Centrale oral math1

Quelques questions initiales.

1. Soit $\mathbf{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Soit q un entier ≥ 2 fixé. On pose

$$H_q = \{z \in \mathbf{C};\ \exists n \in \mathbf{N}\ z^{q^n} = 1\}$$

Montrer que H_q est un sous-groupe dense de $\mathbf{U}$.

$1 \in H_q$. Si $z^{q^n} = 1$ et $z'^{q^m} = 1$, alors en notant $u = \max(m, n)$, $(zz')^{q^u} = 1$. La stabilité par passage à l'inverse est simple. On peut aborder la densité en vérifiant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $z = e^{i\theta} \in H_q$ avec $0 < \theta < \epsilon$ (par exemple $\theta = 1/q^n$ avec n assez grand). Tous les z^m sont dans H_q et (faire un dessin) on en déduit assez facilement la densité, plutôt par les boules que par les suites.

---

2. Rappeler, pour tous $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, la définition de $P \circ Q$ et préciser le degré de ce polynôme.
Montrer que seuls les polynômes de degré 1 possèdent un inverse pour la loi $\circ$.

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} p_k X^k$, $P \circ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} p_k Q^k$. Si Q est constant le degré est 0 ou $-\infty$. Si Q n'est pas constant, en supposant $p_d \neq 0$, le degré vaut $\deg(P) \times \deg(Q)$. Formule donc à peu près toujours vraie, si P et Q non nuls.
On note que le neutre est X. Et que $\deg(P) \times \deg(Q) = 1$ impose $\deg(P) = \deg(Q) = 1$, la condition est donc nécessaire. Un calcul rapide montre qu'elle est bien suffisante.

---

3. Soit I un idéal de $\mathbf{Q}[X]$ distinct de $\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $I = \mu\mathbf{Q}[X]$.

---

4. Pour tous $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Montrer que $\mathrm{Tr}([A, B]) = 0$.

---

5. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $GL(E)$, $p = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} g$. Montrer que, si $h \in G$, $g \mapsto h \circ g$ est une bijection de G sur lui-même, puis que p est un projecteur.

Une fois montré la bijectivité en exhibant la réciproque (attention, ce n'est pas un morphisme), il est judicieux de faire le travail en deux étapes : d'abord montrer que $h \circ p = p$ pour tout $h \in G$, puis conclure $p \circ p = p$.

---

6. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in L(E)$. Calculer, en fonction de $\mathrm{Tr}(u)$ et $\mathrm{Tr}(u^2)$, les coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2} du polynôme caractéristique de u.

Passant à la matrice A associée dans une base quelconque et trigonalisant cette matrice sur $\mathbf{C}$, les valeurs propres étant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes), le coefficient de X^{n-2} vaut la fonction symétrique élémentaire

$$\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

qui est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)$$

qui vaut $\dfrac{1}{2}\Big((\mathrm{Tr}(u))^2 - \mathrm{Tr}(u^2)\Big)$.

---

7. Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.

---

8. Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

---

9. Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

---

10. Pour $A \in M_n(\mathbf{K})$, rappeler la définition des polynômes minimal π_A et caractéristique χ_A. Donner une condition nécessaire et suffisante sur π_A pour que A soit trigonalisable. Donner le définition et la dimension du sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ.

---

11. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. On pose $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de P'/P. En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{Sp}(A),\ \frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \mathrm{tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right)$$

En dérivant directement $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ ou, plus élégant, en remarquant que si l'on note $\Delta(P) = \dfrac{P'}{P}$ on a $\Delta(PQ) = \Delta(P) + \Delta(Q)$, on obtient

$$\frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda - k}$$

ce qui mène au résultat.

---

12. Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.

---

13. On note $GL_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers. Rappeler la définition de la comatrice. Montrer que $GL_n(\mathbf{Z})$ est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1

Si $AB = I_n$ avec A et B dans $M_n(\mathbf{Z})$, on a $\det(A) \times \det(B) = 1$, or si un produit d'entiers vaut 1, chaque entier vaut ± 1. La réciproque vient de l'expression de l'inverse avec la comatrice.

---

14. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable.

---

15. Montrer que $u \in L(\mathbf{C}^n)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

---

16. Soit $E = M_n(\mathbf{R})$, $A \in E$, $\Phi_A \ : \ M \in E \mapsto AM$. Déterminer la trace et le déterminant de Φ_A

On montre d'abord que si Q est un polynôme, $Q(\Phi_A) \ : \ M \mapsto Q(A)M$. On en déduit que Φ_A et A ont même polynôme minimal donc mêmes valeurs propres. Soit λ l'une d'entre elles :

$$\Phi_A(M) = \lambda M \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$

La dimension du sous-espace propre associé est donc $n \times \dim\left(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\right)$. Les valeurs propres sont les mêmes, les multiplicités sont multipliées par n. Si on est sur $\mathbf{C}$, on en déduit

$$\mathrm{Tr}(\Phi_A) = n\mathrm{Tr}(A) \qquad , \qquad \det(\Phi_A) = (\det(A))^n$$

Le détour par $\mathbf{C}$ (pour avoir un polynôme caractéristique scindé, et donc les relations classiques entre trace, déterminant et valeurs propres) ne change rien : si on écrit dans la bas canonique de $M_n(\mathbf{K})$ la matrice de Φ_A, quand A est réelle cette matrice est la même sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$.

---

17. Rappeler les définitions de morphisme de groupe et d'ordre d'un élément.

---

18. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs telle que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. Montrer que 1 est valeur propre de M puis que toute valeur propre λ complexe de M vérifie $|\lambda| \leq 1$.

---

19. Définir l'exponentielle d'une matrice de $M_n(\mathbf{C})$. Pour $P \in GL_n(\mathbf{C})$, montrer que

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$$

---

20. Justifier la définition de l'exponentielle de matrice. Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbf{R}$

---

21. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que, pour tout hyperplan H de E, il existe $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.

Evidemment on peut se demander ce qu'ici on appelle un hyperplan. Je dirais un espace de dimension $n - 1$ où $n = \dim(E)$.

---

22. Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et deux familles $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ d'éléments de E. On note respectivement A et B les matrices représentant les familles précédentes dans la base $\mathcal{B}$.

    (a) Exprimer les coordonnées et la norme d'un vecteur x de E à l'aide des éléments de B.

    (b) Exprimer les coefficients de A, B et $A^T B$ à l'aide de produits scalaires.

---

23. (a) Rappeler le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

    (b) Soit $M \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbf{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = OT$.

---

24. On note E l'ensemble des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Définir la notion de fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour $f, g \in E$, fg est intégrable et en déduire que E est un espace vectoriel.

---

25. Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que toutes les valeurs propres d'une isométrie vectorielle de E sont de module 1.

---

26. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on note $\omega(t) = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$. Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\omega(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

---

27. Montrer que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.

---

28. Montrer que $(O_n(\mathbf{R}), \times)$ est un groupe.

---

29. Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille n et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé.

    (a) Enoncer le théorème du rang.

    (b) On suppose que A est inversible. Montrer que n est pair.

(c) On suppose $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Quer dire de f^* ?

---

30. (a) Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive. Caractérisation à l'aide du spectre ?
    (b) Montrer que l'exponentielle définit une bijection continue de $S_n(\mathbf{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

---

31. (a) Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive. Caractérisation à l'aide du spectre ?
    (b) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$. Montrer son unicité. Indication : Considérer les sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Pour l'unicité, on pourra remarquer que si $\exp(A) = B$, alors $AB = BA$. Si de plus A et B sont diagonalisables, elles le sont simultanément, i.e. avec la même matrice de passage.

---

32. Soient E et F deux espaces euclidiens de dimensions respectives n et m.
    (a) Soit $u \in L(E, F)$. Montrer qu'il existe un unique $u^* \in L(F, E)$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E,\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E$.
    (b) Montrer que u^*u est autoadjoint positif.

---

33. Soit $s \in S^+(E)$. Montrer qu'il existe un unique $r \in S^+(E)$ tel que $s = r^2$.

---

34. (a) Soit $M \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer que $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbf{R}^+$.
    (b) Soit $M \in S_n(\mathbf{R}^+)$ c'est-à-dire symétrique à coefficients positifs. Est-ce que toutes les valeurs propres de M peuvent être strictement négatives ? Peut-on trouver M avec une unique valeur propre strictement positive ?

Toutes les vp strictement négatives, non (ne serait-ce qu'en regardant la trace). Une unique valeur propre > 0 oui, et c'est assez évident... mais l'interrogateur veut sans doute mieux, toutes les valeurs propres strictement négatives sauf une, ce qui peut se faire avec une matrice $\alpha I_n + \beta J$ bien choisie (avec $J = (1)$).

---

35. Soient $a < b$ des réels fixés. On munit l'espace $E = C^0([a,b],\mathbf{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. On fixe un entier naturel $n \geq 0$ et $f \in E$, et on pose $m = d(f, \mathbf{R}_n[X])$. On pose $C = \{g \in \mathbf{R}_n[X]\ ;\ \|f-g\|_\infty \leq m+1\}$. Montrer que C est compact et non vide. En déduire qu'il existe $p \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $m = \|f-p\|_\infty$.

---

36. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ soit convergente. La démontrer.

---

37. Soient E et E' deux espaces vectoriels normés et $u \in L(E,E')$. Montrer que u est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.

---

38. Rappeler le théorème de Weierstrass.

---

39. Enoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

L'énoncé le plus général est aussi le plus simple à établir : l'image continue d'un compact est un compact.

---

40. Rappeler le théorème de Heine.

---

41. Pour $A \in M_p(\mathbf{K})$ on pose $\|A\| = \displaystyle\max_{1\leq i\leq p}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|$. Montrer que $\|.\|$ est une norme et que, pour toutes $A, B \in M_p(\mathbf{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$.

---

42. Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbf{R}$. On note X une partie non vide minorée de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de X qui converge vers la borne inférieure de X. Réciproquement, prouver que si une suite de X converge vers un minorant m de X, alors m est la borne inférieure de X.

---

43. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ à coefficients dans $[-1,1]$.
    (a) Montrer la continuité du déterminant sur $M_n(\mathbf{R})$.
    (b) Montrer que le déterminant admet un maximum α sur $\mathcal{A}$.

---

44. Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont ses parties convexes.

---

45. Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

---

46. Comparaison série-intégrale. L'utiliser pour montrer $H_n \sim \ln n$ avec $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

---

47. Enoncer le théorème de Rolle. Soit $a, b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour f dérivable sur $]a, b[$ et admettant en a et b une même limite finie.

---

48. Démontrer le théorème des accroissements finis (on dit bien le théorème, pas l'inégalité).

---

49. Soit I intervalle non vide et $f \in C(I, \mathbf{R})$. Montrer que pour tout $a \in I$ l'application $F_a \ : \ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable, de dérivée f.

---

50. Enoncer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions.

---

51. Retrouver le développement en série entière de la fonction arctan et montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

---

52. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Donner $R > 0$ tel que

$$\forall x \in]-R, R[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Que vaut $\displaystyle\binom{\alpha}{n}$?

---

53. (a) Soit $\displaystyle\sum_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$.

(b) Est-ce que toute fonction de classe C^∞ sur un ouvert contenant 0 est développable en série entière au voisinage de 0 ?

---

54. (a) Rappeler le théorème de convergence dominée.
    (b) Montrer que $\Gamma \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbf{R}_*^+$.
    (c) Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Γ, ce n'est pas vraiment du cours, mais presque.

---

55. Rappeler la formule de Stirling.

---

56. Montrer que toute série numérique absolument convergente est convergente.

---

57. (a) Soit G un ensemble non vide. Rappeler les conditions sur la loi * pour que $(G,*)$ soit un groupe.
    (b) Rappeler la définition de la différentielle en un point. Faire le lien avec les dérivées partielles dans le cas C^1.

---

58. Soit $f \ : \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ différentiable. On suppose que f admet un extremum en $a \in \mathbf{R}^n$. Rappeler la valeur de $\nabla f(a)$ (avec démonstration).

---

59. Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $\min(X,Y)$.

---

60. La fonction de répartition de'une variable aléatoire F est $F_X \ : \ t \mapsto \mathbf{P}(X \leq t)$. Montrer que F_X est croissante de limite 1 en $+\infty$.

---

61. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}_*$, $X_i \sim \mathcal{P}\left(\dfrac{\alpha}{i}\right)$. Pour $n \in \mathbf{N}_*$, quelle est la loi de $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$?
