CCP 8pts : quelques remarques

2. Le corrigé de 1. est un peu elliptique. On commence par écrire la décomposition (la partie entière est nulle car le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur) :

$$\frac{3x+7}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

on multiplie par $(x+1)^2$, on évalue en -1, on obtient $b = 4$. On multiplie par x, on regarde la limite en $+\infty$, on obtient $a = 3$. On peut vérifier en prenant $x = 0$.
Pour le 2. il vaut mieux appliquer la méthode du corrigé à cause du « en déduire ».
Bien entendu, on peut aussi partir du DSE de $1/(1+x)$, le dériver, multiplier par $3x$ et réindexer, ajouter le produit par 7...
S'entraîner à faire les calculs du 3. : pas difficile, mais pas amusant, et il faut être efficace au tableau.

4. 1. Il s'agit bien du théorème (qui n'est pas très utile) et pas de l'inégalité (qui au contraire est très utile). Donc on est dans le cas d'une fonction réelle, avec des hypothèses « type théorème de Rolle ».

9. Le « ou encore » n'est pas terrible : il faudrait dire « à partir d'un certain rang $g_n - g$ est une fonction bornée, et... »
La solution donnée pour (d) est correcte, mais on peut être plus général : s'il y avait CU sur $]0,+\infty[$, avec la CS en 0, il y aurait CU sur $[0,+\infty[$. C'est important, parce que c'est ce qui explique que quand il y a convergence simple mais pas uniforme sur $[0,+\infty[$, il est inutile d'espérer une convergence uniforme sur $]0,+\infty[$ (en pratique, on ne se contente pas de se séparer de 0, on prend une marge de sécurité).
Démontrons que

$$\left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur }]0,+\infty[\quad \text{et} \quad f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)\right) \Rightarrow \left(f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur } [0,+\infty[\right)$$

Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe :

N_1 tel que $\forall n \geq N_1 \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \epsilon$

…et N_2 tel que $\forall n \geq N_2 \quad \left|f_n(0) - f(0)\right| \leq \epsilon$

Et alors :

$\forall n \geq \max(N_1, N_2) \quad \forall x \in [0, +\infty[\quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \epsilon.$

On a ainsi une solution de (d) qui a le mérite de ne pas être astucieuse.

10. Bien savoir dire que la convergence uniforme ne permet l'interversion limite/intégrale que parce qu'on est sur un segment. Si on n'était pas sur un segment, la convergence uniforme ne serait ni nécessaire ni suffisante pour pouvoir intervertir.

11. Bien comprendre le choix de la suite (x_n), qui repose sur l'idée suivante : si nx_n est constant, $n^2 x_n^2$ aussi, $f_n(x_n)$ ne bouge pas et ne se rapproche donc pas de 0. On peut donc prendre $x_n = \pi/(2n)$ comme dans l'énoncé, mais aussi bien $x_n = \pi/(4n)$, etc…(pas π/n quand même…).

12. Le 1 est du cours, mais pas évident, bien vérifier qu'on sait l'écrire.

14. On peut abréger un peu le 2, à l'oral. Pour le 3, bien savoir dire qu'une série entière converge uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, pas sur l'intervalle ouvert de convergence lui-même en général.

17. Le choix de x_n à la fin de l'exercice est très proche de celui de l'exercice 11 : cette fois, c'est $x\sqrt{n}$ qu'on rend constant, ce qui rend aussi constant nx^2.

20. Il n'est pas dit pourquoi la suite $(\cos n)$ ne tend pas vers 0. On peut développer $\cos(n+1)$, ou mieux :

$$\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$$

et donc, si $(\cos n)$ tend vers 0, on a $-1 = 0$…

23. Dans le 1, on peut citer le nom de D'Alembert.

31. La méthode la plus sûre pour linéariser, quand on n'est pas trop fan de trigonométrie, c'est

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4$$

puis on développe (binôme) et on regroupe. Par trigonométrie, c'est quand même faisable, avec la formule

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$$

appliquée deux fois.

33. Noter $\rho = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ rend les choses plus éloquentes me semble-t-il. C'est un détail.

34. 2. C'est un petit peu plus simple de raisonner en termes de boules que de voisinages. Il faut savoir que les voisinages n'ont guère d'utilité pratique.

37. 1.c. Il vaut mieux probablement raisonner de manière plus élémentaire. On a

$$N_1 \leq N_\infty$$

Donc, si $a \in E$, si $r > 0$, pour tout $x \in E$,

$$N_\infty(x-a) < r \implies N_1(x-a) < r$$

Et donc

$$B_\infty(a,r) \subset B_1(a,r)$$

(on remarquera, ce qui peut être troublant si on n'y a pas réfléchi, que l'inégalité entre les normes se traduit par une inclusion « en sens inverse » entre les boules). Si Ω est un ouvert de (E,N_1), pour tout $a \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B_1(a,r) \subset \Omega$. A fortiori $B_\infty(a,r) \subset \Omega$. Et donc Ω est un ouvert de (E,N_∞).
2. Penser à faire un dessin.

38. 1. Le problème de l'indication est qu'on ne sait pas pourquoi on choisit ce genre de fonction. L'idée est d'avoir une suite de fonctions qui concentrent leur intégrale au voisinage de 0. Exercice long.

39. 3. F est l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang.

41. Le terme « multiplicateur de Lagrange » est hors programme et est un peu prétentieux ici.

43. Corrigé biscornu et décalé : l'énoncé demande de discuter en fonction de x_0, pas en fonction du signe de $u_1 - u_0$. Faire un dessin (important, dans cet exercice) pour le 1. Il est plus naturel alors d'étudier les variations de $x \longmapsto x - \text{Arctan}\, x$ sur $[0, +\infty[$: elle croît strictement et vaut 0 en 0. On envisage alors le cas $x_0 > 0$. Comme $]0, +\infty[$ est stable par Arctan, la suite (u_n) est à valeurs dans $]0, +\infty[$. Par les variations ci-dessus, on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} < u_n$$

La suite est décroissante minorée par 0, converge donc vers $\ell \geq 0$, et par continuité de Arctan on a $\ell = \text{Arctan}(\ell)$ ce qui donne $\ell = 0$ par les variations précédentes.
Si $x_0 < 0$, la suite $(-u_n)$ relève du cas précédent.
Si $x_0 = 0$, la suite est nulle.

45. Remarque : 2.a. est une équivalence.

46. L'écriture « $\sum \text{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge est un peu inélégante. Il vaut mieux dire que si $w_n = \text{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\sum w_n$ converge.

48. 2.b. Donc, d'après le théorème d'intégration. . . . . .**sur un segment** (sur un intervalle qui n'est pas un segment, la convergence uniforme n'est ni nécessaire ni suffisante pour intervertir).

2.c. On peut se passer de la lourde explicitation indexée de P_n. Il suffit de dire « par combinaison linéaire », plus efficace. . .

50. Par changement de variable $u = x + t$, $t = u - x$, l'intégrale a même nature et, en cas de convergence, même valeur que

$$e^{2x}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-2u}}{u}\mathrm{d}u$$

La fonction $u \longmapsto e^{-u}/u$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$, intégrable sur $[x, +\infty[$ par comparaison à une fonction de Riemann :

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

D'où la définition. On sait que $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-2u}}{u}\mathrm{d}u$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (de dérivée $x \mapsto -e^{-2x}/x$), a fortiori continue.
Pour la limite de $xF(x)$, mieux vaut en revanche la solution du corrigé (on peut, sinon, faire une intégration par parties et une intégration des relations de comparaison, mais c'est plus technique).

52 2.a. La première équivalence serait plus agréablement remplacée par une simple implication (même si elle est exacte).
2.b. méthode alternative : poser $\rho = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ce qui utilise une technique plus générale, c'est donc préférable. C'est d'ailleurs ce qui est fait en 3.c.

55 1.b. « par construction » est une expression qu'on rencontre parfois, elle est un peu floue. La linéarité est sans difficulté, la bijectivité vient du principe de récurrence.

57 2. Voir remarque sur l'exercice 33.

62 1. Bien penser, comme dans le corrigé, à voir que l'inverse marche des deux côtés, on n'est pas en dimension finie.

65 1) Le calcul fait dans le corrigé est peu amusant. Je le ferais pour $Q = X^m$, $m \in \mathbf{N}$, ce qui rend les écritures plus digestes (on développe P comme dans le corrigé), puis

« par combinaison linéaire »...
3) ne pas oublier la formule, pour une matrice 2×2, $P_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.

69 Comme souvent, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre, la valeur propre associée étant $1+a$. On sait qu'on pourra mettre $X-1-a$ en facteur dans P_A. Et l'idée d'ajouter toutes les colonnes à l'une d'entre elles est donc non astucieuse.
Le corrigé oublie que pour $a=1$ la matrice est symétrique réelle...son auteur mérite d'être privé de dessert.

74 1(b) Si on regarde un peu la matrice, on voit qu'il est plus perspicace de développer par rapport à la deuxième ligne ou la deuxième colonne.
2) Exercice indigne : la diagonalisation du 1 est une méthode trop longue. La deuxième équation différentielle se résout toute seule, il reste à résoudre

$$x' = x+2z \qquad , \qquad z' = 2x+z$$

que l'on ajoute et retranche pour obtenir le système équivalent

$$(x+z)' = 3(x+z) \qquad , \qquad (x-z)' = -(x-z)$$

d'où

$$x(t)+z(t) = \alpha e^{3t} \quad , \quad x(t)-z(t) = \beta e^{-t}$$

et le résultat...Mais l'énoncé dit « en utilisant la question 1. »...

75 2) On peut choisir pour v_2 n'importe quel vecteur indépendant de v_1, simplement on n'aura pas $b=1$ en général.

82 Le résultat admis est le théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie. Pour la bilinéarité dans 1), on a le droit de remarquer que

$$(A|B) = \mathrm{Tr}\left(A^T\, B\right)$$

91 Comme d'habitude, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est propre, associé à la valeur propre 1, l'idée d'ajouter toutes les colonnes à une même pour calculer le polynôme caractéristique est donc naturelle.

95 2) En toute rigueur, il faudrait montrer que tirage simultané et tirage sans remise donnent les mêmes probabilités, mais aux CCP c'est systématiquement admis, ce qui n'est pas choquant.

98 binôme prend un accent circonflexe, binomiale non.

102 On peut trouver le résultat du 2. sans aucun calcul, en considérant l'expérience aléatoire de N parties de Pile ou Face simultanées.