mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Probabilités

I Chapitres concernés

P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7

II Questions de cours les plus classiques

Il est prudent de savoir

— Démontrer la formule de Bayes (elle sert rarement, elle se démontre très facilement, autant savoir la retrouver).

— Calculer l'espérance et la variance d'une loi binomiale à partir de celles d'une loi de Bernoulli et de la propriété de la variance d'une somme de variables deux à deux indépendantes.

— Calculer fonctions génératrices et moments des lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, uniforme.

— Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

— Démontrer l'inégalité de Markov, en déduire Bienaymé-Tchebychev, puis la loi faible des grands nombres.

— Savoir établir simplement le lien entre la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes et les fonctions génératrices de ces variables.

— Savoir démontrer la propriété d'approximation par la loi de Poisson (question plus plausible à l'oral qu'à l'écrit, cependant).

— Connaître l'exercice 3.

III Exercices

Exercice 1 (Le lemme de Borel-Cantelli).

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements, on note
$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$$
On suppose $\sum\limits_n P(A_n) < +\infty$. Montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 0$$

2. On reprend les notations du 1., mais on change les hypothèses : on suppose $\sum\limits_n P(A_n) = +\infty$ et les A_n indépendants. On veut montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 1$$
et pour simplifier les notations, on pose $\alpha_n = P(A_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, $1 - x \leq e^{-x}$.
   (b) On pose $B_{p,q} = \bigcap\limits_{n=p}^{p+q} \overline{A_n}$. Démontrer que
$$P(B_{p,q}) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$
   (c) Conclure.

Savoir démontrer le lemme de Borel-Cantelli dans le cas « facile »...le cas difficile est aussi très intéressant, mais au niveau ccp (voire Centrale-Mines), on donnerait probablement des indications.

Exercice 2 (Hiérarchie de l'existence des moments). Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé, r et r' deux nombres réels tels que $0 < r' < r$. Montrer que
$$\mathbf{E}\left[|X|^r\right] < +\infty \ \Rightarrow\ \mathbf{E}\left[|X|^{r'}\right] < +\infty$$

Comprendre que ce qui peut empêcher l'existence des moments, ce sont les « grandes » valeurs (en valeur absolue) de la variable aléatoire.

Exercice 3 (Une formule du cours).
Mais à savoir redémontrer par argument de sommabilité.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq j)$$

Exercice 4 (L'espérance via une loi conditionnelle). On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0} \mathbf{E}(Y|X=x)\mathbf{P}(X=x)$$

où l'on désigne par $\mathbf{E}(Y|X=x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.

Exercice 5 (Loi binomiale négative).

1. Soit $p \in]0,1[$. On considère n variables aléatoires indépendantes X_i ($1 \leq i \leq n$) de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Montrer que, pour tout $k \geq n$,
$$P(S_n = k) = p^n (1-p)^{k-n} \binom{k-1}{n-1}$$
Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pïle est p. on définit $T_k = n$ lorsque le $n$ième tirage est celui où l'on obtient Pile pour la k-ième fois. Déterminer la loi de T_k.

Exercice 6 (Comparaison de variables géométriques, fonctions de répartition, loi d'un max ou d'un min...).

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (on notera $q = 1-p$). Calculer $\mathrm{P}(Y \geq X)$. Calculer aussi $\mathrm{P}(Y > X)$ et $\mathrm{P}(Y = X)$. Donner les résultats dans le cas particulier $p = 1/2$.
2. On suppose que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et que, pour tout k, $U_k \sim \mathcal{G}(p_k)$. On note, pour tout k, $q_k = 1-p_k$. Identifier la loi de
$$\min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$
3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de
$$\max(X, Y) - \min(X, Y)$$

Savoir utiliser, pour une variable géométrique, les $\mathbf{P}(X > k)$ ou $\mathbf{P}(X \geq k)$ plutôt que les $\mathbf{P}(X = k)$.

Exercice 7. [Oral ccp]
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Savoir les liens entre loi conjointe et lois marginales.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Calculer, en fonction de g_X (fonction génératrice de X), $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)t^n$.

Exercice 10 (Classique : somme aléatoire de variables aléatoires, identités de Wald). Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}_*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et N une variable aléatoire sur le même espace, indépendante des X_i (i.e. la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $X_0 = N$, est une suite de variables aléatoires indépendantes). On suppose que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Et on pose

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_{N(\omega)} = X_1(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

1. Exprimer la fonction génératrice de S_N à l'aide des fonctions génératrices de X_1 et de N (on rappelle que toutes les X_i ont même loi, donc même fonction génératrice).
2. En déduire que, si les X_i et N sont d'espérances finies, S_N l'est, et calculer $\mathbf{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{E}(N)$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.
4. On suppose que N et X_1 ont des moments d'ordre 2. Montrer

$$\mathbf{E}\big((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\big) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)$$

et

$$\mathbf{V}(S_N) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{V}(N)$$