mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Algèbre bilinéaire

I Algèbre bilinéaire

Ab1, Ab2, Ab3

II Questions de cours classiques

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Méthode de Schmidt : formule utilisant avec la projection orthogonale.

Les exercices 6 et 7.

III Exercices

Exercice 1 (Projection orthogonale). Montrer que

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-2x} ; (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

est atteint en un point unique, comment le déterminer ? (ne pas faire les calculs, donner seulement la manière de les faire...).

Savoir reconnaître une situation dans laquelle le théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie s'applique. Savoir faire le dessin correspondant et l'utiliser.

Exercice 2 (Projection sur un convexe fermé).

On désigne par $\mathcal{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien E .

1. On suppose $\mathcal{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathcal{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que :

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| \quad (= d(x, \mathcal{C})).$$

2. On suppose seulement $\mathcal{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.

3. Soit y un élément de $\mathcal{C}$; démontrer que

$$\left(y = p(x) \right) \iff \left(\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leq 0 \right)$$

(pour $\implies$, on remarquera que, si $z \in \mathcal{C}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $p(x) + t(z - p(x)) \in \mathcal{C}$).

4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :

$$\|p(x) - p(x')\|^2 \leq \langle x - x', p(x) - p(x') \rangle$$

puis démontrer que p est continue.

Exercice 3 (décomposition QR).

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que

$$A = QR$$

(on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).

2. En déduire l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1, \dots, c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$, alors

$$|\det M| \leq \|c_1\| \dots \|c_n\|$$

(expliciter les coefficients diagonaux de R en reprenant l'interprétation de la question précédente en termes de matrices de passage). Peut-on avoir égalité?

Savoir écrire l'orthonormalisation de Schmidt avec une formule mettant en jeu les projections orthogonales.

Exercice 4 (étude d'une suite d'endomorphismes). Soit E un espace euclidien, u un automorphisme orthogonal de E , on définit $v = Id_E - u$.

1. Démontrer que $\ker v = (\text{im } v)^\perp$.

2. On définit

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Démontrer que $(P_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge, pour tout élément x de E , vers la projection orthogonale de x sur $\ker v$.

Exercice 5. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est compact.

Exercice 6. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Montrer que

(i) $\text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+$

et (ii) $\forall x \in E \quad (x|u(x)) \geq 0$

sont équivalentes.

Exercice 7. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que

(i) $\text{Sp}(M) \subset \mathbf{R}^+$

et (ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad {}^tXMX \geq 0$ sont équivalentes.

Savoir utiliser le théorème spectral pour les matrices et pour les endomorphismes, sans avoir systématiquement besoin de repasser par les endomorphismes (s'il s'agit de matrices) ou de matrices (s'il s'agit d'endomorphismes).

Exercice 8. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Montrer que

$$\max(\text{Sp}(u)) = \max_{x \neq 0_E} \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$$

Énoncer ce résultat sous forme matricielle.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien, dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer que

$$\max(\text{Sp}(u)) = \max_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Par quoi peut-on remplacer le premier membre si on ne fait plus l'hypothèse que les valeurs propres sont positives ?

Exercice 10 (Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

1. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{trace}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Calculer la norme d'une matrice en fonction de ses coefficients.

3. Si A est une matrice symétrique, écrire $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A .
4. Quel est, pour ce produit scalaire, l'orthogonal de l'espace des matrices symétriques?

Savoir qu'il y a une formule donnant le produit scalaire canonique de deux matrices à l'aide de la trace. Savoir la retrouver.

Exercice 11 (Racine carrée). Montrer que toute matrice réelle symétrique positive est le carré d'une matrice réelle symétrique positive.

Exercice 12 (exponentielle d'une matrice symétrique). Montrer que l'exponentielle d'une matrice symétrique réelle est une matrice symétrique définie positive. Réciproquement, démontrer que toute matrice symétrique définie positive est l'exponentielle d'une matrice symétrique.

Exercice 13 (Rotation vectorielle). Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, montrer que

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une rotation si et seulement si p , q et r sont les racines d'un polynôme à déterminer.

Connaître les relations coefficients/racines. Savoir qu'une matrice orthogonale n'est pas seulement une matrice ayant un déterminant égal à ± 1 !