mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Probabilités - Corrigés

Exercice 1 (Le lemme de Borel-Cantelli).

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements, on note
$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$$
On suppose $\displaystyle\sum_n P(A_n) < +\infty$. Montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 0$$
2. On reprend les notations du 1., mais on change les hypothèses : on suppose $\displaystyle\sum_n P(A_n) = +\infty$ et les A_n indépendants. On veut montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 1$$
et pour simplifier les notations, on pose $\alpha_n = P(A_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, $1 - x \leq e^{-x}$.
   (b) On pose $B_{p,q} = \displaystyle\bigcap_{n=p}^{p+q} \overline{A_n}$. Démontrer que
$$P(B_{p,q}) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$
   (c) Conclure.

---

1. **Borel-Cantelli « facile »** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements, on note
$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$$
On suppose $\displaystyle\sum_n P(A_n) < +\infty$. Montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 0$$

Par continuité décroissante,

$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \lim_{p\to+\infty}\left(P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)\right)$$

Mais

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n)$$

Et la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, ce qui permet de conclure.

---

2. **Borel-Cantelli « difficile »**
(a) : Etude de fonction ou, plus élégant : la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe, donc son graphe est partout au-dessus de ses tangentes. En particulier de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation

$$y = 1 + (x-0) \times (-1)$$

(b) On sait (cours) que si les A_n sont indépendants alors les $\overline{A_n}$ le sont. Donc

$$P(B_{p,q}) = \prod_{n=p}^{p+q}(1-\alpha_n) \leq \exp\left(-\sum_{n=p}^{p+q}\alpha_n\right)$$

Mais, avec des notations compréhensibles (surtout en probabilités),

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\alpha_n = +\infty$$

On obtient bien

$$P(B_{p,q}) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$

(c) Et donc, par continuité décroissante,

$$P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty}\overline{A_n}\right) = 0$$

ou encore (passage au contraire)

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) = 1$$

et donc (encore continuité décroissante)

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty}(A_n)\right) = 1$$

Exercice 2 (**Hiérarchie de l'existence des moments).** Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé, r et r' deux nombres réels tels que $0 < r' < r$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[|X|^r\right] < +\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{E}\left[|X|^{r'}\right] < +\infty$$

L'idée est assez simple : ce sont les « grandes » valeurs prises par $|X|$ qui peuvent gêner l'existence de l'espérance. Or, si $|X(\omega)|$ est « grand », $|X(\omega)|^r$ est d'autant plus grand que r est grand. Que signifie « $|X(\omega)|$ grand » ? tout simplement plus grand que 1. On a

$$|X(\omega)| > 1 \;\Rightarrow |X(\omega)|^{r'} \leq |X(\omega)|^r$$

ce qui permet d'écrire

$$\forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega)|^{r'} \leq |X(\omega)|^r + 1$$

et de conclure.
Autre rédaction : On peut écrire

$$\begin{aligned} |X|^{r'} &= \mathbf{1}_{|X|\geq 1}\, |X|^{r'} \; + \; \mathbf{1}_{|X|\leq 1}\, |X|^{r'} \\ &\leq \mathbf{1}_{|X|\geq 1}\, |X|^{r} \; + \; \mathbf{1}_{|X|\leq 1} \\ &\leq |X|^{r} \; + \; \mathbf{1}_{|X|\leq 1} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure car on a majoré $|X|^{r'}$ par une somme de deux variables aléatoires d'espérance finie. Ce genre de rédaction (introduction de fonctions indicatrices pour concrétiser l'idée d'examiner deux cas, $|X| \leq 1$ et $|X| > 1$) rend bien des services...

Exercice 3 (**Une formule très, très classique).** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq j)$$

Cours...Fubini pour des familles positives.

Exercice 4 (**L'espérance via une loi conditionnelle).** On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x\in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x)\neq 0} \mathbf{E}(Y|X = x)\mathbf{P}(X = x)$$

où l'on désigne par $\mathbf{E}(Y|X = x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}_{Y|X=x}(\{y\}) = \mathbf{P}(Y = y|X = x)$$

(en supposant $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$).
Commençons par supposer $Y \geq 0$. Pour $y \in Y(\omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y, X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0} \mathbf{P}(Y = y, X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0} \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x)
\end{aligned}$$

(on a utilisé les probabilités totales, évincé des termes nuls puis traduit les probabilités d'intersections en termes de probabilités conditionnelles) ce qui montre que la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0}$$

est sommable, de somme $y\mathbf{P}(Y = y)$. Et la famille $(y\mathbf{P}(Y = y))_{y \in Y}$ est sommable (du fait que Y est d'espérance finie). Il en découle, par sommabilité par paquets, que la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{(x,y) \in A \times Y(\Omega)}$$

est sommable, en désignant pour arranger un peu les notations :

$$A = \{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) \neq 0\}$$

Et donc, pour tout $x \in A$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{y \in Y(\Omega)}$$

est sommable, donc aussi la famille

$$(y\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{y \in Y(\Omega)}$$

ce qui exprime que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est d'espérance finie. Et on a

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{E}(Y|X = x)$$

ce qui permet de dire que la famille $(\mathbf{P}(X = x)\mathbf{E}(Y|X = x))_{x \in A}$ est sommable ; et la formule

$$\sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x)\mathbf{E}(Y|X = x) = \sum_{y \in Y(\omega) y\mathbf{P}(Y=y)}$$

donne le résultat.

Si Y n'est pas à valeurs positives, ce qui précède appliqué à $|Y|$ permet d'affirmer que la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{(x,y)\in A\times Y(\Omega)}$$

est sommable, on a le droit de la sommer « dans les deux sens » et on obtient la formule.

Exercice 5 (**Loi binomiale négative**).

1. Soit $p \in]0,1[$. On considère n variables aléatoires indépendantes X_i ($1 \leq i \leq n$) de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Montrer que, pour tout $k \geq n$,
$$P(S_n = k) = p^n (1-p)^{k-n} \binom{k-1}{n-1}$$
Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p. on définit $T_k = n$ lorsque le $n$ième tirage est celui où l'on obtient Pile pour la k-ième fois. Déterminer la loi de T_k.

On peut faire cet exercice « directement », sans utiliser les fonctions génératrices, mais c'est plutôt plus simple avec (sauf si on aime beaucoup le dénombrement). Pour $t \in [-1,1]$ (en fait un peu plus, mais ce n'est pas important)

$$G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n$$

où l'on a noté comme d'habitude $q = 1-p$. Or on a, si $u \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbf{N}_*$,

$$(1+u)^{-\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-k+1)}{k!} u^k$$

et donc

$$(1-u)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} u^k$$

On peut donc revenir à

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n\ q^k\ t^{n+k}$$

(valable pour $-1/q < t < 1/q$, a fortiori sur $]-1,1[$) ou après réindexation :

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{k-n} p^n\ q^{k-n}\ t^k$$

qui par unicité du développement en série entière donne le résultat attendu. Et la loi de S_k est celle de T_k...

Exercice 6 (Comparaison de variables géométriques, fonctions de répartition, loi d'un max ou d'un min...).

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (on notera $q = 1 - p$). Calculer $\mathrm{P}(Y \geq X)$. Calculer aussi $\mathrm{P}(Y > X)$ et $\mathrm{P}(Y = X)$. Donner les résultats dans le cas particulier $p = 1/2$.
2. On suppose que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et que, pour tout k, $U_k \sim \mathcal{G}(p_k)$. On note, pour tout k, $q_k = 1 - p_k$. Identifier la loi de
$$\min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$
3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de
$$\max(X, Y) - \min(X, Y)$$

1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \geq X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y \geq X) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(n \geq Y, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\ \mathbf{P}(Y \geq n) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} q^{n-1} p \\
&= \frac{p}{1 - q^2} \\
&= \frac{1}{1 + q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X < Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X < Y, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(n < Y, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\ \mathbf{P}(Y > n) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n} q^{n-1} p \\
&= \frac{pq}{1 - q^2} \\
&= \frac{q}{1 + q}
\end{aligned}$$

Et donc

$$P(X=Y) = 1 - P(X<Y) - P(Y<X) = 1 - \frac{2q}{1+q} = \frac{1-q}{1+q}$$

(le fait que cela tende vers 1 quand q tend vers 0, et vers 0 quand q tend vers 1, est plutôt satisfaisant.

2.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\min(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geq k\right) &= \mathbf{P}\left(U_1 \geq k, \ldots, U_n \geq k\right) \\ &= (q_1 \ldots q_n)^{k-1}\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{P}\left(\min(U_1, U_2, \ldots, U_n) = k\right) = (q_1 \ldots q_n)^{k-1}(1 - q_1 \ldots q_n)$$

On obtient donc une loi $\mathcal{G}(q_1 \ldots q_n)$, ce qui peut se comprendre de manière purement probabiliste (imaginer n parties de pile ou face non équitables se déroulant simultanément).

3. Soit $Z = \max(X,Y) - \min(X,Y)$. Déjà,

$$\mathbf{P}(Z=0) = \mathbf{P}(X=Y) = \frac{1-q}{1+q}$$

(déjà calculé). Ensuite, brutalement, car ce n'est pas si méchant, si $m \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z=m) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(X=k, Y=k+m) + \mathbf{P}(Y=k, X=k+m)\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(X=k, Y=k+m)\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{k-1+k+m-1}p^2\right) \\ &= 2p^2q^m \frac{1}{1-q^2} \\ &= 2p\frac{q^m}{1+q}\end{aligned}$$

Exercice 7. [Oral ccp]
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i) \cap (Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Vu dans le chapitre P4, page 4. Très intéressant, pas très dur.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t. On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.

   On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

(a) Il y a convergence en 1, absolue, donc convergence en -1, et par transfert

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$$

(b) Par unicité du développement en série entière, $\sum_{n\geq 0} t^n \mathbf{P}(X = n)$ est le développement en série de Taylor de G_X. Donc

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

2.(a) Ici, $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, on trouve $D_{G_X} = \mathbf{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
(b) $G_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\left(t^{X+Y}\right) = \mathbf{E}(t^X\ t^Y)$. Mais t^X et t^Y, fonctions de X et Y qui sont indépendantes, le sont, donc

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$$

et comme la fonction génératrice caractérise la loi (par 1.(b)), $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Calculer, en fonction de g_X (fonction génératrice de X), $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)t^n$.

Le rayon de convergence de cette série est ≥ 1 car la suite $(\mathbf{P}(X \geq n))$ est bornée. Notons h sa somme, et g plutôt que g_X la fonction génératrice de X (ce qu'il ne faut jamais faire à l'écrit ! changer les notations...). On part simplement de

$$\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(X \geq n) - \mathbf{P}(X \geq n+1)$$

que l'on multiplie par t^{n+1} ; on obtient en sommant :

$$tg(t) = th(t) - (h(t) - 1)$$

(car $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$). Donc

$$h(t) = \frac{1 - tg(t)}{1 - t}$$

On pouvait aussi procéder directement : supposons toujours $|t| < 1$; la suite $(\mathbf{P}(X \geq n))_{n \in \mathbf{N}}$ étant bornée, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X \geq n)t^n$ converge (c'est une série entière, de rayon de convergence ≥ 1). Notons h_X sa somme. Par formule des probabilités totales, on a, si $|t| < 1$,

$$h_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X = p)t^n \right)$$

Le théorème de sommation par paquets appliquée aux familles de réels positifs montre alors que la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbf{N}^2}$ définie par

$$u_{n,p} = \mathbf{P}(X = p)|t|^n \quad \text{si } n \leq p \qquad , u_{n,p} = 0 \quad \text{sinon}$$

est sommable et que sa somme est $h_X(|t|)$ (il suffit de remplacer t par $|t|$ dans ce qui précède). On peut donc, toujours par sommabilité, écrire :

$$\begin{aligned} h_X(t) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{p} \mathbf{P}(X = p)t^n \right) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = p) \frac{1 - t^{p+1}}{1 - t} \\ &= \frac{1}{1 - t} \left(1 - tg_X(t)\right) \end{aligned}$$

Exercice 10 (Classique : somme aléatoire de variables aléatoires, identités de Wald). Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}_*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et N une variable aléatoire sur le même espace, indépendante des X_i (i.e. la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $X_0 = N$, est une suite de variables aléatoires indépendantes). On suppose que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Et on pose

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_{N(\omega)} = X_1(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

1. Exprimer la fonction génératrice de S_N à l'aide des fonctions génératrices de X_1 et de N (on rappelle que toutes les X_i ont même loi, donc même fonction génératrice).
2. En déduire que, si les X_i et N sont d'espérances finies, S_N l'est, et calculer $\mathbf{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{E}(N)$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.
4. On suppose que N et X_1 ont des moments d'ordre 2. Montrer

$$\mathbf{E}\big((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\big) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)$$

et

$$\mathbf{V}(S_N) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{V}(N)$$

---

1. Exprimer la fonction génératrice de S_N à l'aide des fonctions génératrices de X_1 et de N (on rappelle que toutes les X_i ont même loi, donc même fonction génératrice).

Soit z tel que $|z| \leq 1$. On peut supposer z réel ou z complexe, cela ne change rien au calcul. Notons G_S la fonction génératrice cherchée :

$$G_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_N = n)z^n$$

(la somme commence à $n = 1$ parce que l'énoncé précise que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$, mais on pourrait faire commencer la somme à $n = 0$ sans inconvénient). La formule des probabilités totales permet d'écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_N = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_N = n, N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n, N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)
\end{aligned}$$

En effet, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ et N sont indépendantes, pour tout $k \geq 1$. Donc

$$G_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k) z^n \right)$$

Mais, si l'on pose $u_{n,k} = \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k) z^n$, la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}_*^2}$ est sommable ; on peut en effet écrire, pour tout (n,k), $|u_{n,k}| \leq v_{n,k}$ où

$$v_{n,k} = \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)$$

Or, pour tout n, par formule des probabilités totales, $\sum_k v_{n,k}$ converge, et

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} = \mathbf{P}(S_N = n)$$

donc $\sum_n \sigma_n$ converge. Il en résulte la sommabilité de la famille $(v_{n,k})$, et par suite celle de la famille $(u_{n,k})$.
On peut donc intervertir les sommations :

$$\begin{aligned} G_S(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k) z^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n) z^n \right) \end{aligned}$$

Or le cours affirme, par indépendance des X_i, que, si $|z| \leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n) z^n = (G_X(z))^k$$

où G_X désigne la fonction génératrice de chaque variable aléatoire X_i. Finalement,

$$\begin{aligned} G_S(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n) z^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \left(G_X(z)\right)^k \\ &= G_N\left(G_X(z)\right) \end{aligned}$$

où l'on note G_N la fonction génératrice de N. On notera que $|G_X(z)| \leq 1$, ce qui autorise l'écriture $G_N(G_X(z))$. Mais de toute manière, la sommabilité montrée précédemment justifie l'existence de toutes les sommes écrites.

---

2. En déduire que, si les X_i et N sont d'espérances finies, S_N l'est, et calculer $\mathbf{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{E}(N)$.

Si les X_i et N sont d'espérances finies, G_N et G_X, que l'on considère ici comme fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles, sont dérivables en 1. Donc G_S l'est (autre rédaction : G_X et G_N sont C^1 sur $[0,1]$, donc G_S l'est), et

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'\left(G_X(1)\right) = \mathbf{E}(X)\ G_N'(1) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N)$$

---

3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.

On passe par la formule des probabilités totales et par une sommabilité.

---

4. On suppose que N et X_1 ont des moments d'ordre 2. Montrer

$$\mathbf{E}\big((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\big) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)$$

et

$$\mathbf{V}(S_N) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{V}(N)$$

Ici, G_N et G_X sont de classe C^2 sur $[0,1]$. Par composition ($[0,1]$ est stable par n'importe quelle fonction génératrice), G_S l'est, et

$$\forall t \in [0,1] \qquad G_S''(t) = G_X''(t)G_N'\left(G_X(t)\right) + \left(G_X'(t)\right)^2 G_N''\left(G_X(t)\right)$$

Toutes les variables aléatoires, S_N, X, N ont des moments d'ordre 2, et donc les produits de deux de ces variables aléatoires admettent des moments d'ordre 1. Donc $\mathbf{E}(NS_N) < +\infty$, et d'autre part, par transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\right) &= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*} (p - q\mathbf{E}(X))^2\,\mathbf{P}(S_N = p, N = q)\\
&= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*} (p - q\mathbf{E}(X))^2\,\mathbf{P}(S_q = p, N = q)\\
&= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*} (p - q\mathbf{E}(X))^2\,\mathbf{P}(S_q = p)\mathbf{P}(N = q)\\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N = q)\left(\sum_{p=1}^{+\infty}(p - \mathbf{E}(S_q))^2\,\mathbf{P}(S_q = p)\right)\\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N = q)\mathbf{V}(S_q)\\
&= \sum_{q=1}^{+\infty} q\mathbf{V}(X)\mathbf{P}(N = q)\\
&= \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)
\end{aligned}$$

On a utilisé diverses choses : indépendance, sommabilité, transfert…

Pour l'autre formule :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(S_N) &= G''_S(1) + G'_S(1)(1 - G'_S(1) \\
&= G''_X(1)G'_N(1) + (G'_X(1))^2 G''_N(1) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)(1 - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)) \\
&= (\mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)(\mathbf{E}(X) - 1))\mathbf{E}(N) + \cdots \\
&\cdots (\mathbf{E}(X))^2((\mathbf{V}(N) + \mathbf{E}(N)(\mathbf{E}(N) - 1)) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)(1 - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)) \\
&= \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2\mathbf{V}(N)
\end{aligned}
$$