice s'écrit $\alpha I_n + M$ avec $M \in H$. Si elle est nilpotente, alors $M = -\alpha I_n + N$, N nilpotente. Une telle matrice est inversible si $\alpha \neq 0$. Donc $\alpha = 0$. Donc H contiendrait toutes les matrice nilpotentes. Contradiction avec la question précédente. Méthode trop astucieuse.

Oral 31. (Mines)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbf{N}_*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectorielle.

1. Montrer que les hyperplans de E sont les noyaux des formes linéaires non nulles.
2. Montrer que l'application $A \longmapsto (M \mapsto \mathrm{Tr}(AM))$ est un isomorphisme de $M_n(\mathbf{K})$ sur $L\left(M_n(\mathbf{K}), \mathbf{K}\right)$.
3. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible. Calculer $\mathrm{Tr}(J_r C)$.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient une matrice inversible.

On trouve $\mathrm{Tr}(J_r C) = 0$. Et cela permet de conclure, car si $A = PJ_rQ$,

$$\mathrm{Tr}(AQ^{-1}CP^{-1}) = 0$$

Oral 32. (Mines)

Soit $r \in \mathbf{N}_*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbf{N}_*$, $n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable telle que $\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$,

$$C(A) = \{M \in M_n(\mathbf{C})\ ;\ AM = MA\}$$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de dimension $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2$.
2. Soit $C'(A) = \{X \in M_n(\mathbf{C}\ ;\ \forall M \in C(A)\ ,\ XM = MX\}$. Montrer que $C'(A) = \mathbf{C}[A]$

---

1. On vérifie qu'un endolorphisme commute avec un endomorphisme diagonalisable si et seulement si il laisse stables ses sous-espaces propres. On interprète matriciellement, pour la dimension. On peut aussi tout faire en raisonnant par blocs, ce n'est pas le plus amusant à rédiger.
2. Assez facilement, si $MA = AM$, alors pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $MP(A) = P(A)M$. Donc $\mathbf{C}[A] \subset C'(A)$. Soit $M \in C'(A)$. Alors $M \in C(A)$, donc laisse stables les sous-espaces propres de A. Et commute sur chacun de ces sous-espaces avec tout endomorphisme, donc induit une homothétie sur chacun des sous-espaces. Ne reste plus qu'à conclure avec l'interpolation de Lagrange.

Oral 33. (**Centrale**)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit $u \in L(E)$. L'objectif est de montrer que les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique χ_u sont les mêmes que ceux du polynôme minimal π_u. Soit P un facteur irréductible de π_u de degré d.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(P(u))$ contient un vecteur $x \neq 0$.
2. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ est une base de $F = \mathrm{Vect}\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbf{N}}$.
3. Calculer χ_{u_F} et en déduire que P est facteur irréductible de χ_u.
4. En factorisant $u^k - \lambda^k \mathrm{Id}_E$ lorsque $\lambda \in \mathbf{K}$, montrer que χ_u divise π_u^n, et conclure.

Une bonne idée serait d'examiner $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ pour commencer.

1. Sinon $P(u) \in GL(E)$, cela contredit la minimalité de π_u.
2. Comme $P(u)(x) = 0_E$, on obtient $u^d(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ puis par une récurrence très simple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u^n(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ (autre méthode : division euclidienne). La famille est donc génératrice. Si elle n'est pas libre, il y a un P_1 de degré $< d$, non nul, tel que $P_1(u)(x) = 0_E$. L'ensemble des polynômes qui annulent u sur x étant un idéal, on aurait $P_1|P$ ce qui contredirait l'irréductibilité de P (en prenant P_1 de degré minimal).
3. On écrit la matrice de u dans la base précédente, à l'aide de P, c'est sa matrice compagne. On trouve donc que $\chi_{u_F} = P$, or χ_{u_F} divise χ_u (preuve par blocs).
4. Notons
$$\pi_u = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$$
Alors, pour $\lambda \in \mathbf{K}$,
$$\begin{aligned}\pi_u(\lambda)\mathrm{Id}_E &= \pi_u(\lambda)\mathrm{Id}_E - \pi_u(u)\\ &= \left[\lambda^d\mathrm{Id}_E - u^d\right] + a_{d-1}\left[\lambda^{d-1}\mathrm{Id}_E - u^{d-1}\right] + \cdots + a_1\left[\lambda\mathrm{Id}_E - u\right]\\ &= \left[\lambda\mathrm{Id}_E - u\right] \circ v\end{aligned}$$
où v est un endomorphisme qui peut s'exprimer comme polynôme de u dont les coefficients sont des polynômes de λ. Son déterminant est donc un polynôme de λ. En prenant le déterminant des deux membres de l'égalité précédente, on conclut bien que χ_u divise π_u^n. Un facteur irréductible de χ_u divise donc π_u^n, et par conséquent π_u par Gauss.

Oral 34. (Centrale)

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. On considère la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Exprimer le déterminant de M en fonction de celui de A.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ l'est.

---

1. On retranche la $k$ième ligne à la $n+k$ième. On obtient $\det(M) = \det\left(\begin{pmatrix} A & 4A \\ 0 & -3A \end{pmatrix}\right)$ et donc $\det(A) = (-3)^n \left(\det(A)\right)^2$.
2. La bonne idée est d'examiner le cas scalaire : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, il existe $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ inversible telle que
$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}$$
avec
$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On en déduit que
$$\begin{pmatrix} p_1 I_n & p_2 I_n \\ p_3 I_n & p_4 I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 I_n & q_2 I_n \\ q_3 I_n & q_4 I_n \end{pmatrix}$$
avec
$$\begin{pmatrix} p_1 I_n & p_2 I_n \\ p_3 I_n & p_4 I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 I_n & q_2 I_n \\ q_3 I_n & q_4 I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & (0) \\ (0) & I_n \end{pmatrix}$$
ce qui conclut. Noter que M est donc diagonalisable si et seulement si A l'est.

Oral 35. (Mines)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et, pour $x \in]0,1]$, $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$.

1. Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F^2 = -F^2(1) + 2\int_0^1 fF$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F^2 \leq 4\int_0^1 f^2$.

---

1. On montre que $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$.
2. Par parties ?
$$\int_\epsilon^x \frac{1}{t^2}\left(\int_0^t f\right)^2 = \left[-\frac{1}{t}\left(\int_0^t f\right)^2\right]_\epsilon^1 + \int_\epsilon^1 2fF$$
et on fait tendre ϵ vers 0.
3. Donc $\displaystyle\int_0^1 F^2 \leq 2\int_0^1 fF$, on utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure.

Oral 36. (Mines)

Soit $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbf{R}^+$.
2. Montrer que f est C^2 sur $\mathbf{R}_*^+$ et vérifie l'équation différentielle

   $$(E) \qquad\qquad 2xy'' + y' - 2y = 0$$

3. On pose $y(x) = z\left(\sqrt{x}\right)$. Résoudre (E).
4. Donner l'expression de $f(x)$ (on donne $f(0) = \sqrt{\pi}$).

---

1. La fonction qu'on essaye d'intégrer est continue positive sur $]0, +\infty[$, majorée par $1/\sqrt{t}$ donc intégrable sur $]0, 1[$, majorée plus généralement par $e^{-t}/\sqrt{t}$ ce qui nous fait une bonne domination pour la continuité.
2. Ne pas se tromper de variable : on dérive par rapport à x, on multiplie donc par $1/t$. Ce qui va gêner en 0 si $x = 0$. On se place donc sur un $[a, b]$ (pour x bien sûr) avec $0 < a < b$, on domine en donnant à x la valeur a. On trouve ainsi

   $$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \qquad , f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{t^{5/2}}\mathrm{d}t$$

   Intégrons par parties, si $0 < a < b$,

   $$\int_a^b e^{-t}\frac{e^{-x/t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\frac{e^{-x/t}}{\sqrt{t}}\right]_a^b + \int_a^b e^{-t}\left(-\frac{e^{-x/t}}{2t^{3/2}} + x\frac{e^{-x/t}}{t^{5/2}}\right)dt$$

   Prenons les limites quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on obtient

   $$f(x) = \frac{1}{2}f'(x) + xf''(x)$$

   C'est bien ce qu'on voulait.
3. On pose, plutôt, $z(x) = y(x^2)\ldots$

   De $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})$ et $y''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}z'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{2x}z''(\sqrt{x})$ on tire

   $$\forall x > 0 \qquad \frac{-1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) - 2z(\sqrt{x}) = 0$$

   i.e. $z'' = 2z$. Donc $z(x) = \alpha\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}x\right) + \beta\mathrm{sh}\left(\sqrt{2}x\right)$. Et donc

   $$y(x) = \alpha\mathrm{ch}\left(\sqrt{2x}\right) + \beta\mathrm{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$$

   Par convergence dominée, f a une limite nulle en $+\infty$, donc $\beta = -\alpha$, et donc

   $$y(x) = \gamma\ e^{-\sqrt{2x}}$$

   Or on a $f(0)\ldots$et la continuité de f en 0.

Oral 37. (Mines)

1. Rayon de convergence de $\sum \dfrac{(k+1)(k+2)}{2^k} x^k$?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k}$

---

1. 2.
2. On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{2^k}$ (série géométrique), on dérive deux fois, on prend la valeur en 1.

Oral 38. (Mines) Soit $f\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $1/f$ est définie au voisinage de 0.
2. Rappeler pourquoi, pour $\rho \in]-R, R[$, il existe $M \in \mathbf{R}_*^+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n|\rho^n < M$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $r > 0$ et une suite (u_n) tels que
$$\forall x \in]-r, r[\quad \frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$
Trouver une relation entre les suites (u_n) et (a_n).
4. Montrer que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

---

1. Par continuité, et non nullité en 0.
2. Facile.
3. Produit de Cauchy et unicité du développement en série entière : $u_0 a_0 = 1$ et, si $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = 0$$
4. Réciproquement, la relation précédente définit, à partir de la suite (a_n), une unique suite (u_n) et il suffit de montrer que le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$ est strictement positif pour conclure. Notons que l'on peut réécrire la récurrence sous la forme
$$u_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k u_{n-k}$$
On prend M et ρ comme en 2. On cherche M' et $\rho' > 0$ tels que, pour tout n,
$$|u_n| \leq M'(\rho')^n$$
ce qui assurera la non nullité du rayon de convergence. Supposons que ce soit vrai jusqu'au rang $n-1$, alors il suffirait pour que cela le fût au rang n que
$$\frac{M}{|a_0|} \sum_{k=1}^{n} \rho^k \rho'^{n-k} \leq \rho'^n$$

ce qui se réécrit

$$\frac{M}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n}\alpha^k \leq 1$$

avec $\alpha = \rho/\rho'$. Il suffit pour cela d'avoir

$$\frac{M}{|a_0|}\frac{\alpha}{1-\alpha} \leq 1$$

ce qui est possible : prendre ρ' suffisamment grand permettra d'avoir α assez petit.

Oral 39. (Mines)

Soit $f \ : \ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. On suppose qu'il existe une suite (x_k) de complexes non nuls de module $< R$, convergeant vers 0 et telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(x_k) = 0$. Montrer que f est nulle.
2. On suppose que $|f|$ admet un maximum local en 0. Montrer que f est constante.

---

1. Si f est non nulle, soit n_0 le plus petit indice tel que $a_n \neq 0$, alors
$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0} \left(1 + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n_0}} z^{n-n_0} \right)$$
Donc $|f(z)| \underset{z \to 0}{\sim} |a_{n_0} z^{n_0}|$ et donc au voisinage de 0 sauf éventuellement en 0, f ne s'annule pas.
2. Une interversion série-intégrale (sur un segment, on peut utiliser la convergence normale) donne, si $0 < r < R$,
$$\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = 2\pi f(0)$$
Si $|f|$ admet un maximum local en 0, c'est un maximum sur $D'(0, R')$ pour un certain $R' < R$, $R' > 0$. Si $r < R$ on peut alors majorer :
$$2\pi |f(0)| \leq \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| \mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(0)| \mathrm{d}\theta = 2\pi |f(0)|$$
La deuxième inégalité est une égalité, donc $|f|$ est constant et vaut $|f(0)|$ sur $C(0, r)$. Notons $f(0) = \rho e^{i\alpha}$, $\rho > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ (le cas $\rho = 0$ n'est pas très dur). Alors
$$\int_0^{2\pi} e^{-i\alpha} f(re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta = 2\pi\rho$$
D'où, prenant la partie réelle :
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} f(re^{i\theta})\right) \mathrm{d}\theta = 2\pi\rho$$
Mais, pour tout θ,
$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} f(re^{i\theta})\right) \leq \left| f(re^{i\theta}) \right| = \rho$$
Par le fait qu'une intégrale de fonction continue positive ne peut être nulle qu'en cas de nullité de la fonction, on obtient pour tout θ :
$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} f(re^{i\theta})\right) = \left| f(re^{i\theta}) \right|$$

et donc, pour tout θ, $f(re^{i\theta}) = \rho e^{i\alpha}$. La constance de f sur $D'(0, R')$ suffit, car une série entière est entièrement déterminée par ses valeurs sur un disque de centre 0, aussi petit soit-il.

Oral 40. (X) Soit (a_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathbf{R}^+$. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0, \pi]$ on pose $f_n(t) = a_n \sin(nt)$.

1. Soit $\delta \in]0, \pi[$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, si p et q sont dans $\mathbf{N}_*$ avec $p < q$ et si $t \in [\delta, \pi - \delta]$, alors $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k \sin(kt)\right| \leq C a_p$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$ si et seulement si (a_n) converge vers 0.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ si et seulement si $(n a_n)$ converge vers 0.

---

1. On définit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Alors (transformation d'Abel)

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} a_k \sin(kt) &= \sum_{k=p}^{q} a_k \left(S_k(t) - S_{k-1}(t)\right) \\ &= \sum_{k=p}^{q} a_k S_k(t) - \sum_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1} S_k(t) \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) S_k(t) + a_q S_q(t) - a_p S_{p-1}(t)\end{aligned}$$

   Calculons maintenant, classiquement,

$$\begin{aligned}S_n(t) &= \operatorname{Im}\Big(\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\Big) \\ &= \operatorname{Im}\Big(\frac{e^{i(n+1)t/2}}{e^{it/2}} \quad \frac{\sin[(n+1)t/2]}{\sin[t/2]}\Big) \\ &= \sin[nt/2] \quad \frac{\sin[(n+1)t/2]}{\sin[t/2]}\end{aligned}$$

   Sur $[\delta, \pi - \delta]$, $\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2)$, donc $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k \sin(kt)\right| \leq \frac{2}{\sin(\delta/2)} a_p.$

2. Si (a_n) converge vers 0, alors le calcul précédent montre la convergence simple, et même uniforme sur tout segment de $]0, \pi[$. En 0 et en π pas de problème. S'il y a convergence simple, alors pour tout t la suite $(a_k \sin(kt))$ converge vers 0, pour $t = \pi/2$ on en déduit que la suite (a_{2n+1}) converge vers 0, donc la suite (a_n) aussi.

3. S'il y a convergence uniforme, alors la suite $(\sigma_{2n} - \sigma_n)(\pi/(4n)$ converge vers 0. Or le terme général de cette suite est

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$$

et ce terme est minoré par $\dfrac{\sqrt{2}}{2} n a_{2n}$. On en déduit que $(2na_{2n})$ converge vers 0 et en majorant $(2n+1)a_{2n+1}$ par $(2n+1)a_{2n}$ on conclut.
La réciproque est dure. Commençons par noter que, si $u \in [0, \pi/2]$, $\sin u \geq \dfrac{2}{\pi} u$ (inégalité classique, très graphique, la courbe du sinus est au-dessus de sa corde sur $[0, \pi/2]$). On en tire l'inégalité valable sur $]0, \pi[$:

$$|S_n(t)| \leq \frac{\pi}{t}$$

et donc, en utilisant la transformation d'Abel du début,

$$\left|\sum_{k=p}^{+\infty} a_k \sin(kt)\right| \leq 2a_p \frac{\pi}{t}$$

Fixons un $\epsilon > 0$. Si à partir du rang N on a $NaN \leq \epsilon$, alors pour $p \geq N$ on a, pour tout t tel que $2\pi/t \leq N$,

$$\left|\sum_{k=p}^{+\infty} a_k \sin(kt)\right| \leq \epsilon$$

Soit alors t tel que $2\pi/t \geq N$: il y a un $q \geq N$ tel que $q \leq 2\pi/t \leq q+1$. Mais on a alors

$$\left|\sum_{k=q+1}^{+\infty} a_k \sin(kt)\right| \leq \epsilon$$

par ce qui précède. Et si $p \leq N \leq q$,

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k \sin(kt)\right| \leq |t| \sum_{k=p}^{q} k a_k \leq \frac{2\pi}{q} \sum_{k=p}^{q} k a_k \leq 2\pi\epsilon$$

Ce qui permet de conclure !

Oral 41. (**Centrale**)

1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$?
2. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$?

---

1. Le changement de variable $t = u^2$ ne change pas la nature de l'intégrale ($u \mapsto u^2$ est une bijection C^1 de $]0, +\infty[$ sur lui-même) et donc la nature est celle de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$
qui est pour le moins classique.
2. Si $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t}$, on peut écrire
$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) &= \int_n^{n+1} \left(f(t) - f(n)\right)\mathrm{d}t\\ &= \left[(t-(n+1))(f(t)-f(n)\right]_{t=n}^{t=n+1} + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Calculons
$$f'(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \cos(\sqrt{t}) - \frac{1}{t^2}\sin(\sqrt{t})$$
Donc f' est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc
$$t \longmapsto (\lfloor t\rfloor + 1 - t)f'(t)$$
l'est, et on en déduit la convergence de la série de celle de l'intégrale.

Oral 42. (Centrale et Mines)
Soit $f \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

1. Montrer que si ff' admet une limite (éventuellement infinie) non nulle en $+\infty$ alors f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. On suppose f^2 et $(f'')^2$ intégrables sur $\mathbf{R}$. Montrer que f'^2 l'est aussi et que l'on a
$$\left(\int_{\mathbf{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbf{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbf{R}} f''^2\right)$$
Montrer que f est unifomément continue et tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

---

1. Inégalité d'accroissements finis.
2. Par parties, si $a < b$,
$$\int_a^b f'^2 = [ff']_a^b - \int_a^b ff''$$
Par le fait que $|ff''| \leq \dfrac{1}{2}(f^2 + f''^2)$, ff'' est intégrable sur $\mathbf{R}$.
Le crochet a donc une limite quand $b \to +\infty$, qui ne peut être que 0 sinon la question précédente interdirait l'intégrabilité de f^2. On fait la même chose avec a, et il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a ensuite, si $y < x$,
$$|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |f'| \leq \sqrt{y-x}\,\sqrt{\int_x^y f'^2}$$
(avec Cauchy-Schwarz de nouveau)et de l'inégalité qui en résulte :
$$|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{y-x}\,\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2}$$
on tire l'uniforme continuité. De plus $(f^2)' = 2ff'$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ comme produit de deux fonctions de carré intégrable. A fortiori son intégrale est convergente, donc f^2 a une limite en $\pm\infty$. Si cette limite était non nulle, comment serait-elle intégrable…

Oral 43. (Mines)
Soit $n \in \mathbf{N}_*$.

1. Montrer que si A et B sont dans $S_n^+(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.
2. Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}$ telles que $\forall S \in S_n^+(\mathbf{R}) \quad \mathrm{Tr}(MS) \geq 0$.

---

1. Le théorème spectral permet de trouver une matrice $A' \in S_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = A'^2$. Et on montre que $A'BA' \in S_n^+(\mathbf{R})$. Ou alors, on prend aussi une racine carrée B' de B, et
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A'B'B'A') = \mathrm{Tr}\left((B'A')^T B'A'\right)$$
ce qui conclut.
2. Si $M = U + V$ est la décomposition de M en somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique, on remarque que $\mathrm{Tr}(VS) = 0$ si S est symétrique. Si V est symétrique non positive, il existe S symétrique positive telle que $\mathrm{Tr}(VS) < 0$ (prendre le cas où V est diagonale avec une valeur propre strictement négative), on en déduit que les matrices cherchées sont celles qui s'écrivent comme somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice symétrique positive.

Oral 44. (Mines)

1. Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer l'existence de $P, Q \in O_n(\mathbf{R})$ et de D diagonale à coefficients positifs telles que $A = PDQ$.
2. Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien et $u \in GL(E)$. Montrer l'existence d'une base orthonormée de E dont l'image par u est une base orthogonale de E.

---

1. Analyse : si $A = PDQ$ alors $A^T A = Q^T D^2 Q$. Synthèse : des Q et D convenables vérifient cela car $A^T A$ est symétrique définie positive. On est obligé de poser alors $P = AQ^T D^{-1}$. Et alors

   $$P^T P = D^{-1} Q A^T A Q^T D^{-1} = I_n$$

   et ça marche.
2. Soit A la matrice de u dans une base B orthonormée, $A = PDQ$ comme ci-dessus. Donc

   $$AQ^T = PD$$

   Autrement dit, si ϕ est l'endomorphisme dont la matrice dans la base B est Q^T, $M_B(u \circ \phi) = PD$. Les colonnes de PD sont donc les composantes dans B des images par $u \circ \phi$ des vecteurs de B. On en déduit que ces images sont deux à deux orthogonales. La base $\phi(B)$ convient donc.

Oral 45. (X)

1. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Montrer, si $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$, que $P(X \geq E(X) + \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{V(X) + \lambda^2}$.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant un moment d'ordre 2. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, $E(X_n) = 0$ et $V(X_n) \leq 1$. On pose $N = \min\{n \in \mathbf{N}_* \ ; \ X_n \leq 1\}$. Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in]0, \ln 2[$.

---

1. Pas facile, cette inégalité...Commençons par centrer X : on peut supposer $E(X) = 0$ quitte à remplacer X par $Y = X - E(X)$, ce qui ne change pas la variance. On peut aussi diviser X par $\sqrt{V(X)}$ pour se ramener à une variable de variance 1, mais cela n'apporte pas grand chose. On doit donc montrer $P(X \geq \lambda) \leq \dfrac{E(X^2)}{E(X^2) + \lambda^2}$.
   Vu les carrés du second membre, on peut essayer
   $$P(X \geq \lambda) \leq P(X^2 \geq \lambda^2)$$
   puis utiliser Markov ; cela revient à faire du Bienaymé-Tchebychev, et on voit que ça ne suffit pas. Ce n'est pas si étonnant :
   $$(X^2 \geq \lambda^2) = (X \geq \lambda) \cup (X \leq -\lambda)$$
   et donc la majoration précédente manque de finesse : elle est en quelque sorte deux fois trop grossière. Une idée pourrait être de décaler :
   $$(X \geq \lambda) = (X + a \geq a + \lambda) \subset \left((X + a)^2 \geq (a + \lambda)^2\right)$$
   si $a + \lambda > 0$. Donc
   $$P(X \geq \lambda) \leq P\left((X + a)^2 \geq (a + \lambda)^2\right) \leq \frac{E\left((X + a)^2\right)}{(a + \lambda)^2}$$
   Essayons d'optimiser : cherchons a pour lequel le majorant est minimal. Ce majorant est
   $$\phi(a) = \frac{E(X^2) + a^2}{(a + \lambda)^2}$$
   dont la dérivée est
   $$\phi'(a) = \frac{2a(a + \lambda) - 2\left(E(X^2) + a^2\right)}{(a + \lambda)^3}$$
   qui s'annule pour $a = \dfrac{E(X^2)}{\lambda}$. Cette valeur est bien un réel strictement positif, et le majorant est alors (inutile de vérifier si c'est bien un minimum : on regarde, on voit si ça marche !)
   $$M = \frac{\lambda^2 E(X^2) + E(X^2)^2}{(E(X^2) + \lambda^2)^2} = \frac{E(X^2)}{\lambda^2 + E(X^2)}$$

qui est bien ce qu'on cherchait à obtenir.

2. Vu sa définition, ce qui est le plus simple à calculer pour N est $P(N \geq n)$; en effet, par mutuelle indépendance

$$P(N \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k > 1)$$

Mais on vient de voir que $P(X_k > 1) \leq \frac{V(X_k)}{1+V(X_k)} \leq \frac{1}{2}$. Donc $P(N \geq n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Il est bon maintenant de se souvenir d'une formule célèbre, sous la forme affaiblie suivante : si Y est une variable à valeurs dans $\mathbf{N}$, si $\sum P(Y \geq k)$ converge, alors $E(Y) < +\infty$. C'est un exercice de sommabilité classique, ce n'est pas du cours, mais bon, c'est un oral X. De plus, il est facile de constater que, si Y est une variable à valeurs réelle positives, $E(Y) < +\infty$ équivaut à $E(\lfloor Y \rfloor) < +\infty$ (encadrement). On s'intéresse alors à $Y = e^{aN}$. Pour n entier naturel (non nul, on peut de toute façon le supposer aussi grand qu'on veut)

$$\begin{aligned}
P(\lfloor e^{aN} \rfloor \geq n) &= P(e^{aN} \geq n) \\
&= P(N \geq \frac{1}{a}\ln n) \\
&= P\left(N \geq \left\lfloor \frac{1}{a}\ln n \right\rfloor\right) \\
&\leq \frac{2}{2^{\left\lfloor \frac{1}{a}\ln n \right\rfloor}}
\end{aligned}$$

Notons $u_n = 2^{-\left\lfloor \frac{1}{a}\ln n \right\rfloor}$. Alors $0 \leq u_n \leq 2 \times 2^{-\frac{1}{a}\ln n}$ Mais

$$2^{-\frac{1}{a}\ln n} = e^{-\frac{1}{a}\ln n \ \ln 2} = n^{-\frac{1}{a}\ln 2}$$

On conclut avec Riemann.

Oral 46. (Mines)
On pose $d_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}_*$, on note d_n le nombre de dérangements (permutations n'ayant aucun point fixe) de $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Quel est le nombre moyen de points fixes de $\sigma \in S_n$?
2. (a) Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$

   (b) En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

   (c) Montrer que le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ admettant exactement p points fixes est $\displaystyle\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$. En déduire que

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!} = 1$$

---

1. On munit S_n de la probabilité uniforme. On note X_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'évènement $(\sigma(i) = i)$. X_i suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/n)$ (dénombrer les permutations qui fixent i n'est pas difficile). Le nombre de points fixes est $X_1 + \cdots + X_n$. Le nombre moyen est l'espérance, soit 1.

   (a) On classe les permutations suivant leur nombre de points fixes.

   (b) Donc $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{d_k}{k!}$. Utilisons la somme de séries entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$ de rayon de convergence ≥ 1. Sur $D(0,1)$ on a (produit de Cauchy) $e^z f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Et donc $f(z) = \dfrac{1}{1-z} e^{-z}$. Qu'il suffit d'interpréter comme un produit de Cauchy.

   (c) Le nombre cherché est $\displaystyle\binom{n}{p} d_{n-p}$. Le "en déduire" résulte d'un calcul direct du nombre moyen de points fixes, et du résultat de la question 1.

Oral 47. (**Mines**)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ et ayant un moment d'ordre 2 non nul. Soit $a \in]0,1[$. Montrer $X \leq a\mathbf{E}(X) + X\mathbf{1}_{X \geq a\mathbf{E}(X)}$. En déduire

$$\mathbf{P}\left(X \geq a\mathbf{E}(X)\right) \geq \frac{(1-a)^2 \left(\mathbf{E}(X)\right)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$$

C'est l'inégalité de Paley-Zygmund. L'idée est de partir de

$$(1-a)\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{(X \geq a\mathbf{E}(X))}\right)$$

que l'on obtient en écrivant

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{(X \geq a\mathbf{E}(X))}\right) + \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{(X < a\mathbf{E}(X))}\right)$$

Puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Oral 48. (**Mines**)
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Calculer les espérances de $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_1, X_2)$.

Posant $Y = \min(X_1, X_2)$, le calcul de $P(Y \geq n)$ est simple et mène au fait que Y suit une loi géométrique. Pour le max, noté Z, on calcule plutôt $P(Z \leq n)$. On obtient la loi, puis l'espérance, de façon un peu moins simple.

Oral 49. (**Mines**)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbf{R}_*^+$. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$.

On peut écrire $\sqrt{\dfrac{X}{Y}} \times \sqrt{\dfrac{Y}{X}} = 1$, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On peut aussi partir de $\mathbf{E}(X/Y) = \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}(1/Y)$. Il s'agit alors de montrer que $\mathbf{E}(1/Y) \geq 1/\mathbf{E}(Y)$ ou encore que $\mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(1/Y) \geq 1$, Cauchy-Schwarz est alors plus naturel.

Oral 50. (**Mines**)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que $V(X) \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Commençons par $a = -1$, $b = 1$. C'est alors une simple conséquence de $V(X) \leq \mathbf{E}(X^2)$. Par transformation affine on se ramène à ce cas : en effet, $Y = \dfrac{X - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}$ est à valeurs dans $[-1, 1]$. La propriété $\mathbf{V}(\alpha Y + \beta) = \alpha^2 \mathbf{V}(Y)$ fait le reste.

Oral 51. (PLSR)

1. Soit x un réel et Q un entier strictement positif. Montrer qu'il existe des entiers p et q tels que $1 \leq q \leq Q$ et $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{qQ}$.
2. Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire et irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$, de degré $n \geq 2$. Soit x une racine de P. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout rationnel $r = p/q$ écrit sous forme irréductible, on ait $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{c}{q^n}$.

Les deux questions sont indépendantes ; dans la deuxième, on n'utilise que le fait pour P d'être dans $\mathbf{Z}[X]$ et de n'avoir pas de racine rationnelle, on n'utilise pas complétement l'irréductibilité.

---

1. L'inégalité proposée équivaut à $|qx - p| \leq \dfrac{1}{Q}$. Si $qx \in \left[\lfloor qx \rfloor, \lfloor qx \rfloor + \dfrac{1}{Q}\right]$, q convient (pour q quelconque dans $[\![1, Q]\!]$). Sinon, pour tout $q \in [\![1, Q]\!]$, il y a un $k_q \in [\![1, Q-1]\!]$ tel que $qx \in \left[\lfloor qx \rfloor + \dfrac{k_q}{Q}, \lfloor qx \rfloor + \dfrac{1+k_q}{Q}\right]$. Il existe donc $q < q'$ entre 1 et Q tels que $k_q = k_{q'}$. Mais alors

$$|q'x - \lfloor q'x \rfloor - (qx - \lfloor qx \rfloor)| \leq \frac{1}{Q}$$

Ce qui permet de conclure.

2. L'idée non évidente est de dire, sur par exemple le segment $[x-1, x+1]$, confondant polynôme et fonction polynôme associée :

$$|P(x) - P(p/q)| \leq M|x - p/q|$$

où M majore $|P'|$ sur $[x-1, x+1]$. Or P n'a pas p/q pour racine, et est à coefficients entiers, et est de degré n, donc $|P(p/q)| \geq 1/q^n$. Pour $p/q \notin [x-1, x+1]$, c'est facile de trouver une constante (1 convient), on prend la plus petite des deux.

Oral 52. (PLSR) On admet qu'il existe $\phi \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ égale à 1 sur $[-1/2,1/2]$ et à 0 en-dehors de $[-1,1]$. Soit $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On cherche $f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $g_n \ : \ x \mapsto \dfrac{a_n}{n!} x^n \phi(x)$ et $f_n \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{\lambda_n^n} g_n(\lambda_n x)$ avec $\lambda_n \geq 1$ à fixer. Soit $h = \sum f_n$. Montrer qu'on peut choisir les λ_n pour que h convienne.

Déjà, les f_n seront par opérations de classe C^∞. Supposons que l'on puisse dériver terme à terme ; il serait bien de connaître alors les dérivées successives de chaque f_n et, partant, de chaque g_n. Si l'on s'intéresse d'abord à ce qui se passe en 0, notons que toutes les dérivées de ϕ sont nulles en 0, mais que ϕ ne l'est pas, et que toutes les dérivées de $x \mapsto x^n$ sont nulles en 0 sauf la dérivée $n$ième qui vaut $n!$. Donc, par formule de Leibniz, $g_n^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq n$, $g_n^{(n)}(0) = a_n$. Il en est par conséquent de même pour f_n, ce qui fait que la seule chose qui reste à assurer, par un bon choix des λ_n, est la possibilité de dériver sous le signe $\sum$.
Pour cela, écrivons donc la formule de Leibniz, pour tout $k \leq n$:

$$g_n^{(k)} \ : \ x \mapsto \frac{a_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} \phi^{(k-j)}(x)$$

et, si $k > n$,

$$g_n^{(k)} \ : \ x \mapsto \frac{a_n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} \phi^{(k-j)}(x)$$

Enfin,

$$f_n^{(k)} \ : \ x \mapsto \frac{\lambda_n^k}{\lambda_n^n} g_n^{(k)}(\lambda_n x)$$

Notons que $f_n^{(k)}(x) = 0$ si $|x| \geq 1/\lambda_n$. Chaque $|\phi^{(k)}|$ est majorée par M_k, et donc, si $n > k$, si $|x| \leq 1/\lambda_n$,

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda_n^{n-k}} \frac{|a_n|}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} M_{k-j}$$

ou en simplifiant un peu, et en majorant tous les M_{k-j}, $0 \leq j \leq k$ par un μ_k (le plus grand de ces nombres) :

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \mu_k \frac{|a_n|}{\lambda_n^{n-k}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{1}{(n-j)!} \leq \frac{2^k \mu_k |a_n|}{(n-k)! \lambda_n^{n-k}}$$

Si on prend $|\lambda_n| \geq |a_n|$ (et aussi bien sûr $|\lambda_n| \geq 1$), c'est bon.

Oral 53. (Mines)
Soit p un nombre premier, $q=(p^2-p)(p^2-1)$ et $A \in M_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

1. Quel est le cardinal de $GL_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?
2. Montrer que $A^{q+2}=A^2$.
3. Quel est le cardinal de $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?
4. Quel est le cardinal de $SL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$?

---

1. C'est q : compter les colonnes non nulles, compter les colonnes non liées avec une colonne donnée.
2. Donc, pour une matrice inversible, $A^q = I_2$ (ordre d'un élément dans un groupe). Sinon, par Cayley-Hamilton, $A^2 = \alpha A$ avec $\alpha = \mathrm{Tr}(A)$. Si $\mathrm{Tr}(A)=0$, pas de problème. Sinon, A est diagonalisable (peut-être l'examinateur prendra-t-il la peine de dire que les résultats sur la réduction sont valables sur ce corps), et avec le petit théorème de Fermat on conclut facilement.
3. Calcul du même genre que la première question. On trouve $(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1})$.
4. Par multilnéarité du déterminant, on crée une bijection (multiplication de la dernière colonne par un élément de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$) de $SL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sur l'ensemble des matrices dont le déterminant vaut une valeur donnée. Donc il suffit de diviser le cardinal précédent par $p-1$.

Oral 54. (Mines)
Soit $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et S l'ensemble des solutions de $y'' + fy = 0$. On suppose f intégrable sur $\mathbf{R}$.

1. Soient $y_1, y_2 \in S$ et $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Que peut-on dire de w ?
2. Montrer que S contient des fonctions non bornées.

---

w est constant. Si y_1 et y_2 sont bornées, y_1'' et y_2'' sont intégrables, donc a fortiori y_1' et y_2' ont des limites réelles en $+\infty$. Une telle limite ne peut être que nulle, sinon y_1 et y_2 ne seraient pas bornées. Donc $w = 0$, et donc il y a au plus une droite vectorielle de solutions bornées.

Oral 55. (Mines)
Soient $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ \sin(xy) \neq -1\}$, $V = U \setminus \{(x, y) \in U \ ; \ xy = 0\}$, f la fonction de U sur $\mathbf{R}$ égale à 1 sur V et telle que

$$\forall (x, y) \in U \setminus V \quad f(x, y) = \frac{\ln(1 + \sin(xy))}{xy}$$

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et représenter U.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur U.

On représente avec soin les hyperboles d'équation $xy = -\pi/2$, $xt = 3\pi/2$, on en déduit l'allure des autres. Pas si facile, on ne fait jamais ça ! Image réciproque d'un ouvert par une application continue, U est ouvert. La fonction

$$\phi \ : \ u \longmapsto \frac{\ln(1 + u)}{u}$$

est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ une fois prolongée par la valeur 1 en 0, car développable en série entière. Comme elle est C^∞ sur $]0, +\infty[$ par opérations, elle est C^∞ sur $]-1, +\infty[$. Et donc $\phi \circ \sin$ est C^∞ sur $\mathbf{R} \setminus \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$. La fonction $u \longmapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ donc de classe C^∞. Par produit, la fonction

$$h \ : \ v \longmapsto \frac{\ln(1 + \sin v)}{v}$$

est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \setminus \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$. La fonction donnée est $(x, y) \mapsto h(xy)$ dont il n'est alors plus difficile du tout de voir qu'elle est C^∞ sur U, finalement c'est plutôt un exercice sur les fonctions d'une seule variable !

Oral 56. (Mines)
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Déterminer les fonctions de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telles que $a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Prenons ça de haut : avec le changement de variable linéaire

$$u = \alpha x + \beta y \qquad , \qquad v = \gamma x + \delta y$$

dont on suppose qu'il est un isomorphisme ($\alpha\delta - \beta\gamma = 0$) on définit une nouvelle fonction, énigmatiquement par

$$g(u,v) = f(x,y)$$

mais plus clairement par $f = g \circ \phi$, $g = f \circ \phi^{-1}$ avec $\phi(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$. Notant $\phi^{-1}(u,v) = (\alpha' u + \beta' v, \gamma' u + \delta' v)$ on obtient

$$g(u,v) = f(\alpha' u + \beta' v, \gamma' u + \delta' v)$$

donc

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \alpha' \frac{\partial f}{\partial x}(.) + \gamma' \frac{\partial f}{\partial y}(.)$$

en abrégeant $(.) = (\alpha' u + \beta' v, \gamma' u + \delta' v)$. On fixe $(\alpha', \gamma') = (a,b)$, et par exemple $(\delta', \beta') = (a, -b)$, on obtient que les fonctions cherchées sont les $g\ :\ (u,v) \mapsto h(v)$ avec h C^1. Et on revient vers les fonctions $f\ :\ (x,y) \mapsto k(bx - ay)$, k fonction de classe C^1.

Oral 57. (**Centrale avec Python**)

Pour $n \in \mathbf{N}_*$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et l'on note $H_n = \frac{A_n}{B_n}$ avec $A_n \wedge B_n = 1$. On souhaite étudier la propriété (P) : « pour tout p premier ≥ 5 on a $p^2 | A_{p-1}$ ».

1. (a) Ecrire une fonction `pgcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers.
   (b) Déterminer, en fonction d'un pgcd et de A_{k-1}, B_{k-1} les expressions de A_k et B_k.
   (c) Ecrire une fonction qui calcule A_n pour un n donné. Calculer A_{16}.
   (d) Vérifier la propriété (P) jusqu'à 500.
   On pourra utiliser `sympy.primerange` ou `sympy.nextprime`.
2. Montrer le théorème de Wilson : p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1\ [p]$.
   On considère désormais un nombre premier $p \geq 5$.
3. Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on pose $a_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$. Exprimer $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ en fonction de H_{p-1}. En déduire que p divise A_{p-1}.
4. Montrer que $k^2 a_k \equiv 1\ [p]$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$. En déduire que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ et conclure.

---

1. On a $\frac{A_k}{B_k} = \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \frac{1}{k} = \frac{kA_{k-1} + B_{k-1}}{kB_{k-1}}$. Donc, notant $D_{k-1} = \mathrm{PGCD}(kA_{k-1} + B_{k-1}, kB_{k-1})$, on a $A_k = \frac{kA_{k-1} + B_{k-1}}{D_{k-1}}$, $B_k = \frac{kB_{k-1}}{D_{k-1}}$.
2. Dans le produit des éléments de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^*$ on regroupe chaque éléments avec son inverse, seuls $\overline{1}$ et $\overline{-1}$ restent tous seuls. Dans le sens réciproque, $(p-1)! + 1 = kp$ est une identité de Bezout entre p et chaque entier de $[\![1, p-1]\!]$.
3. On écrit
   $$a_k = \frac{(p-1)!}{p} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} \right)$$
   d'où l'on tire
   $$\sum_{k=1}^{p-1} a_k = 2 \frac{(p-1)!}{p} H_{p-1}$$
   Mais les a_k sont entiers (sauf si $k = p-k$, i.e. p pair, rare pour un nombre premier). Donc p divise $(p-1)! \times 2 \times A_{p-1}$. Or p est premier avec 2 et avec $(p-1)!$, donc (Gauss) p divise A_{p-1}.
4. Commençons par remarquer que $k^2 a_k = k \frac{(p-1)!}{p-k}$.
   Donc $(p-k)k^2 a_k \equiv -k[p]$ (Wilson). Ce qui donne $-k^3 a_k \equiv -k[p]$. On

peut simplifier la congruence par k qui est premier avec p. On obtient bien ce qu'on voulait. Passons alors dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \overline{a_k} = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\overline{k}^{-1}\right)^2 = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\overline{j}\right)^2$$

Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} j^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$. Ce qui donne la conclusion.