mp* 24-25 : Révisions - Espaces vectoriels normés

I Chapitres

T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8

II Questions de cours classiques

Comparaison des normes usuelles.
Image continue d'un compact.
Théorème de Heine.
Une suite dans un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs (nécessite T7, sera vu à la rentrée).

III Exercices

Exercice 1 (Norme intégrale avec poids)**.** Soit E l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit w un élément de E. On définit, pour tout élément f de E,

$$N(f) = \int_{[a,b]} \left| wf \right| \, .$$

1. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a, b]$ pour que N soit une norme. Vérifier que cette condition n'est pas nécessaire.
2. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a, b]$ pour que N soit équivalente à la norme N_1 usuelle. Vérifier que cette condition est nécessaire.

Les propriétés de norme sont faciles à vérifier pour N, si w ne s'annule pas. Mais si w ne s'annule qu'en un point t_0, on a, par le théorème qui dit qu'une fonction continue positive sur un segment a une intégrale nulle si et seulement si elle est constamment nulle :

$$N(f) = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b] \ w(t)f(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b] \setminus \{t_0\} \ f(t) = 0$$

Mais par continuité de f en t_0,

$$\forall t \in [a, b] \setminus \{t_0\} \ f(t) = 0 \ \Rightarrow \forall t \in [a, b] \ f(t) = 0$$

Donc il n'est pas nécessaire que w ne s'annule pas pour que N soit une norme. En fait, une condition nécessaire et suffisante est que l'ensemble des points d'annulation de w soit d'intérieur vide, i.e. que son complémentaire soit dense dans $[a, b]$.

On a déjà
$$\forall f \in E \qquad N(f) \leq \|w\|_\infty \; N_1(f)$$
Si w ne s'annule pas, $|w|$, continue, atteint un minimum m sur $[a, b]$. Et on a
$$\forall f \in E \qquad N(f) \geq m N_1(f)$$
ce qui donne, comme $m > 0$,
$$N_1 \leq \frac{1}{m} N$$
donc N et N_1 sont équivalentes.
Supposons maintenant que w s'annule en $t_0 \in [a, b]$. Supposons aussi $t_0 \in]a, b[$; on considère pour $n \in \mathbf{N}_*$ la fonction f_n nulle en-dehors de $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]$, valant n en t_0, affine sur chacun des segments $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0]$ et $[t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$, continue (son graphe est un triangle, à tracer). Alors $N_1(f_n) = 1$ (calcul d'aire d'un triangle isocèle), et
$$N(f_n) \leq \sup_{[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]} (|w|) \times N_1(f_n) = \sup_{[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]} (|w|)$$
La continuité de w en t_0 montre que
$$\sup_{[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]} (|w|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
Et ainsi les deux normes N_1 et N ne sont pas équivalentes. La condition est donc nécessaire.

Exercice 2 (Étude topologique des sous-groupes additifs de R). Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ (exemple : $G = \mathbf{Z}$, $G = \mathbf{Q}$). On suppose $G \neq \{0\}$. On note α la borne inférieure de $G \cap \mathbf{R}_*^+$ (on justifiera son existence).

1. Montrer que $\forall g \in G \; \forall n \in \mathbf{Z} \quad ng \in G$.
2. Si $\alpha = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$ (exemple : $G = \mathbf{Q}$).
3. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ (on procèdera par l'absurde, et on montrera que si $\alpha \notin G$ alors il y a au moins deux éléments de G dans $]\alpha, 2\alpha[$) puis que $G = \alpha\mathbf{Z}$.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ (exemple : $G = \mathbf{Z}$, $G = \mathbf{Q}$). On suppose $G \neq \{0\}$. On note α la borne inférieure de $G \cap \mathbf{R}_*^+$ (on justifiera son existence).

Si g est un élément non nul de G, $-g$ aussi, et l'un des deux est dans $\mathbf{R}_*^+$. Donc $G \cap \mathbf{R}_*^+ \neq \emptyset$. Et minoré par 0, il a une borne inférieure.

---

1. Montrer que $\forall g \in G\ \forall n \in \mathbf{Z} \quad ng \in G$.

On fixe g, on fait une récurrence sur n pour obtenir

$$\forall g \in G\ \forall n \in \mathbf{N} \quad ng \in G$$

puis on utilise le fait que $h \in G \Rightarrow -h \in G$.

---

2. Si $\alpha = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$ (exemple : $G = \mathbf{Q}$).

On va montrer que si $a < b$, $]a, b[\cap G \neq \emptyset$, ce qui montrera la densité (on suppose $a < b$). Pour cela, on note que $b-a$ ne minore pas $G \cap \mathbf{R}_*^+$ (sinon α ne serait pas nul). Soit $g_0 \in G \cap \mathbf{R}_*^+$ tel que $g_0 < b - a$. On voit bien qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $ng_0 \in]a, b[$. Et on peut le montrer de la manière suivante : soit p le plus grand entier tel que $pg_0 \leq a$ ($p = \lfloor \frac{g_0}{a} \rfloor$). Alors $(p+1)g_0 > a$ d'une part, et $(p+1)g_0 \leq a + g_0 < a + (b-a) = b$.

---

3. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ (on procèdera par l'absurde, et on montrera que si $\alpha \notin G$ alors il y a au moins deux éléments de G dans $]\alpha, 2\alpha[$) puis que $G = \alpha\mathbf{Z}$.

2α ne minore pas $G \cap \mathbf{R}_*^+$ car $2\alpha > \alpha$. Il existe donc $g_1 \in G \cap [\alpha, 2\alpha[$. Mais si $\alpha \notin G$, alors $g_1 \in]\alpha, 2\alpha[$. Et g_1 ne minore pas $G \cap \mathbf{R}_*^+$. Donc il existe $g_2 \in]\alpha, g_1[$. Mais alors $g_1 - g_2$ est un élément de $G \cap \mathbf{R}_*^+$ qui est dans $]0, \alpha[$. Contradiction.
Donc $\alpha \in G$. Comme $(G, +)$ est un groupe, $\alpha\mathbf{Z} \subset G$. Réciproquement, supposons $g \in G$, soit $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$n\alpha \leq g < (n+1)\alpha$$

alors $0 \leq g - n\alpha < \alpha$ et $g - n\alpha \in G$, donc $g - n\alpha = 0$, ce qui conclut : $G = \alpha\mathbf{Z}$.

Exercice 3 (Résolution typique d'une équation fonctionnelle, programme mpsi). On cherche les applications continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, qui vérifient, pour tous x et y réels :

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

Dans la suite, f désigne une telle fonction.

1. Démontrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.
2. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier naturel n, $f(nx) = nf(x)$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier n, $f(nx) = nf(x)$.
4. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout nombre rationnel r, $f(rx) = rf(x)$.

5. Démontrer qu'il existe un nombre complexe α tel que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha x$.

---

1. Démontrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.

   On fait $x = y = 0$, puis $y = -x$.

   ---

2. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier naturel n, $f(nx) = nf(x)$.

   Récurrence sur n, en écrivant $y = nx$ dans l'équation fonctionnelle.

   ---

3. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier n, $f(nx) = nf(x)$.

   Par imparité à partir de la propriété précédente.

   ---

4. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout nombre rationnel r, $f(rx) = rf(x)$.

   On part de $f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right)$ d'une part, $f(x) = f\left(\frac{q}{q}x\right) = qf\left(\frac{1}{q}x\right)$ d'autre part. On conclut bien

   $$f\left(\frac{p}{q}x\right) \frac{p}{q}f(x)$$

   ---

5. Démontrer qu'il existe un nombre complexe α tel que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha x$.

   Les fonctions $x \mapsto xf(1)$ et f sont continues et coïncident sur $\mathbf{Q}$ dense, donc sont égales.

Exercice 4 (Une adhérence dans un espace fonctionnel, oral Centrale-Mines). On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ et $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme N_∞. Montrer que F est fermé.
2. On munit E de la norme N_1. Montrer que F est dense dans E.
3. *Nettement plus difficile, on peut passer.* On munit E d'une norme quelconque. Montrer que F est soit dense dans E, soit fermé.

Connaître la comparaison entre N_1, N_2, N_∞. Savoir qu'il est beaucoup plus facile de converger pour l'une des deux premières que pour la dernière.

L'inégalité $|f(0)| \leq N_\infty(f)$ montre (par caractérisation de la continuité des applications linéaires) que l'application linéaire $\phi\ :\ f \mapsto f(0)$ est continue sur $(E, \|.\|_\infty)$. Donc $F = \phi^{-1}(\{0\}$ est fermé dans cet espace.
(on peut aussi utiliser la caractérisation des fermés par les suites, la convergence pour N_∞, alias convergence uniforme, implique la convergence simple en 0).
Si $f \in E$, on construit pour tout $n \geq 1$ une fonction continue f_n qui coïncide avec f sur $[1/n, 1]$, qui est affine sur $[0, 1/n]$ et vaut 0 en 0 (autrement dit, graphiquement, le graphe de f_n suit celui de f entre $1/n$ et 1, on complète par un segment de droite entre les points $(0, 0)$ et $(1/n, f(1/n))$. On montre que

$$N_1(f - f_n) \leq \frac{2}{n} N_\infty(f)$$

ce qui prouve que (f_n) converge dans (E, N_1) vers f. Or les f_n sont dans F. D'où la densité cherchée.
Dans le cas général, enfin, supposons F non fermé, soit $g \in \overline{F} \setminus F$. On a $g(0) \neq 0$, ce qui permet, f étant donnée dans E, de considérer $h = f - \dfrac{f(0)}{g(0)} g$. On a $h \in F$. Et, si g est limite d'une suite (g_n) d'éléments de F, f est la limite de la suite $\left(h + \dfrac{f(0)}{g(0)} g_n\right)_{n \geq 1}$ d'éléments de F. Donc F est dense dans E.

Exercice 5 (Compacts emboîtés).

1. Soit (K_n) une suite de compacts non vides d'un espace vectoriel normé, décroissante pour l'inclusion (pour tout n, $K_{n+1} \subset K_n$. Démontrer que l'intersection $\displaystyle\bigcap_n K_n$ est un compact non vide.
2. Pour tout entier naturel n, montrer que $\delta_n = \displaystyle\sup_{x,y \in K_n} d(x, y)$ est bien défini. On l'appelle diamètre du compact K_n. Démontrer qu'il existe deux éléments x_n et y_n de K_n tels que $\delta_n = d(x_n, y_n)$.
3. Quelle conclusion peut-on rajouter au **a.** sous l'hypothèse supplémentaire $\delta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$? (on ne se sert pas du résultat de la question précédente)

Savoir utiliser la définition de la compacité (Bolzano-Weierstrass)

1. C'est la non vacuité qui est consistante, pas la compacité : $\displaystyle\bigcap_n K_n$, intersection de fermés, est fermée et est incluse dans K_0 qui est compact. Donc $\displaystyle\bigcap_n K_n$ est compacte.

   Pour montrer que $\displaystyle\bigcap_n K_n$ est non vide, prenons dans chaque K_n un élément x_n. La suite (x_n) est une suite d'éléments de K_0 compact. On peut donc en extraire une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $\ell \in K_0$. Mais, si p est un entier quelconque, si $n \geq p$ on a $\phi(n) \geq n \geq p$, donc $x_{\phi(n)} \in K_p$; la suite $(x_{\phi(n)})$ est donc à termes dans K_p à partir d'un certain rang. Et donc, comme K_p est fermé, $\ell \in K_p$. Finalement, $\ell \in \bigcap_n K_n$.

---

2. On peut utiliser des méthodes assez différentes : par exemple, dire que $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est continue sur $K_n \times K_n$ qui est compact, donc atteint un maximum. Pourquoi $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est-elle continue ? on est dans un espace vectoriel normé E muni de la norme $\|.\|$, on sait (voir produit d'evn) que $E \times E$ est muni de la norme N définie par

$$N(x, y) = \max(\|x\|, \|y\|)$$

Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $E \times E$,

$$\begin{aligned} |d(x', y') - d(x, y)| &= |\|y' - x'\| - \|y - x\|| \\ &\leq \|(y' - x') - (y - x)\| \\ &\leq \|y' - y\| + \|x' - x\| \\ &\leq 2N\left((x', y') - (x, y)\right) \end{aligned}$$

Et donc d est 2-lipschitzienne.
Autre méthode, on peut considérer une suite (s_p, t_p) d'éléments de K_n^2 telle que la suite $(d(s_p, t_p))$ converge vers δ_n. De la suite (x_p, y_p) on peut, comme K_n^2 est compact, extraire une suite convergente, etc...

---

3. Alors $\bigcap\limits_n K_n$ est un singleton. En effet, si x et x' sont dans $\bigcap\limits_n K_n$, alors pour tout n on a $\|x - x'\| \leq \delta_n$.

Exercice 6. Donner un exemple de suite réelle n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence et, pourtant, ne convergeant pas.

Par exemple, $u_n = 0$ si n pair, $u_n = n$ si n impair.

Exercice 7 (Une situation classique : se ramener à un compact). Soit f une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans $\mathbf{R}$, continue, et telle que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} \Big(f(x)\Big) = +\infty$$

Démontrer que f atteint un minimum.

On « borne » le problème pour se ramener à un compact. Soit $A > 0$ tel que

$$\|x\| \geq A \Longrightarrow f(x) \geq f(0_E)$$

Sur la boule fermée $B'(0_E, A)$, fermée et bornée en dimension finie, f atteint un minimum. On voit que ce minimum est global.

Savoir, en intersectant avec une boule fermée en dimension finie, ramener à une utilisation de la compacité quelque chose qui a priori ne la supposait pas.

Exercice 8 (Même chose). Soit f une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans un e.v.n., continue, et telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty} ||f(x)|| = 0$$

Démontrer qu'elle est uniformément continue.

Même principe que le précédent, un peu plus technique. Soit $\epsilon > 0$. Fixons A tel que

$$\|x\| \geq A \implies \|f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Sur $B'(0_E, A+1)$, fermé et borné en dimension finie donc compact, f est uniformément continue. Soit donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in B'(0_E, A+1)^2 \qquad \|y - x\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

On peut sans restriction supposer $\eta \leq 1$. Alors, pour tous x, y dans E tels que $\|x - y\| \leq \eta$, on a $(x,y) \in B'(0_E, A+1)^2$ ou $\|x\| \geq A$ et $\|y\| \geq A$, dans les deux cas on conclut $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$, on a donc bien continuité uniforme.

Exercice 9 (Propriété de Borel Lebesgue, X-ens principalement, mais la précompacité (deuxième question) a déjà été posée dans un écrit Mines). Soit K un compact d'un espace vectoriel E, $\left(\mathcal{O}_i\right)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que
$K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

1. Démontrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x dans **K**, la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ soit incluse dans un ouvert $\mathcal{O}_i$.
2. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$.
3. En déduire qu'il existe une famille $(i_1, \ldots, i_n)$ d'éléments de I telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

[Propriété de Borel-Lebesgue] Soit K un compact d'un espace vectoriel E, $\left(\mathcal{O}_i\right)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que
$K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

1. **Démontrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x dans K, la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ soit incluse dans un ouvert $\mathcal{O}_i$.**

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors (*écriture de la négation*) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in K$ tel que $B(x, \epsilon)$ ne soit incluse dans aucun $\mathcal{O}_i$. En particulier (*construction d'une suite*) pour tout $n \geq 1$ il existe $x_n \in K$ tel que $B(x_n, 1/n)$ ne soit inclus dans aucun $\mathcal{O}_i$. On peut (*utilisation de la compacité*) extraire de (x_n) une suite $\big(x_{\phi(n)}\big)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\ell \in K$. Mais (*recherche d'une contradiction*) il existe donc i_0 tel que $\ell \in \mathcal{O}_{i_0}$, et $\mathcal{O}_{i_0}$ est ouvert, il existe donc $\delta > 0$ tel que $B(\ell, \delta) \subset \mathcal{O}_{i_0}$. On voit qu'alors, à partir d'un certain rang,

$$B\big(x_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}\big) \subset \mathcal{O}_{i_0}$$

(il suffit en effet pour cela d'avoir $B\big(x_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}\big) \subset B(\ell, \delta)$, or à partir d'un certain rang on aura $\|\ell - x_{\phi(n)}\| \leq \delta/2$ et $1/\phi(n) \leq \delta/2$, ce qui donne bien l'inclusion recherchée). On aboutit bien à une contradiction, ce qui conclut.

2. **Montrer qu'il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$.**

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors *(écriture de la négation)* pour toute famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de K, on a $K \not\subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$. On peut (*construction d'une suite*) construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\forall n \geq 1 \qquad x_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$$

On aura alors, si $p \neq q$, $\|x_p - x_q\| \geq \epsilon$. Et donc (*utilisation de la compacité, recherche d'une contradiction*) si ϕ est une extractrice, $\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\| \geq \epsilon$, ce qui empêche la suite $(x_{\phi(n)})$ de converger. Contradiction.

3. **En déduire qu'il existe une famille $(i_1, \ldots, i_n)$ d'éléments de I telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.**

Reprenons les notations précédentes. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_k, \epsilon) \subset \mathcal{O}_{i_k}$. On a bien alors $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

Exercice 10 (**Utilisation de la connexité par arcs, nécessite T7).** Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. A l'aide des valeurs propres de u, déterminer l'ensemble des valeurs prises sur $E \setminus \{0_E\}$ par l'application

$$x \mapsto \frac{\big(x|u(x)\big)}{\|x\|^2}$$