mp* 24-25 : Révisions - Espaces vectoriels normés

I Chapitres

T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8

II Questions de cours classiques

Comparaison des normes usuelles.
Image continue d'un compact.
Théorème de Heine.
Une suite dans un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

III Exercices

Exercice 1 (Norme intégrale avec poids)**.** Soit E l'espace des fonctions continues sur le segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit w un élément de E. On définit, pour tout élément f de E,

$$N(f) = \int_{[a,b]} |wf| \ .$$

1. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a,b]$ pour que N soit une norme. Vérifier que cette condition n'est pas nécessaire.
2. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a,b]$ pour que N soit équivalente à la norme N_1 usuelle. Vérifier que cette condition est nécessaire.

Exercice 2 (**Étude topologique des sous-groupes additifs de R**)**.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R},+)$ (exemple : $G=\mathbf{Z}$, $G=\mathbf{Q}$). On suppose $G \neq \{0\}$. On note α la borne inférieure de $G \cap \mathbf{R}_*^+$ (on justifiera son existence).

1. Montrer que $\forall g \in G\ \forall n \in \mathbf{Z} \quad ng \in G$.
2. Si $\alpha = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$ (exemple : $G=\mathbf{Q}$).
3. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ (on procèdera par l'absurde, et on montrera que si $\alpha \notin G$ alors il y a au moins deux éléments de G dans $]\alpha, 2\alpha[$) puis que $G = \alpha\mathbf{Z}$.

Exercice 3 (**Résolution typique d'une équation fonctionnelle, programme mpsi).** On cherche les applications continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, qui vérifient, pour tous x et y réels :

$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

Dans la suite, f désigne une telle fonction.

1. Démontrer que $f(0)=0$, et que f est impaire.
2. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier naturel n, $f(nx)=nf(x)$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier n, $f(nx)=nf(x)$.
4. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout nombre rationnel r, $f(rx)=rf(x)$.
5. Démontrer qu'il existe un nombre complexe α tel que, pour tout réel x, $f(x)=\alpha x$.

Exercice 4 (**Une adhérence dans un espace fonctionnel, oral Centrale-Mines).** On considère $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ et $F=\{f\in E\ /\ f(0)=0\}$.

1. On munit E de la norme N_∞. Montrer que F est fermé.
2. On munit E de la norme N_1. Montrer que F est dense dans E.
3. *Nettement plus difficile, on peut passer.* On munit E d'une norme quelconque. Montrer que F est soit dense dans E, soit fermé.

Connaître la comparaison entre N_1, N_2, N_∞. Savoir qu'il est beaucoup plus facile de converger pour l'une des deux premières que pour la dernière.

Exercice 5 (**Compacts emboîtés).**

1. Soit (K_n) une suite de compacts non vides d'un espace vectoriel normé, décroissante pour l'inclusion (pour tout n, $K_{n+1}\subset K_n$. Démontrer que l'intersection $\displaystyle\bigcap_n K_n$ est un compact non vide.
2. Pour tout entier naturel n, montrer que $\delta_n=\displaystyle\sup_{x,y\in K_n} d(x,y)$ est bien défini. On l'appelle diamètre du compact K_n. Démontrer qu'il existe deux éléments x_n et y_n de K_n tels que $\delta_n=d(x_n,y_n)$.
3. Quelle conclusion peut-on rajouter au **a.** sous l'hypothèse supplémentaire $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$? (on ne se sert pas du résultat de la question précédente)

Savoir utiliser la définition de la compacité (Bolzano-Weierstrass)

Exercice 6. Donner un exemple de suite réelle n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence et, pourtant, ne convergeant pas.

Exercice 7 (Une situation classique : se ramener à un compact). Soit f une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans $\mathbf{R}$, continue, et telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty}\Big(f(x)\Big)=+\infty$$

Démontrer que f atteint un minimum.

Savoir, en intersectant avec une boule fermée en dimension finie, ramener à une utilisation de la compacité quelque chose qui a priori ne la supposait pas.

Exercice 8 (Même chose). Soit f une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans un e.v.n., continue, et telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty}||f(x)||=0$$

Démontrer qu'elle est uniformément continue.

Exercice 9 (Propriété de Borel Lebesgue, X-ens principalement...). *mais la précompacité (deuxième question) a déjà été posée dans un écrit Mines*
Soit K un compact d'un espace vectoriel E, $\big(\mathcal{O}_i\big)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que
$K\subset\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$.

1. Démontrer qu'il existe un réel $\epsilon>0$ tel que, pour tout x dans $\mathbf{K}$, la boule ouverte $B(x,\epsilon)$ soit incluse dans un ouvert $\mathcal{O}_i$.
2. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de K telle que $K\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n}B(x_j,\epsilon)$.
3. En déduire qu'il existe une famille $(i_1,\ldots,i_n)$ d'éléments de I telle que $K\subset\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{O}_{i_k}$.

Exercice 10 (Utilisation de la connexité par arcs). Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. A l'aide des valeurs propres de u, déterminer l'ensemble des valeurs prises sur $E\setminus\{0_E\}$ par l'application

$$x\mapsto\frac{\big(x|u(x)\big)}{\|x\|^2}$$