mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Suites, séries, suites et séries de fonctions - Corrigés

Exercice 1 (Césaro)**.** On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

1. On suppose que la suite (u_n) converge vers 0_E. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0_E.
2. On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que la suite (v_n) converge. C'est le théorème de Césaro.
3. Donner un exemple montrant que la réciproque de la propriété précédente est fausse.
4. On suppose que la suite (u_n) est réelle et tend vers $+\infty$. Montrer que la suite (v_n) tend elle aussi vers $+\infty$.

Rappelons que le théorème de Césaro s'obtient, assez simplement et dans le cadre du programme, par sommation des relations de comparaison. C'est important à revoir (S10). Pourquoi alors se fatiguer à le faire "avec les ϵ" ? parce que la technique (le découpage) est intéressante.

1. Soit $\epsilon > 0$, on fixe un rang N_0 tel que

   $$\forall n \geq N_0 \qquad \|u_n\| \leq \epsilon/2$$

   on a alors, pour tout $n \geq N_0$,

   $$\|v_n\| \leq \frac{1}{n+1}(\|u_0\| + \ldots + \|u_{N_0-1}\|) + \frac{n - N_0 + 1}{n+1}\frac{\epsilon}{2}$$

   Le majorant tend vers $\epsilon/2$ quand $n \to +\infty$, il existe donc un rang N_1 tel que

   $$(n \geq N_1) \Longrightarrow (\|v_n\| \leq \epsilon)$$

2. Remarquer que

   $$v_n - \ell = \frac{1}{n+1}\left((u_0 - \ell) + (u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)\right)$$

   permet de se ramener au cas $\ell = 0_E$ déjà traité.
3. Non, l'exemple classique étant $u_n = (-1)^n$.

4. Soit A un réel quelconque, on fixe un rang N_0 tel que
$$\forall n \geq N_0 \qquad u_n \geq A+1$$
on a alors, pour tout $n \geq N_0$,
$$v_n \geq \frac{1}{n+1}(u_0+\ldots+u_{N_0-1}) + \frac{n-N_0+1}{n+1}(A+1)$$
Le minorant tend vers $A+1$ quand $n \to +\infty$, il existe donc un rang N_1 tel que
$$(n \geq N_1) \Longrightarrow (v_n \geq A)$$
5. Et la réciproque est encore fausse...Prenons par exemple $u_n = n$ si n est pair, $u_n = 0$ si n est impair. La suite (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, en revanche la suite (v_n) a bien pour limite $+\infty$ (on peut calculer v_{2n} et v_{2n+1} sans grande difficulté).

Exercice 2 (Etude d'une suite de fonctions). Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions
$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right) \end{array}$$

La convergence simple vers sin ne pose pas de problème. Si on dessine une allure du graphe de f_n (pas inintéressant), on voit qu'il y a convergence uniforme sur tout segment, pas convergence uniforme sur $\mathbf{R}$. La convergence uniforme sur tout segment se voit par exemple en disant
$$\forall x \in [-M, M] \qquad \left|\sin x - \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)\right| \leq \left|x - \frac{n+1}{n}x\right| \leq \frac{M}{n}$$
($M > 0$), la non convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ en regardant par exemple $x_n = n\pi/2$...

Exercice 3 (Suite de fonctions et compacité, niveau X-ens). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un compact K d'un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|.\|_E)$, lipschitziennes de même rapport $\lambda > 0$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur K vers une fonction f.

1. Vérifier que f est, elle aussi, λ-lipschitzienne.
2. On veut montrer que la convergence est uniforme. On fixe $\epsilon > 0$.
   (a) On pose $r = \dfrac{\epsilon}{3\lambda} > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ une famille de $p+1$ éléments de K tels que
   $$K \subset \bigcup_{i=0}^{p} B(x_i, r)$$
   (on pourra raisonner par l'absurde).

(b) Démontrer que, pour tout i tel que $0 \leq i \leq p$, pour tout x dans $B(x_i, r)$,

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 2\frac{\epsilon}{3} + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F$$

(c) Conclure

---

1. On fixe x et y dans K. On a, pour tout $n \geq 0$,

$$\|f_n(y) - f_n(x)\|_F \leq \lambda \|y - x\|_E$$

On prend les limites quand $n \to +\infty$ (on n'a besoin que de la convergence simple), on obtient bien

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \lambda \|y - x\|_E$$

2. (a) La précompacité, un classique...S'il n'y avait pas un tel p, on pourrait construire par récurrence une suite (x_n) d'éléments de K telle que

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad x_{p+1} \notin \bigcup_{i=0}^{p} B(x_i, r)$$

Soit $\phi\ :\ \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante. Alors, pour tout n,

$$x_{\phi(n+1)} \notin B\left(x_{\phi(n)}, r\right)$$

ou encore : $\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\|_E \geq r$. Ce qui empêche la suite $\left(x_{\phi(n)}\right)$ de converger, contradiction avec la compacité de K. <u>Autre rédaction</u> : soit $y \in K$ quelconque. Il ne peut y avoir plus d'un k tel que $x_k \in B\left(y, r/2\right)$. Donc y n'est pas valeur d'adhérence de (x_n). Donc (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence. Contradiction.

(b) Il suffit de penser à écrire

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \|f_n(x) - f_n(x_i)\|_F + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F + \|f(x_i) - f(x)\|_F$$

Mais f_n et f sont λ-lipschitziennes :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 2\lambda \|x - x_i\|_E + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F$$

et $\|x - x_i\| \leq \dfrac{\epsilon}{3\lambda}$.

(c) Par convergence simple, pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, il y a un N_i tel que

$$n \geq N_i \implies \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Prenons alors $N = \max(N_0, N_1, \ldots, N_p)$, on aura

$$(n \geq N) \Longrightarrow \forall x \in K \qquad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon$$

ce qui conclut à la convergence uniforme.

Exercice 4. [Théorème de Dini, Oral Mines, niveau X-ens]
Cet exercice est plutôt un exercice sur la compacité. La deuxième question est assez difficile, il faut bien écrire de quoi on part et ce qu'on cherche pour savoir à quoi appliquer la première question.

1. Soit (K_n) une suite décroissante de fermés de $[a, b]$ $(a < b)$, d'intersection vide. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $K_{n_0} = \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Donner un exemple montrant que, si on supprime l'hypothèse de continuité de f, la résultat n'est plus vrai.
4. Dans les deux premières questions, peut-on remplacer $[a, b]$ par $\mathbf{R}$?

---

1. Si aucun K_n n'est vide, on prend un x_n dans chaque K_n. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, de la suite bornée (x_n) de réels on peut extraire une suite $(x_{\phi(n)})$ convergente. On vérifie que la limite de cette suite extraite est dans $\bigcap K_n$ (soit p quelconque ; si $n \geq p$, on a $\phi(n) \geq n \geq p$, donc $x_{\phi(n)} \in K_p$ par décroissance pour l'inclusion. Ce qui, par contraposée, conclut.
2. Pour tout $\epsilon > 0$, on définit une suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de la manière suivante :

$$K_n = \{x \in [a, b] \ ; \ f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$$

   La continuité de f_n et de f fait que K_n est un fermé de $[a, b]$ (i.e. l'intersection avec $[a, b]$ d'un fermé, i.e. un fermé inclus dans $[a, b]$, puisque $[a, b]$ est lui-même fermé. Il n'y a donc pas vraiment ici de problème de topologie induite). La croissance de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ montre pour tout $x \in [a, b]$ que $x \in K_{n+1} \Rightarrow x \in K_n$. Et la convergence simple fait que, pour tout x, à partir d'un certain rang, $x \notin K_n$. La première question donne alors l'existence d'un n_0 tel que $K_{n_0} = \emptyset$. Qu'a-t-on montré ? que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, b] \qquad f(x) - f_n(x) < \epsilon$$

   Ce qui est bien la convergence uniforme.
3. Il suffit de considérer la suite $(x \mapsto x^n)$ sur $[0, 1]$. Certes elle n'est pas croissante, mais elle est décroissante, ce qui revient au même (si on préfère vraiment la croissance, on considère $(x \mapsto -x^n)$.
4. Non. Prendre par exemple $f_n \ : \ x \mapsto 1 - \dfrac{|x|}{n}$.

Exercice 5 (Nature d'une série). *Exercice « catalogue »*

Discuter la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln(1+a^n n^\alpha)}{n^\beta}$ ($a \geq -1$, α et β réels. Il peut y avoir des cas à éliminer si le terme général n'est pas défini au moins à partir d'un certain rang).

Dans l'expression, $a^n n^\alpha$, le terme « le plus important » est a^n (attention à ne pas mal comprendre cela : évidemment, on n'a pas $a^n n^\alpha \sim a^n$, sauf si $\alpha = 0$)... On discute donc primordialement sur a.

• Cas $a > 1$. Notant u_n le terme général,

$$u_n = \frac{n\ln(a) + \alpha \ln n + \ln(1 + a^{-n}n^{-\alpha})}{n^\beta} \sim \ln(a) n^{1-\beta}$$

Par critère de Riemann, il y a convergence si et seulement si $\beta > 2$.

• Si $0 < a < 1$. On a directement $u_n \sim a^n n^{\alpha-\beta}$, et on obtient la convergence par comparaison ou avec le critère de d'Alembert.

• Si $a = 1$: on distingue $\alpha = 0$, série de Riemann, $\alpha < 0$ on trouve l'équivalent $n^{\alpha-\beta}$ (encore une série de Riemann), $\alpha > 0$:

$$u_n = \frac{\alpha \ln n + \ln(1 + n^{-\alpha})}{n^\beta}$$

d'où un équivalent, et on est ramené à une série de Bertrand (à étudier : ce n'est pas au programme...).

• Si $-1 < a < 0$, convergence absolue avec les mêmes outils que $0 < a < 1$

• Si $a = -1$, $\alpha < 0$, un développement asymptotique à deux termes et le théorème sur les séries alternées...

Les autres cas ne sont pas à étudier (u_n n'est pas défini, même à partir d'un certain rang).

Exercice 6 (comparaison séries-intégrales et croissances comparées : séries de Bertrand). Etudier la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha\ (\ln n)^\beta}$ suivant les valeurs des réels α et β.

Pour $\alpha > 1$, on utilise les croissances comparées, un α' dans $]1, \alpha[$ et une comparaison aux séries de Riemann pour conclure à la convergence. Pour $\alpha < 1$, on utilise la comparaison à $\sum 1/n$ (avec éventuellement croissances comparées), on conclut à la convergence. Pour $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$, même chose. Pour $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ <u>et seulement dans ce cas</u>, on est obligé de revenir à une comparaison série/intégrale, avec calcul de primitives (cas particulier $\beta = 1$), on voit qu'il y a convergence si et seulement si $\beta > 1$.

Un petit peu plus explicitement :

Si $\alpha > 1$, on prend une « marge de sécurité » : soit δ tel que $1 < \delta < \alpha$. Alors

$$\frac{1}{n^\alpha\ (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$$

ce qui donne la convergence.
Si $\alpha < 1$, alors

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha\ (\ln n)^\beta}\right)$$

ce qui donne la divergence.
Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$, alors

$$\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha\ (\ln n)^\beta}\right)$$

donne encore la divergence.
On est donc réduit au cas $\alpha = 1$, $\beta > 0$, qui se traite par comparaison à une intégrale.

Exercice 7 (comparaison série-intégrale : étude des restes). Pour quelles valeurs du réel α le nombre $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)^{-\alpha}$ existe-t-il ? Etudier alors la nature de la série de terme général u_n.

Le reste existe si et seulement si $\alpha > 1$ (Riemann). On peut alors encadrer le reste par deux intégrales calculables :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leq u_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha}$$

en déduire un équivalent de u_n : $u_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$, et obtenir que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 8 (Utilisation d'un développement asymptotique). Etudier suivant les valeurs du réel α la nature de la série de terme général

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}\ .$$

Si $\alpha = 0$, la série n'est pas définie (un terme sur deux n'existe pas). Si $\alpha < 0$ elle diverge grossièrement, on suppose donc $\alpha > 0$ (et on commence à $n = 2$). Un équivalent $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right)$ pourrait alors laisser croire qu'il y a convergence (tssa), mais quand on n'a pas une série à termes réels positifs, on ne peut pas utiliser le critère d'équivalence (on doit comparer à une série à termes réels positifs). On écrit donc

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}}$$

Ou encore
$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$
En développant on obtient
$$u_n = v_n + w_n$$
avec $v_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ et $w_n = \dfrac{1}{n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Mais $\sum v_n$ converge par théorème sur les séries alternées, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum w_n$ converge, si et seulement si $\alpha > 1/2$ (Riemann).

Exercice 9 (Sommation des relations de comparaison : cas de divergence). On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Démontrer que (u_n) converge vers 0.
2. En utilisant le développement du sinus à un ordre convenable au voisinage de 0, établir le développement asymptotique suivant :
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + \underset{n\to\infty}{o} \ (1)$$
En déduire l'équivalent suivant :
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

---

1. On commence par remarquer que le segment $[0,1]$ est stable par la fonction sin (car $1 \leq \pi$), donc la suite (u_n) est bien définie à valeurs dans $[0,1]$. L'inégalité classique
$$\forall x \geq 0 \qquad \sin x \leq x$$
(obtenue par étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$, ou par concavité de sin sur $[0,\pi]$, l'inégalité étant évidente au-delà de π) permet alors de dire
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} \geq u_n$$
et la suite (u_n), décroissante et minorée par 0, converge vers une limite ℓ qui vérifie, par continuité de sin,
$$\sin \ell = \ell$$
d'où $\ell = 0$ (l'étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$ montre en effet qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$, donc injective : 0 est le seul point fixe de sin).
$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$$

2. Et on peut donc écrire

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^3\right)$$

(on a même un $o\left(u_n^4\right)$, mais ce n'est pas utile comme on le verra dans la suite des calculs). Développons comme indiqué dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-2} &= u_n^{-2}\big(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\big)^{-2} \\
&= u_n^{-2}\big(1 - 2(-\frac{u_n^2}{6}) + o\left(u_n^2\right)\big)
\end{aligned}$$

(on peut utiliser le développement limité de $(1+y)^{-2}$ au voisinage de 0, car u_n^2 a une limite nulle). On obtient bien

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + o\left(1\right)}$$

qui peut s'écrire sous forme d'équivalent :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$$

On utilise alors la sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence (on pourrait ici utiliser le théorème de Césaro, mais il est hors-programme) ; on est bien dans le cadre d'application de ce résultat, car $\frac{1}{3}$ est le terme général strictement positif d'une série divergente (grossièrement), ce qui implique qu'à partir d'un certain rang au moins $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} > 0$, c'est d'ailleurs vrai dès le rang 0 par strictes décroissance et positivité de la suite (u_n), mais peu importe, « à partir d'un certain rang » nous suffit. On peut donc écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3}$$

(Dans le cours, on somme de 0 à n, mais ici, on préfère sommer de 0 à $n-1$ pour tomber directement sur le résultat sans avoir à faire un décalage d'indice. Bien évidemment, $S_n \sim \Sigma_n$ ou $S_{n-1} \sim \Sigma_{n-1}$, c'est la même chose) On réécrit cela :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$$

Mais $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{1}{u_n^2}$ (car $\frac{1}{u_n^2} \to +\infty$), et donc

$$\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$$

On peut inverser un équivalent, diviser par n, prendre les racines carrées si les deux membres sont positifs (si on en doute, on revient à la définition d'un équivalent, et on note que l'inverse ou la racine carrée d'une suite qui converge vers 0 converge aussi vers 0) ; on aboutit à

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

---

3. On pousse le développement un cran plus loin :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-2} &= u_n^{-2}\big(1-\frac{u_n^2}{6}+\frac{u_n^4}{120}+o\,(u_n^4)\big)^{-2} \\
&= u_n^{-2}\big(1-2(-\frac{u_n^2}{6}+\frac{u_n^4}{120})+\frac{(-2)\times(-3)}{2}(\frac{u_n^4}{36})+o\,(u_n^4)\big) \\
&= u_n^{-2}\big(1+\frac{u_n^2}{3}-\frac{u_n^4}{60}+\frac{u_n^4}{12}+o\,(u_n^4)\big) \\
&= u_n^{-2}+\frac{1}{3}+\frac{u_n^2}{15}+o\,(u_n^2)
\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{u_n^2}{15}}$$

...et donc, reprenant l'équivalent précédent :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5n}$$

On peut encore ici utiliser la sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence ($\sum 1/n$ diverge, est à termes réels positifs, et donc le premier membre est à termes positifs à partir d'un certain rang). On obtient

$$\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_1^2}-\frac{(n-1)}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5k}$$

et donc, en utilisant l'équivalent connu des sommes partielles de la série harmonique (que l'on peut retrouver par comparaisons sommes-intégrales),

$$\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_1^2}-\frac{(n-1)}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5}\ln(n-1)$$

Mais $\ln(n-1)=\ln n+\ln(1-1/n)\sim\ln n$. Et donc :

$$\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_1^2}-\frac{(n-1)}{3}=\frac{1}{5}\ln n+o\,(\ln n)$$

ou encore, en éliminant les termes négligeables devant $\ln n$,

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{5}\ln n + o\,(\ln n)$$

et donc

$$\begin{aligned} u_n &= \Big(\frac{n}{3} + \frac{1}{5}\ln n + o\,(\ln n)\Big)^{-1/2} \\ &= \Big(\frac{n}{3}\Big)^{-1/2}\Big(1 + \frac{3}{5}\frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\Big)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{n}}\Big(1 - \frac{3}{10}\frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n^{3/2}} + o\Big(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\Big)}$$

Aller plus loin pose des problèmes intéressants...et pas seulement techniques !

Exercice 10 (Séries télescopiques ; sommation des relations de comparaison : cas de convergence).

1. On définit, pour tout entier naturel non nul n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \ln n\ .$$

Trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) converge. On appelle γ sa limite.

2. En comparant les restes des séries $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum -\frac{1}{2n^2}$, démontrer que

$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{2n}\Big(1 - (1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\,\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\,\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à comparer les restes, et à encadrer ceux de $\sum 1/n^3$ par des intégrales qu'on calcule, comme dans la question précédente. On obtient

$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}\ \underset{n\to\infty}{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Exercice 11 (**Utilisation d'une sommabilité simple).** Démontrer que les deux séries $\sum_{k\geq 2}\big(\zeta(k)-1\big)$ et $\sum_{k\geq 2}(-1)^k\big(\zeta(k)-1\big)$ convergent, et calculer leurs sommes.

Vu en cours ; pour la première, on développe la définition de $\zeta(k)$ en série, ce qui amène naturellement à s'intéresser à la sommabilité de la suite double

$$\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\geq 2,k\geq 2}$$

Mais posant $u_{n,k}=\dfrac{1}{n^k}$, on a pour tout $n\geq 2$ la série $\sum_k u_{n,k}$ qui converge, et

$$s_n=\sum_{k=2}^{+\infty}u_{n,k}=\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{n(n-1)}$$

Donc $\sum_{n\geq 2} s_n$ converge, et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}s_n=1$$

(série télescopique), par théorème de sommabilité par paquets la famille $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)_{n\geq 2,k\geq 2}$ est sommable, par sommation par paquets on peut la sommer « dans l'autre sens » (par rapport à n puis à k) et on obtient que la première série converge, sa somme vaut 1. Pour la deuxième, il y a seulement un signe qui se rajoute, ce qui fait que la sommabilité a déjà été examinée, il n'y a plus qu'à sommer par paquets, on trouve 1/2.

Exercice 12 (**Sommabilité).** Démontrer que la fonction $x\mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

On part de

$$\exp(\exp x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nx}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p x^p}{n!\ p!}\right)$$

ce qui ramène à une étude de sommabilité et une interversion de l'ordre des sommations : voir cours.

Exercice 13 (Sommabilité). On note $\ell^1(\mathbf{Z})$ l'espace vectoriel des familles sommables de réels indexées par $\mathbf{Z}$. Si u et v sont dans $\ell^1(\mathbf{Z})$, on définit $u * v$ par

$$\forall n \in \mathbf{Z} \qquad (u * v)(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} u(k)v(n-k)$$

Montrer que $u * v$ est bien défini et est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$. Comparer sa somme avec celles de u et v.

La famille v, sommable, est bornée (pour tout k, $|v(k)| \leq \sum_{j \in bfZ} |v(j)| < +\infty$). On peut écrire

$$\forall k \in \mathbf{Z} \qquad |u(k)v(n-k)| \leq \|v\|_\infty |u(k)|$$

Or la famille u est sommable, donc, par comparaison, la famille $(u(k)v(n-k))_{k \in \mathbf{Z}}$ l'est. D'où la bonne définition de $(u * v)(n)$. On veut maintenant montrer, en quelque sorte,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} u(k)v(n-k) \right| < +\infty$$

Pour ceci, il est naturel de définir la « suite double » (ce n'est pas vraiment une suite double, l'ensemble d'indexation est $\mathbf{Z}^2$, et n'est pas $\mathbf{N}^2$) w par

$$w(n,k) = u(k)v(n-k)$$

Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, définissons $I_m = \{(n,m) \; ; \; n \in \mathbf{Z}\}$. Les I_m $(m \in \mathbf{Z})$ forment une partition de $\mathbf{Z}^2$. Pour tout m, la famille $(|w(n,k)|)_{(n,k) \in I_m}$ est sommable, et

$$s_m = \sum_{(n,k) \in I_m} |w(n,k)| = |u(m)| \sum_{j \in \mathbf{Z}} |v(j)|$$

Donc la famille $(s_m)_{m \in \mathbf{Z}}$ est sommable et, par sommabilité par paquets, la famille w est sommable.
Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, définissons $J_m = \{(m,k) \; ; \; k \in \mathbf{Z}\}$. Les J_m $(m \in \mathbf{Z})$ forment une partition de $\mathbf{Z}^2$. Pour tout m, la famille $(|w(n,k)|)_{(n,k) \in J_m}$ est sommable, et sa somme est

$$\sigma_m = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |w(m,k)| = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |u(k)v(m-k)|$$

De plus, la famille $(\sigma_m)_{m \in \mathbf{Z}}$ est sommable, et comme $|(u * v)(m)| \leq \sigma_m$, par comparaison la famille $u*v$ est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$. Et donc, par théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (u * v)(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} u(k)v(n-k) \right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} u(k)v(n-k) \right)$$

D'où, finalement,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (u * v)(n) = \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} u(n) \right) \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} v(n) \right)$$

Exercice 14 (Etude d'une série de fonctions). Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$ converge-t-elle ? Démontrer que sa somme est continue sur son domaine de définition. Démontrer qu'elle est dérivable sur $\mathbf{R}_*^+$ et calculer sa dérivée. En déduire la valeur de la somme de la série harmonique alternée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ .$$

Rappel : la méthode la plus rapide, avec le programme, pour calculer la somme de la série harmonique alternée, est avec le dse de $\ln(1+.)$, *voir plus loin.*

Pour tout $x \geq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$ vérifie les hypothèses du théorème sur les séries alternées (pour $x > 0$, elle est aussi absolument convergente, mais cela ne permettra pas de montrer la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$). On peut donc définir, pour $x \geq 0$,

$$R_n(x) = \sum_{k\geq n+1}(-1)^{k+1}\frac{e^{-kx}}{k}$$

et obtenir la majoration :

$$\forall x \geq 0 \qquad |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

qui montre la convergence uniforme de la suite (R_n) vers 0 donc la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0, +\infty[$. On a oublié de dire qu'ailleurs, sur $]-\infty, 0[$, il y avait par croissances comparées divergence grossière.
Notons

$$f_n\ :\ x \longmapsto (-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$$

Elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$f_n'\ :\ x \longmapsto (-1)^n e^{-nx}$$

Soit $K = [a, b]$, $0 < a < b$, alors

$$\|f'|_K\|_\infty \leq e^{-na}$$

et $\sum e^{-na}$ converge, donc $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. Par théorème, $\sum f_n$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty]$, de dérivée

$$x \longmapsto \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

(série géométrique). Par conséquent, notant, si $x \geq 0$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{n}$$

il existe une constante c telle que

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + c$$

Mais par théorème de la double limite on trouve que $c = 0$, et par continuité en 0, finalement,

$$f(0) = \ln 2$$

Exercice 15 (Interversion série-intégrale avec « le » théorème). Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

Si $x \in]0,1[$,

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \ln x$$

On note $\phi_n(x) = (-1)^n x^{2n} \ln x$; on calcule

$$N_1(\phi_n) = -\int_0^1 x^{2n} \ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(intégration par parties). $\sum N_1(\phi_n)$ converge, les autres hypothèses du théorème (continuité par morceaux et intégrabilité de ϕ_n, convergence simple de $\sum \phi_n$, continuité par morceaux de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n$) ont simplement à être citées) sont vérifiées, on peut donc intervertir. Et le résultat en découle.

Exercice 16 (Interversion série-intégrale sans théorème). Soit α un réel strictement positif. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} - \cdots$$

Les théorèmes sur les interversions séries-intégrales n'étant pas utilisables, on écrira, en développant en série $1/(1+x)$,

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = S_n(x) + R_n(x)$$

où S_n est une somme partielle, et R_n un reste dont on montrera que l'intégrale converge vers 0, avec le théorème de convergence dominée.

On a, si $x \in]0,1[$,

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{\alpha-1+n}$$

Si l'on note $\phi_n(x) = (-1)^n x^{\alpha-1+n}$, $\sum N_1(\phi_n)$ diverge, on ne peut donc pas appliquer le théorème. Mais on peut écrire (sommation géométrique encore)

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{\alpha-1+k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{\alpha+n}}{1+x}$$

Toutes ces choses sont intégrables sur $]0,1[$, donc

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n}}{1+x}\mathrm{d}x$$

L'intégrale au second membre tend vers 0 quand $n \to +\infty$ soit par convergence dominée (domination par 1...) soit directement, sans théorème, par

$$\left|\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n}}{1+x}\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 x^{\alpha+n}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\alpha+n+1}$$

et on obtient donc bien

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$$

Exercice 17 (Série entière). Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

La série converge pour $x = 1$ (théorème spécial sur les séries alternées), donc le rayon de convergence est ≥ 1. Le théorème spécial sur les séries alternées s'applique pour tout $x \in [0,1]$, donc on peut majorer

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k x^k\right| \leq a_{n+1}x^{n+1} \leq a_{n+1}$$

ce qui donne une convergence uniforme sur $[0,1]$ donc la continuité. Les applications partent de développements en séries entières que l'on connaît...

Exercice 18 (Interversion série-intégrale). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme. Soit r un élément de $[0, R[$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

On note alors $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier l'existence de $M(r)$, et majorer $|a_n|$ à l'aide de r, n, $M(r)$.
Que peut-on dire d'une série entière dont le rayon de convergence est infini et dont la somme est bornée ?

Si $0 \leq r < R$, on a $|re^{i\theta}| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{ip\theta}$$

et donc, si n est un entier naturel,

$$f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On peut alors se douter qu'il va s'agir d'un problème de permutation série-intégrale. Définissons (après avoir fixé $n \in \mathbf{N}$)

$$\phi_p \;:\; \theta \longmapsto a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On a $N_\infty(\phi_p) = |a_p|r^p$, donc $\sum\limits_p N_\infty(\phi_p)$ converge (car $r < R$), donc $\sum \phi_p$ converge <u>uniformément</u> car normalement sur le <u>segment</u> $[0, 2\pi]$. On peut alors permuter.
On peut aussi utiliser le théorème le plus fréquemment utilisé pour ce genre de permutation (parce qu'il ne demande pas la convergence uniforme, parce qu'il n'impose pas d'être sur un segment...), celui dont l'hypothèse cruciale est la convergence de $\sum N_1(\phi_p)$. Il suffit de remarquer que

$$N_1(\phi_p) \leq 2\pi|a_p|r^p$$

Bref, tout cela permet d'écrire

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

Or on calcule facilement (surtout sans repasser par cosinus et sinus !) :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{si} \quad k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$$

Si $k = 0$, le calcul est immédiat. On aboutit finalement à la formule souhaitée.

Le cercle de centre 0 et de rayon r est un compact inclus dans le disque ouvert de convergence, donc f, continue, est bornée sur ce compact, ce qui justifie l'existence de $M(r)$. Une majoration d'intégrale standard donne alors

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

Si $R = +\infty$ et si f est bornée, on peut majorer tous les $M(r)$ par un même M indépendant de r. On a alors

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

et en prenant la limite quand $r \to +\infty$, on trouve

$$\forall n \geq 1 \qquad a_n = 0$$

et donc f est constante.
Par exemple, le cosinus, le sinus sont constants (ça, c'est sûrement faux, mais pourquoi ?).

Exercice 19 (Développement en série entière d'une fonction rationnelle).
Exercice important, car ce sont des dse classiques, et il faut savoir jouer sur la dérivation et le produit de Cauchy de séries entières.

1. Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.
2. En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto 1/(z-a)^m$ est développable en série entière sur $D(0, |a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.
3. Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)

Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.

On essaye de se ramener à un dse classique : celui de $\dfrac{1}{1-u}$ sur $D(0, 1)$. On écrit donc

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} \frac{1}{1-z/a}$$

et donc, sur $D(0,|a|)$,

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^n}z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n$$

Il n'est pas difficile de voir que le rayon de convergence de cette série entière est $|a|$.

> En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto 1/(z-a)^m$ est développable en série entière sur $D(0,|a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.

Lorsqu'on cherche à passer du dse de $\dfrac{1}{1-z}$ à un dse de $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, on pense peut-être d'abord à la dérivation. Le problème est que dans le cadre du programme, on ne peut pas dériver des fonctions d'une variable complexe. Intéressons-nous quand même à cette dérivation :
Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, de

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on déduit

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Mais on peut dériver autant qu'on veut. On aura donc, en dérivant $m-1$ fois le dse de $1/(1-x)$ (on suppose $m \geq 2$),

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{(m-1)!}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-m+1)!} x^{n-m+1}$$

Ou encore, en arrangeant les expressions :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \binom{n}{m-1} x^{n-m+1}$$

que l'on peut réindexer en

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+m-1}{k} x^k$$

Voilà...pour une variable réelle. Il est à noter que seule notre ignorance nous empêche d'étendre ce qui vient d'être fait à une variable complexe ! mais dans le cadre du programme, une autre opération que la dérivation nous permet d'avancer : le produit de Cauchy. En effet, l'écriture

$$\frac{1}{(z-a)^{m+1}} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{(z-a)^m}$$

nous permet, par récurrence, de conclure directement à la développabilité en série entière sur $D(0,|a|)$ de $z \mapsto 1/(z-a)^m$.
En revanche, cette technique par produit de Cauchy n'est pas idéale pour le calcul des coefficients. Définissons :

$$\forall m \geq 1 \ \forall z \in D(0,|a|) \quad \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} z^n$$

On a déjà

$$\forall n \geq 0 \quad \alpha_{1,n} = \frac{-1}{a^{n+1}}$$

(dse de $1/(z-a)$, voir ce qui précède), puis, par produit de Cauchy :

$$\forall m \geq 1 \quad \forall n \geq 0 \qquad \alpha_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{m,k}\alpha_{1,n-k}$$

donc, par exemple, pour s'entraîner un peu :

$$\alpha_{2,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{a^{k+1}} \frac{-1}{a^{n-k+1}} = \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

Si on continue, les calculs sont moins pratique. Mais si on sait que

$$\forall m \geq 1 \ \forall z \in D(0,|a|) \quad \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} z^n$$

alors, de

$$\frac{1}{(z-a)^m} = \frac{(-1)^m}{a^m} \frac{1}{(1-z/a)^m}$$

on déduit

$$\forall m \geq 1 \ \forall u \in D(0,1) \quad \frac{1}{(1-u)^m} = (-a)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} a^n u^n$$

$(z = au,\ u = z/a)$; ce dse est a fortiori valable sur $]-1,1[$ et donc, **par unicité du dse**, les coefficients sont ceux qu'on a calculés par dérivation :

$$\alpha_{m,n} = \frac{(-1)^m}{a^{n+m}} \binom{n+m-1}{n}$$

> Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)

Appelons $a_1 \ldots, a_p$ les pôles de F (tous non nuls), de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F(z) = E(z) + \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{j,k}}{(z-a_j)^k} \Big)$$

les $\alpha_{j,k}$ étant des nombres complexes. La partie entière est polynomiale, donc développable en série entière sur $\mathbf{C}$. Par combinaison linéaire, F est au moins développable en série entère sur $D(0,r)$ où $r = \min\limits_{1\leq j\leq p}(|a_j|)$. Mais s'il y a un pôle au moins double dont le module est égal à r, ou si plusieurs pôles ont pour module r, on ne peut exclure a priori que le rayon de convergence d'une combinaison linéaire de séries entières de rayon $\geq r$ soit strictement supérieur à r.
Cependant, ici, cela ne se peut. Supposons en effet

$$\forall z \in D(0,r) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$$

et supposons que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n \mu_n z^n$ soit $R > r$.
Notons alors, pour tout $z \in D(0,R)$,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$$

G coïncide avec F sur $D(0,r)$, et est bornée sur $D'(0,r)$ qui est un compact inclus dans $D(0,R)$. Soit a_{i_0} un pôle de F tel que $|a_{i_0}| = r$. Alors

$$\left|G(ta_{i_0})\right| = \left|F(ta_{i_0})\right| \xrightarrow[t\to 1, t<1]{} +\infty$$

Mais cela contredit le fait que G est bornée sur $D'(0,r)$.

> On écrit F sous forme irréductible : $F = P/Q$. En écrivant $QF = P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.

Le produit QF d'une fonction polynôme, donc développable en série entière avec pour rayon de convergence $+\infty$, par F, développable en série entière avec pour rayon de convergence $r > 0$, est développable en série entière au moins sur $D(0,r)$ par produit de Cauchy. Ecrivons

$$\forall z \in D(0,|a|) \quad Q(z)F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_n z^n$$

Comme par ailleurs $QF = P$, on peut aussi écrire, pour tout $z \in D(0,|a|)$ (et plus généralement pour tout z qui n'est pas un pôle de F)

$$Q(z)F(z) = P(z) = \sum_{n=0}^{d} p_n z^n$$

(P est polynomial). Mais un développement polynomial est un développement en série entière particulier, l'unicité du développement en série entière s'applique donc et permet d'écrire

$$\forall n > d \qquad \nu_n = 0$$

ce qui, écrivant $Q(z) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_\delta z^\delta$ et utilisant la formule qui donne le produit de Cauchy, donne

$$\forall n > d \qquad \sum_{k=0}^{\delta} q_k \mu_{n-k} \ = \ 0$$

($\sum_{\mu=0}^{+\infty} \mu_n z^n$ désignant toujours le dse de F). Mais $q_0 \neq 0$ (0 n'est pas pôle de F), on obtient donc

$$\forall n > d \qquad \mu_n = -\sum_{k=1}^{\delta} \frac{q_k}{q_0} \mu_{n-k} \ = \ -\frac{q_1}{q_0}\mu_{n-1} - \ldots - \frac{q_\delta}{q_0}\mu_{n-\delta}$$