mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Algèbre bilinéaire - corrigés

Exercice 1 (**Projection orthogonale**). Montrer que

$$\inf\left\{\int_0^{+\infty}(x^3-ax^2-bx-c)^2e^{-2x}\ ;\ (a,b,c)\in\mathbf{R}^3\right\}$$

est atteint en un point unique, comment le déterminer ? (ne pas faire les calculs, donner seulement la manière de les faire...).

On définit par exemple, sur E espace vectoriel des fonctions polynômes réelles,

$$(f|g)=\int_0^{+\infty}e^{-2x}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Ce n'est pas la seule manière de présenter les choses : on peut aussi, sur l'espace des fonctions $x\mapsto e^{-x}f(x)$, où f est polynomiale, définir le produit scalaire

$$(f|g)=\int_0^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

On peut aussi se limiter aux polynômes de degré ≤ 3, ça suffit pour traiter l'énoncé.
Dans tous les cas, il faut commencer par justifier la bonne définition du produit scalaire. Ce qui se fait en disant par exemple que, si f et g sont polynomiales, par croissances comparées,

$$e^{-2x}f(x)g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'existence de l'intégrale par référence aux intégrales de Riemann. Les autres propriétés d'un produit scalaire sont assez évidemment vérifiées (mais dans un problème d'écrit, il faudrait bien sûr les énumérer).
Prenant la première définition, notant $e_k\ :\ x\mapsto x^k$, et $F=\mathrm{Vect}(e_0,e_1,e_2)$, on cherche

$$\inf\left\{\|e_3-f\|^2\ ;\ f\in F\right\}$$

qui est atteint en un point unique : $f=p_F(e_3)$ où p_F est la projection orthogonale sur F. Rappel : il faut toujours faire un dessin lorsqu'on doit examiner un problème de projection orhogonale.
On peut déterminer $p_F(e_3)$ en orthonormalisant, par la méthode de Schmidt, (e_0,e_1,e_2). C'est un peu long.

On peut aussi dire que $p_F(e_3)$ se caractérise par les propriétés suivantes :
$p_F(e_3)=\alpha_2e_2+\alpha_1e_1+\alpha_0e_0$
$(e_3-\alpha_2e_2+\alpha_1e_1+\alpha_0e_0|e_0)=0$
$(e_3-\alpha_2e_2+\alpha_1e_1+\alpha_0e_0|e_1)=0$
$(e_3-\alpha_2e_2+\alpha_1e_1+\alpha_0e_0|e_2)=0$
Les trois dernières conditions résumant : $e_3-p_F(e_3)\in F^\perp$. Ce qui donne un système de Cramer permettant de calculer $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$. Et par suite le minimum. C'est long, aussi, mais un peu moins.
Une méthode plus originale : on développe l'intégrale :

$$\inf\left\{\int_0^{+\infty}(x^3-ax^2-bx-c)^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^6e^{-2x}\mathrm{d}x+a^2\int_0^{+\infty}x^4e^{-2x}\mathrm{d}x+\dots\right.$$
$$-2a\int_0^{+\infty}x^5e^{-2x}\mathrm{d}x-\dots$$

(4 carrés, 6 doubles produits) ; on sait qu'il y a un minimum atteint sur $\mathbf{R}^3$. On écrit qu'en un point où il est atteint, les trois dérivées partielles sont nulles (point critique). On obtient les mêmes équations que précédemment.

Exercice 2 (Projection sur un convexe fermé).
On désigne par $\mathcal{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien E.

1. On suppose $\mathcal{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathcal{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que :
$$||x-y||=\inf_{z\in\mathcal{C}}||x-z||\quad(=d(x,\mathcal{C})).$$
2. On suppose seulement $\mathcal{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de $\mathcal{C}$; démontrer que
$$\Big(\ y=p(x)\ \Big)\iff\Big(\forall z\in\mathcal{C}\quad\langle y-x,y-z\rangle\leq 0\ \Big)$$
(pour $\Longrightarrow$, on remarquera que, si $z\in\mathcal{C}$, pour tout $t\in[0,1]$, $p(x)+t\big(z-p(x)\big)\in\mathcal{C}$).
4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :
$$||p(x)-p(x')||^2\leq\langle x-x',p(x)-p(x')\rangle$$
puis démontrer que p est continue.

---

1. **Existence :** Soit x fixé dans E. L'application $z\mapsto\|x-z\|$, continue sur le compact $\mathcal{C}$, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle atteint un minimum en un point $y\in\mathcal{C}$.

   Unicité : C'est nettement plus difficile, et il faut faire un dessin. Remarquons que l'existence ne suppose pas la norme euclidienne, on va en revanche en avoir besoin pour l'unicité.

Supposons que y_1 et y_2 soient deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, \mathcal{C})$$

L'identité du parallélogramme donne alors :

$$2(\|y_1 - x\|^2 + \|y_2 - x\|^2) = \|y_1 + y_2 - 2x\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2$$

(ce n'est qu'un dessin clair et bien observé qui peut donner l'idée d'écrire cela !) Divisons par 4 :

$$d(x, \mathcal{C})^2 = \|\frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x\|^2 + \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2$$

Mais, par convexité, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in \mathcal{C}$, donc $\|\frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x\|^2 \geq d(x, \mathcal{C})^2$, ce qui entraîne nécessairement $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, donc $y_1 = y_2$.
On peut écrire différentes choses menant à cette unicité, voir des triangles isocèles et des triangles rectangles plutôt que des parallélogrammes, utiliser Cauchy-Schwarz, etc...

2. **Existence :** On part de l'idée simple suivante : ce n'est pas parmi les points de $\mathcal{C}$ « éloignés » de x que l'on trouvera y. On considère donc encore x fixé dans E. Soit $r > 0$ tel que

$$B'(x, r) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$$

(l'existence d'un tel r ne pose pas de problème : on peut prendre $r = d(x, y)$ où y est un élément quelconque de $\mathcal{C}$). Posons alors $\mathcal{C}' = B'(x, r) \cap \mathcal{C}$. Fermée (comme intersection de fermés) et bornée (car incluse dans une boule) dans E de dimension finie, $\mathcal{C}'$ est compacte. Il existe donc $y_0 \in \mathcal{C}'$ tel que

$$\|x - y_0\| = d(x, \mathcal{C}')$$

Si $z \in \mathcal{C}$, de deux choses l'une :
— Soit $z \in \mathcal{C}'$, et alors $\|x - y_0\| \leq \|x - z\|$,
— Soit $z \in \mathcal{C}'$, et alors $\|x - y_0\| \leq r < \|x - z\|$
On voit que $\|x - y_0\|$ minore $\{\|x - z\| \ ; \ z \in \mathcal{C}\}$. Mais $y_0 \in \mathcal{C}$, donc

$$\|x - y_0\| = d(x, \mathcal{C})$$

Unicité : La démonstration du **1** marche encore : on n'a utilisé que la convexité de $\mathcal{C}$.

3. — Supposons que $y \in \mathcal{C}$ vérifie

$$\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z\rangle \leq 0$$

Alors, pour tout $z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
\|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, y - z\rangle \\
&\geq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\
&\geq \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $y = p(x)$.

— Supposons $y = p(x)$; soit $z \in \mathcal{C}$; par convexité, on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad (1-t)y + tz \in \mathcal{C}$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|(1-t)y + tz - x\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

ce qui s'écrit

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|(y-x) + t(z-y)\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

ou encore, en développant,

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|y-x\|^2 + t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geq \|y-x\|^2$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geq 0$$

d'où, en multipliant par $1/t$ si $t > 0$,

$$\forall t \in]0,1] \qquad t\|z-y\|^2 + 2\langle y-x, z-y\rangle \geq 0$$

et en prenant la limite quand $t \to 0$,

$$\langle y-x, z-y\rangle \geq 0$$

qui est bien ce qu'on voulait.

4. Partons du second membre :

$$\langle x-x', p(x)-p(x')\rangle = \langle x-p(x), p(x)-p(x')\rangle + \langle p(x)-p(x'), p(x)-p(x')\rangle + \langle p(x')-x', p(x)-p(x')\rangle$$

La question précédente permet de voir que $\langle x - p(x), p(x) - p(x')\rangle \geq 0$ et $\langle p(x') - x', p(x) - p(x')\rangle \geq 0$, on a donc bien

$$\langle x - x', p(x) - p(x')\rangle \geq \langle p(x) - p(x'), p(x) - p(x')\rangle$$

Donc, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p(x) - p(x')\|^2 \leq \|x - x'\| \, \|p(x) - p(x')\|$$

que l'on peut simplifier par $\|p(x) - p(x')\|$ s'il est > 0 pour obtenir que

$$\|p(x) - p(x')\| \leq \|x - x'\|$$

Mais c'est bien sûr encore vrai si $p(x) = p(x')$, on conclut donc que p est 1-lipschitzienne.

Exercice 3 (décomposition QR).

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que
$$A = QR$$
(on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).
2. En déduire l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1, \ldots, c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$, alors
$$|\det M| \leq ||c_1|| \ldots ||c_n||$$
(expliciter les coefficients diagonaux de R en reprenant l'interprétation de la question précédente en termes de matrices de passage). Peut-on avoir égalité ?

---

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{C}$ la famille des vecteurs colonnes de A (c'est une base car A est inversible), $\mathcal{D}$ une base de $\mathbf{R}^n$ obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de $\mathcal{C}$. Alors
$$A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$$
or $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ est orthogonale (passage d'une bas eorthonormale à une autre) et $P_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ est triangulaire supérieure (car, avec des notations évidentes, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}(c_1, \ldots, c_k) = \text{Vect}(d_1, \ldots, d_k)$).
2. L'indication entre parenthèses n'est pas forcément la meilleure. Remarquons donc d'abord que, si M n'est pas inversible, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc M inversible, et écrivons sa décomposition
$$M = QR$$
Si les colonnes de R sont notées $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, alors on a (c'est une manière intéressante de voir le produit matriciel !) $c_k = Q\gamma_k$ pour tout k et donc, pour tout k, Q étant orthogonale :
$$\|c_k\| = \|\gamma_k\|$$
(remarquons qu'on peut aussi obtenir ce résultat d'une autre manière : pour éliminer la matrice Q, on effectue le produit
$$A^t\ A = (QR)^t\ QR = R^t\ R\ .$$
Les coefficients diagonaux de la matrice $A^t\ A$ sont les carrés des normes (euclidiennes bien sûr) des colonnes de A, idem pour R.)
D'autre part, $|\det(A)| = |\det(R)| = \prod |r_{i,i}|$ et, pour tout i, $|r_{i,i}| \leq \|\gamma_i\|$ car
$$\|\gamma_i\|^2 = \sum_{k=1}^{i} r_{k,i}^2$$
Ce qui conclut.

Exercice 4 (étude d'une suite d'endomorphismes). Soit E un espace euclidien, u un automorphisme orthogonal de E, on définit $v = Id_E - u$.

1. Démontrer que $\ker v = (\operatorname{im} v)^{\perp}$.
2. On définit
$$P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$
Démontrer que $\big(P_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, pour tout élément x de E, vers la projection orthogonale de x sur $\ker v$.

---

1. Soit $x \in \mathrm{Ker} v$, $y \in \mathrm{Im}(v)$. Soit z tel que $y = v(z)$. Alors
$$(x|y) = (x|z - u(z)) = (x|z) - (x|u(z)) = (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0$$
(car $x = u(x)$). On en déduit que $\mathrm{Ker}(v) \perp \mathrm{Im}(v)$, i.e. $\mathrm{Ker}\, v \subset (\mathrm{Im}\, v)^{\perp}$, l'égalité résulte alors du thèorème du rang.
2. Ecrivons $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in (\mathrm{Ker}(v), \mathrm{Im}(v))$. On note que $x_1 = u(x_1)$, d'où par récurrence $x_1 = u^k(x_1)$ pour tout k, et donc $P_n(x_1) = x_1$ pour tout n. En revanche, si $x_2 = v(y_2) = y_2 - u(y_2)$,
$$P_n(x_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(y_2) - u^{k+1}(y_2)\right) = \frac{1}{n}\left(y_2 - u^n(y_2)\right)$$
Et donc
$$\|P_n(x_2)\| \leq \frac{1}{n}\left(\|y_2\| + \|u^n(y_2)\|\right) = \frac{2}{n}\|y_2\|$$
(car u conserve la norme euclidienne). Et on trouve bien
$$P_n(x) = P_n(x_1) + P_n(x_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_1$$

Exercice 5. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

Exercice 6. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Montrer que
(i) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+$
et (ii) $\forall x \in E \quad (x|u(x)) \geq 0$
sont équivalentes.

Exercice 7. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que
(i) $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbf{R}^+$
et (ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad {}^tXMX \geq 0$ sont équivalentes.

Exercice 8. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Montrer que

$$\max\left(\mathrm{Sp}(u)\right) = \max_{x \neq 0_E} \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$$

Enoncer ce résultat sous forme matricielle.

Le théorème spectral dit qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de u : pour tout i, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ où l'on peut supposer quitte à permuter les e_i : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. En décomposant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et donc

$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

Et il y a égalité lorsque, par exemple, $x = e_n$, ce qui conclut.

Matriciellement, si $A \in S_n(\mathbf{R})$,

$$\max\left(\mathrm{Sp}(A)\right) = \max_{X \neq (0)} \frac{X^t\ A\ X}{X^t\ X}$$

On a le droit de remplacer le numérateur par $\|X\|^2$ s'il est entendu qu'il s'agit bien de la norme euclidienne. Et aussi de remplacer l'indexation $X \neq (0)$ par, plus explicite : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{(0)\}$.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien, dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer que

$$\max\left(\mathrm{Sp}(u)\right) = \max_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Par quoi peut-on remplacer le premier membre si on ne fait plus l'hypothèse que les valeurs propres sont positives ?

Reprenant le préambule de l'exercice précédent, on suppose ici $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. On obtient alors

$$(u(x)|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n^2 \|x\|^2$$

avec les mêmes cas d'égalité, d'où la formule proposée en prenant les racines carrées. Si on ne suppose plus les valeurs propres positives, il est judicieux alors de les indexer de manière que $|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$ (i.e.on indexe par ordre de carrés croissant) et on trouve alors

$$\max\left(\{|\lambda|\ ;\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}\right) = \max_{x\neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Exercice 10 (Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

1. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{trace}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. On note $||.||$ la norme associée. Calculer la norme d'une matrice en fonction de ses coefficients.
3. Si A est une matrice symétrique, écrire $||A||$ en fonction des valeurs propres de A.
4. Quel est, pour ce produit scalaire, l'orthogonal de l'espace des matrices symétriques ?

Exercice 11 (Racine carrée). Montrer que toute matrice réelle symétrique positive est le carré d'une matrice réelle symétrique positive.

Rappelons que pour l'unicité, il est bien plus commode de considérer les endomorphismes canoniquement associés (on utilise la stabilité des sous-espaces propres d'un endomorphisme par les endomorphismes qui commutent avec lui).

Exercice 12 (exponentielle d'une matrice symétrique). Montrer que l'exponentielle d'une matrice symétrique réelle est une matrice symétrique définie positive. Réciproquement, démontrer que toute matrice symétrique définie positive est l'exponentielle d'une matrice symétrique.

Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$. Par théorème spectral il existe $P \in O(n)$ et $D \in D_n(\mathbf{R})$ tels que

$$S = PDP^{-1} = PDP^T$$

On sait qu'alors $\exp(S) = P\exp(D)P^{-1}$, et par conséquent, aussi bien, $\exp(S) = P\exp(D)P^T$; donc $\exp(S) \in S_n(\mathbf{R})$ (ça, on pouvait le voir sans théorème spectral, à partir du classique $\exp(A^T) = (\exp(A))^T$). Et $\mathrm{Sp}(\exp(S)) = \mathrm{Sp}(\exp(D)) \subset \mathbf{R}_*^+$ car si $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ alors $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n})$.
Réciproquement, si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $P \in O(n)$ et $\Delta \in D_n(\mathbf{R})$ tels que

$$B = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$$

avec, pour tout i, $\Delta_{i,i} > 0$. Soit $D = \operatorname{diag}(\ln(\Delta_{1,1}), \dots, \ln(\Delta_{n,n}))$. Alors $S = PDP^{-1} = PDP^T \in S_n(\mathbf{R})$, et $\exp(S) = B$.

Exercice 13 (Rotation vectorielle). Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, montrer que

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une rotation si et seulement si p, q et r sont les racines d'un polynôme à déterminer.

On note $\sigma_1 = p + q + r$, $\sigma_2 = pq + pr + qr$, $\sigma_3 = pqr$.
Les colonnes de la matrice forment une famille orthonormale si et seulement si $\sigma_2 = 0$ (avec des notations habituelles pour les fonctions symétriques élémentaires) et $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1$; le déterminant vaut 1 si et seulement si

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 1$$

Supposons déjà $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_1^2 = 1$. Alors p, q, r sont racines de

$$X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - \sigma_1 X^2 - \sigma_3$$

et donc $p^3 + q^3 + r^3 = \sigma_1(p^2 + q^2 + r^2) + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 + 3\sigma_3$. Finalement, la condition cherché est $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, i.e. p, q, r racines de

$$X^3 - X^2 + a = 0$$

(le polynôme en question n'a 3 racines réelles que si a appartient à un intervalle facile à déterminer en étudiant la fonction $f\colon x \to x^3 - x^2 + a$.