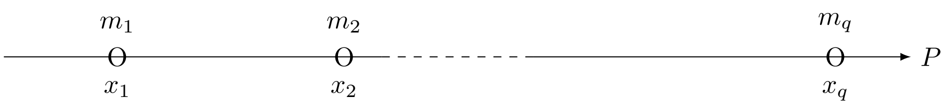
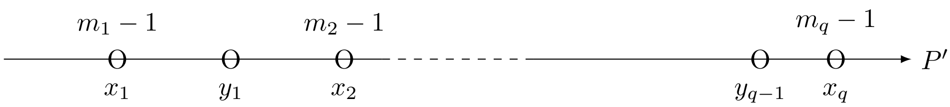
mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Dérivation, intégration - Corrigés

Exercice 1 (**Théorème de Rolle**). Soit P un polynôme réel scindé (sur $\mathbf{R}$). Démontrer que son polynôme dérivé P' est aussi scindé.

Vu en cours. Dessiner les zéros de P sur un axe avec leur multiplicité écrite au-dessus :





Si on doit rédiger, à l'écrit :
On nomme $x_1 < \ldots < x_q$ les zéros de P, on note m_k la multiplicité de x_k ($1 \leq k \leq q$). Chaque x_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$ (*Rappel : il est convenu dans le programme qu'être racine de multiplicité* 0*, c'est n'être pas racine*). Par théorème de Rolle, pour tout $k \in [\![1, q-1]\!]$ il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ racine de P'. On a donc en tout, comptées avec leur multiplicité, au moins $\displaystyle\sum_{k=1}^{q}(m_k - 1) + (q-1) = \left(\sum_{k=1}^{q} m_k\right) - 1 = \deg(P) - 1 = \deg(P')$ racines de P', il ne peut y en avoir plus et P' est scindé.

Exercice 2 (**Théorème de Rolle**). Démontrer que le polynôme

$$D^n\Big((X^2-1)^n\Big)$$

est scindé sur $\mathbf{R}$, que toutes ses racines sont simples et appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

Vu en cours. Dans le style du précédent. Corrigé sur demande.

Exercice 3 (Théorème de classe C^k par prolongement). On définit, si $x > 0$, $\phi(x) = \exp(-1/x)$.

1. Démontrer que ϕ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty($ et que sa dérivée k-ième est de la forme $x \mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$, où P_k est polynomiale. On prolonge ϕ à $\mathbf{R}$ en définissant, si $x \leq 0$, $\phi(x) = 0$. Démontrer que ϕ est de classe C^∞. Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de la fonction $x \mapsto \phi(x+2)\phi(-1-x)$, puis de son unique primitive qui a pour limite 0 en $-\infty$.

Fait en cours. Pour la première question, récurrence. Puis théorème de classe C^k par prolongement pour tout $k \geq 1$, que l'on peut appliquer car pour tout k $\phi^{(k)}$ a en 0 une limite : 0 (croissances comparées). Puis des dessins simples à faire grossièrement, la dernière (primitive qui a pour limite 0 en ∞ est nulle jusqu'à -2, constante strictement positive à partir de -1, et réalise un raccord C^∞ entre ces deux demi-droites.

Exercice 4 (TCVD après un changement de variable). Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}} dt$.

Notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}} dt = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$. La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $]0, 1[$, la majoration $|f_n| \leq 1$ est une domination convenable, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que (I_n) converge vers 0. Ce qui bien sûr ne nous donne pas d'équivalent.
L'idée dans ce genre d'exercice est de faire un changement de variable qui « fasse sortir quelque chose qui tend vers 0 ». Ici, $t^n = u$, $t = u^{1/n}$, semble simple, et fait sortir $1/n$ grâce à $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n} u^{-1+1/n}$. On obtient alors

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}} \mathrm{d}u$$

Posons $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}} \mathrm{d}u = \int_0^1 g_n(u)\mathrm{d}u$. La suite (g_n) converge simplement vers $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$, et est majorée par cette fonction, qui est intégrable et indépendante de n, ce qui constitue une bonne domination. Donc

$$J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u}} \mathrm{d}u = \left[2\sqrt{1+u}\right]_0^1 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

. D'où l'équivalent cherché, $2\left(\sqrt{2}-1\right)/n$.

Exercice 5 (TCVD avec fonction indicatrice). Pour tout entier naturel non nul n, on définit

$$I_n = \int_0^n \big(1 - \frac{x}{n}\big)^n \ \ln x \ dx \ .$$

Démontrer que la suite (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ \ln x \ dx$.

On écrit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ avec

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ \ln x \ \mathbf{1}_{]0,n]}(x)$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne comme d'habitude la fonction indicatrice d'un ensemble. Si l'on fixe x, à partir d'un certain rang (qui dépende de x mais peu importe) on aura

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \ \ln x$$

et on en déduit (savoir l'écrire sans prendre des exponentielles d'équivalents) que sur $]0, +\infty[$

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$$

où $f \ : \ x \longmapsto e^{-x} \ \ln x \ dx$. Pour la domination, on remarque que la célèbre inégalité

$$\forall u > -1 \qquad \ln(1+u) \leq u$$

nous permet de dire

$$\forall x > 0 \qquad |f_n(x)| \leq |\ln x \ |e^{-x}$$

et la fonction « dominante » est bien intégrable, car $o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (croissances comparées) et $o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$ (croissances comparées).

Exercice 6 (Intégrabilité avec des équivalents). On désigne par α et β deux réels positifs. Examiner l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_*^+$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} \ .$$

Si $\alpha = 0$, la fonction est nulle. . .on suppose donc $\alpha > 0$. Notons que la fonction

$$f \ : \ x \longmapsto \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}$$

est continue positive sur $]0,+\infty[$. Or

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^\beta}$$

et

$$f(x) = x^{\alpha-\beta}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha x^{\alpha-\beta-1}$$

Il y a donc intégrabilité si et seulement si $\beta < 1$ et $\alpha-\beta-1 < -1$.

Exercice 7 (Intégrabilité par comparaison). Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que $t \mapsto e^{-ta}f(t)$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Démontrer que, si $x > a$, alors $t \mapsto e^{-tx}f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Si $x > a$, $\forall t \in [0,+\infty[\quad |e^{-tx}f(t)| = e^{-tx}|f(t)| \leq e^{-ta}|f(t)| = |e^{-ta}f(t)|$
ce qui suffit pour conclure.

Exercice 8 (L'intégrale semi-convergente la plus célèbre...). et la plus typique !
Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

converge.

Vu en cours. Intégration par parties, en faisant attention à ne pas introduire de problème artificiel en 0, soit en primitivant astuieusement $\sin t$ en $1-\cos t$, soit plus simplement en mettant de côté $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ qui ne pose pas de difficulté.

Exercice 9 (Intégrale généralisée : plus difficile !(*)). Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ta}f(t)\ dt$ converge. Démontrer que, si $x > a$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(t)\ dt$ converge (ici, on ne suppose pas l'intégrabilité ; on pourra introduire la fonction

$$F\ :\ y \mapsto \int_0^y e^{-ta}f(t)\ dt$$

pour faire une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A e^{-tx}f(t)\ dt$)

Pas facile, mais très représentatif de ce qu'on rencontre avec les intégrales convergentes de fonctions non intégrables : bien souvent c'est l'intégration par parties qui sert. Suivons les notations de l'énoncé, et intégrons donc par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-tx} f(t)\ dt &= \int_0^A e^{-ta} f(t)\ e^{-t(x-a)}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^A F'(t)\ e^{-t(x-a)}\ \mathrm{d}t \\ &= \Big[e^{-t(x-a)}\ F(t)\Big]_{t=0}^{t=A} + (x-a)\int_0^A F(t)\ e^{-t(x-a)}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais d'une part

$$e^{-A(x-a)}\ F(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

(car F a une limite finie en $+\infty$) et d'autre part F est bornée (continue sur $[0,+\infty[$ et ayant une limite réelle en $+\infty$) donc $t \longmapsto F(t)\ e^{-t(x-a)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ($t \longmapsto e^{-t(x-a)}$ l'est), ce qui conclut.
Remarque : ici, par d'intégrabilité, seulement des intégrales convergentes, donc des problèmes de limites.

Exercice 10 (Intégrale fonction de ses bornes). Soit $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\ dt$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée.

La fonction est a priori définie sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$: si $x\neq 0$, $[x,3x]\subset\mathbf{R}_*^+$ ou $[x,3x]\subset\mathbf{R}_*^-$.
Il faut retenir devant ce genre de situation deux idées importantes :
<u>Première idée :</u> Introduire une primitive h de $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t}$ sur $\mathbf{R}_*^+$ ou sur $\mathbf{R}_*^-$. On peut alors écrire

$$f(x) = F(3x) - F(x)$$

ce qui montre que f est C^1 sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, de dérivée

$$x \longmapsto 3\frac{\cos(3x)}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos(3x)-\cos x}{x}$$

On profite alors (<u>encore une idée !</u>) du développement en série entière du cosinus pour écrire

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(3^{2n}-1)x^{2n}$$

somme d'une série entière de rayon de convergence infini, f' a une limite réelle en 0. Pour appliquer le théorème de classe C^1 par prolongement il nous suffirait d'une limite en 0 pour f, ce qui peut se faire par la deuxième idée, ou encore en observant l'expression : $\cos t$, au voisinage de 0, est proche de 1, on peut donc écrire

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \; + \; \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 3 + \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

et la fonction $\xi \;:\; t \longmapsto (\cos t \;-\; 1)/t$ se prolonge par continuité en 0, a des limites réelles en $\pm\infty$, donc est bornée sur $\mathbf{R}$, et on peut écrire

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq 2|x|\;\|\xi\|_\infty$$

ce qui montre que f a pour limite $\ln 3$ en 0 et conclut : f se prolonge en une fonction C^1 dont la dérivée est de classe C^∞ car somme d'une série entière de rayon infini.

<u>Deuxième idée :</u> Changement de variable pour ramener l'intervalle d'intégration à $[0,1]$:

$$t = x + 2xu$$

On obtient

$$f(x) = 2\int_0^1 \frac{\cos\left[(1+2u)x\right]}{1+2u}\,\mathrm{d}u$$

Ou encore

$$f(x) = 2\int_0^1 h(x,u)\,\mathrm{d}u$$

Où h est définie sur $\mathbf{R}\times[0,1]$ par

$$h(x,u) = \frac{\cos\left[(1+2u)x\right]}{1+2u}$$

• Pour tout x, $u \mapsto h(x,u)$ est continue sur $[0,1]$, intégrable donc (on est sur un segment).

• h est indéfiniment dérivable par rapport à x, et

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} \;:\; (x,u) \longmapsto (1+2u)^{k-1}\cos\left[(1+2u)x + k\frac{\pi}{2}\right]$$

est continue par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbf{R}\times[0,1]$. On domine facilement :

$$\forall (x,u)\in\mathbf{R}\times[0,1] \qquad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,u)\right| \leq (1+2u)^{k-1}$$

La fonction $u \longmapsto (1+2u)^{k-1}$ est intégrable sur $[0,1]$. Donc par théorème de classe C^∞ d'une fonction définie par une intégrale, on conclut.

Exercice 11 (Continuité et dérivation sous le signe $\int$). *Exercice ne figurant pas dans les feuilles jaunes ; bon exercice bilan, qui se fait facilement si on utilise bien les théorèmes*

Soit $f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 ; montrer que

$$g\ :\ (x,y,z) \mapsto \int_x^y f(z,t)\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^3$.
En déduire une expression de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \int_{\cos x}^{\sin x} f(x^2,t)\mathrm{d}t$$

On va utiliser le théorème fondamental, qui dit que g est C^1 si et seulement si ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbf{R}^3$. Commençons par le plus facile : pour tous x et z réels, la fonction $t \mapsto f(z,t)$ est continue, donc par (un autre) théorème fondamental, $y \mapsto g(x,y,z)$ est de classe C^1, de dérivée $y \mapsto f(z,y)$. Donc $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = f(z,y)$$

et donc $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est continue sur $\mathbf{R}^3$. On montre exactement de même que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbf{R}^3$, et on a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = -f(z,x)$$

Pour dériver par rapport à z, c'est un peu plus long puisqu'il faut utiliser le théorème de classe C^1 des intégrales dépendant d'un paramètre.
Fixons x et y réels. L'application

$$f\ :\ (z,t) \mapsto f(z,t)$$

vérifie les propriétés suivantes :
• Pour tout $z \in \mathbf{R}$, $f(z,.) \colon t \to f(z,t)$ est continue sur le segment $[x,y]$, donc intégrable sur ce segment (remarque : la continuité par morceaux suffirait).
• f est dérivable par rapport à sa première variable sur $\mathbf{R}^2$, et
•• Pour tout $z \in \mathbf{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z,.)$ est continue (la continuité par morceaux suffirait) sur $[x,y]$, donc intégrable sur $[x,y]$.
•• Pour tout $t \in [x,y]$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(.,t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
•• Soit K un segment inclus dans $\mathbf{R}$. La fonction f, continue sur $K \times [x,y]$ qui est compact comme produit de compacts, est bornée sur ce compact, et

$$\forall (z,t) \in K \times [x,y] \qquad |f(z,t)| \leq M$$

où M désigne un majorant quelconque de $|f|$ sur $K \times [x,y]$. Or $t \mapsto M$ est continue par morceaux sur $[x,y]$, intégrable, indépendante de z. On conclut que, par théorème, g est dérivable par rapport à z sur $\mathbf{R}^3$, de dérivée

$$\frac{\partial g}{\partial z} \colon (x,y,z) \to \int_x^y \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\mathrm{d}t$$

Attention ! le théorème de dérivation sous le signe $\int$ ne dit pas que cette dérivée partielle est continue. Ou du moins, il dit qu'elle est continue par rapport à z, ce qui ne suffit pas. Pour montrer que $\frac{\partial g}{\partial z}$ est une fonction continue de la variable (x, y, z), on va faire un changement de variable pour ramener le segment d'intégration à $[0, 1]$:

$$t = x + (y - x)u$$

qui donne

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = (y - x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}\,(z, x + (y - x)u)\,\mathrm{d}u$$

Définissons alors, sur $\mathbf{R}^3 \times [0, 1]$, la fonction

$$h\colon ((x, y, z), u) \to \frac{\partial f}{\partial z}\,(z, x + (y - x)u)\,\mathrm{d}u$$

• Pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $h((x, y, z), .)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $[0, 1]$, par opérations ($\frac{\partial f}{\partial z}$ est continue).
• Pour tout $u \in [0, 1]$, $h(., u)$ est continue sur $\mathbf{R}^3$, par opérations ($\frac{\partial f}{\partial z}$ est continue).
• Soit K un compact de $\mathbf{R}^3$. K est borné, soit $M > 0$ tel que $K \subset [-M, M]^3$; alors, si $(x, y, z) \in K$ et $u \in [0, 1]$, on a

$$|x + (y - x)u| = |(1 - u)x + uy| \leq (1 - u)M + uM = M$$

(on aurait pu majorer plus grossièrement, le tout est de borner ce à quoi $\frac{\partial f}{\partial z}$ s'applique). Sur le compact $[-M, M]^2$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ est continue donc bornée. Et donc

$$\forall((x, y, z), u) \in K \times [0, 1] \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z, x + (y - x)u)\right| \leq \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{[-M,M]^2}\right\|_\infty$$

Le majorant est intégrable sur $[0, 1]$, indépendant de (x, y, z), le théorème de continuité sous le signe $\int$ nous donne donc la continuité de $\frac{\partial g}{\partial z}$ sur $\mathbf{R}^3$, ce qui nous manquait pour affirmer la classe C^1 de g.

La question suivante est la dérivation de

$$x \mapsto g(\cos x, \sin x, x^2)$$

Par théorème de composition, cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est

$$x \mapsto -\sin x \frac{\partial g}{\partial x}(\cos x, \sin x, x^2) + \cos x \frac{\partial g}{\partial y}(\cos x, \sin x, x^2) + 2x \frac{\partial g}{\partial z}(\cos x, \sin x, x^2)$$

que l'on peut expliciter en remplaçant les dérivées partielles par les expressions trouvées plus haut.

Exercice 12 (**Continuité et dérivation sous le signe $\int$**). Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\, dt\ .$$

Domaine de définition ? La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ? Calculer la dérivée de f, puis f. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ se prolonge par continuité en 0 pour tout réel x. De plus, toujours pour tout réel x,

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\right| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc, par comparaison aux fonctions de Riemann, f est définie sur $\mathbf{R}$.
Il est judicieux de montrer la classe C^1 directement, car la domination nécessaire pour montrer la continuité est plus technique que celle utilisée pour montrer la classe C^1. Montrons néanmoins la continuité, c'est peut-être inutile mais c'est techniquement intéressant. On peut commencer par remarquer que, pour tout y réel,

$$|\text{Arctan} y| \leq |y|$$

C'est évident graphiquement, c'est une propriété de concavité (Arctan est concave sur $[0, +\infty[$ donc son graphe sur cet intervalle est au-dessous de sa tangente en 0), ou on étudie $y \mapsto y - \text{Arctan} y$ sur $[0, +\infty[$, elle croît et est nulle en 0, on conclut par imparité.
Définissons alors sur $\mathbf{R}\times]0, +\infty[$:

$$h\ :\ (x,t) \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

Soit $M > 0$. On a, grâce à la majoration vue plus haut,

$$\forall (x,t) \in [-M, M]\times]0, +\infty[\qquad |h(x,t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$$

et la fonction $t \mapsto \dfrac{M}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, indépendante de x. Comme il est clair que, pour tout $t > 0$, $h(.t)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x, .)$ l'est sur $]0, +\infty[$ (pour cette dernière, la continuité par morceaux suffirait), on obtient la continuité de f.
Pour la classe C^1 (répétons qu'on a intérêt à commencer par là, cela économise les efforts), on reprend la fonction h. On a déjà vu que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x, .)$ était continue (par morceaux suffirait) intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\frac{\partial h}{\partial x}\ :\ (x,t) \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

On en déduit très facilement que f est de classe C^1 : $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbf{R}\times]0, +\infty[$ (par rapport à t, la continuité par morceaux suffirait), et la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

convient. Non seulement f est de classe C^1, mais sa dérivée est

$$f' : x \to \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \mathrm{d}t$$

Pour pouvoir décomposer en éléments simples, on suppose $x \notin \{-1,1\}$. Alors

$$\forall t > 0 \qquad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{\alpha t+\beta}{1+t^2} + \frac{\gamma t+\delta}{1+x^2t^2}$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples, jointe à la parité, montre que $\alpha = \gamma = 0$. On multiplie par t^2, on prend la limite quand $t \to +\infty$, et on suppose dorénavant $x \neq 0$: $\beta + \delta/x^2 = 0$. Enfin, en $t = 0$: $\beta + \delta = 1$. On en tire $\delta = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ et $\beta = \dfrac{1}{1-x^2}$. En coupant en deux intégrales qui convergent bien, on obtient, si $x \notin \{-1,0,1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \; + \; \frac{x^2}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2} \\ &= \frac{\pi}{2(1-x^2)} + \frac{x}{x^2-1}\left[\mathrm{Arctan}(xt)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \end{aligned}$$

Là, il faut faire attention : le signe de x importe. Supposons donc $x > 0$, $x \neq 1$. Alors

$$f'(x) = \frac{\pi}{2(1-x^2)} + \frac{\pi x}{2(x^2-1)} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Formule encore vraie si $x = 1$ par continuité. Or f est impaire, f' est donc paire, et

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}$$

Comme $f(0) = 0$, on déduit que, si $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

puis, par imparité, si $x \leq 0$,

$$f(x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x)$$

L'intégrale demandée s'exprime à l'aide de $f(1)$, par une intégration par parties, en primitivant $1/t^2$ et en dérivant $(\mathrm{Arctan}\, t)^2$.

Exercice 13 (dérivation sous le signe $\int$). Calculer

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2-iux}\,dx$$

en la considérant comme fonction de u.

On voit qu'elle est C^1 assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre $f'(u)$ et $f(u)$: en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ixe^{-x^2-iux}\mathrm{d}x$$

on peut se servir du x pour intégrer par parties, en primitivant xe^{-x^2} et en dérivant e^{-iux} :

$$f'(u) = -i\left(\left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}e^{-iux}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2}e^{-x^2}(-iu)e^{-iux}\mathrm{d}u\right)$$

ce qui donne

$$f'(u) = -\frac{u}{2}f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante K telle que

$$\forall u \in \mathbf{R} \qquad f(u) = K\exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

Exercice 14 (dérivation sous le signe $\int$). Démontrer que la fonction Γ : $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Il est très important de savoir le faire, c'est assez classique !

Exercice 15 (Dérivation sous le signe $\int$). Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^n ($n \geq 1$). On suppose $f(a) = 0$ (a réel). Partant de

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt$$

montrer qu'il existe g de classe C^{n-1} sur $\mathbf{R}$ tel que, pour tout réel x,

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

Il faut savoir faire un changement de variable affine pour ramener une intégrale sur un segment quelconque à une intégrale sur $[0,1]$: ici, on fait le changement de variable

$$t = a + u(x-a)$$

On obtient

$$f(x) = (x-a)\int_0^1 f'(a+u(x-a))\mathrm{d}u$$

puis il n'y a plus qu'à appliquer soigneusement les théorèmes de classe C^k d'une fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,u)\mathrm{d}u$, on peut prendre ici des fonctions dominantes constantes. En effet, si

$$h(x,u) = f'(a+u(x-a))$$

elle est continue, intégrable sur $[0,1]$ par rapport à u, dérivable $n-1$ fois par rapport à x,

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} \;:\; (x,u) \longrightarrow u^k f^{(k+1)}(a+u(x-a))$$

Soit K un segment ; il existe $M > 0$ tel que $K \subset [a-M, a+M]$; on peut dominer :

$$\left|u^k f^{(k+1)}(a+u(x-a))\right| \leq \|f^{(k+1)}|_{[a-M,a+M]}\|_\infty$$

et une fonction constante est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 16 (Un calcul de différentielle). Dans un espace euclidien E, montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E\setminus\{0_E\}$ et calculer sa différentielle (utiliser de préférence les dérivées partielles).

On note f l'application. On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormale de E. Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^p x_i e_i$, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \frac{x_i}{x_1^2+\dots+x_p^2} e_i$$

Donc f est dérivable par rapport à chacune de ses variables sur $E\setminus\{0_E\}$, et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \sum_{i\neq k} \frac{-2x_i x_k}{(x_1^2+\dots+x_p^2)^2} e_i \;+\; \frac{x_1^2+\dots+x_p^2-2x_k^2}{(x_1^2+\dots+x_p^2)^2} e_k \\
&= \sum_{i=1}^p \frac{-2x_i x_k}{\|x\|^4} e_i \;+\; \frac{1}{\|x\|^2} e_k \\
&= -2\frac{(e_k|x)}{\|x\|^4} x \;+\; \frac{1}{\|x\|^2} e_k
\end{aligned}$$

Chaque $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ est continue sur $E\setminus\{0_E\}$, donc f est de classe C^1, et on calcule sa différentielle en tout point $x \in E\setminus\{0_E\}$ par le théorème fondamental :

$$df(x) \;:\; h = \sum_{i=1}^p h_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -2\frac{(h|x)}{\|x\|^4} x \;+\; \frac{1}{\|x\|^2} h$$

Exercice 17 (Un calcul de différentielle). Calculer la différentielle de l'application qui, à toute matrice inversible, associe son déterminant : on l'exprimera à l'aide de la trace et en faisant intervenir la comatrice, et pour cela on commencera par calculer les dérivées partielles en écrivant par exemple les formules de développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Fait en cours.

Exercice 18 (Résolution d'une EDP). Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra utiliser un changement de variable linéaire $u = ax + by$, $v = cx + dy$.

En supposant la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible, on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Alors $(u = ax + by, v = cx + dy)$ équivaut à $(x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v)$. On définit alors g sur $\mathbf{R}^2$ par

$$g\colon (u, v) \to f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

g est de même classe que f, et on a, pour tous $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = g(ax + by, cx + dy)$$

que l'on peut dériver (on utilise le théorème de Schwarz) :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a\dfrac{\partial g}{\partial u}(ax + by, cx + dy) + c\dfrac{\partial g}{\partial v}(ax + by, cx + dy)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = a^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(ax + by, cx + dy) + 2ac\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(ax + by, cx + dy) +$
$c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(ax + by, cx + dy)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = ab\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(ax + by, cx + dy) + (ad + bc)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(ax + by, cx + dy) +$
$cd\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(ax + by, cx + dy)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b\dfrac{\partial g}{\partial u}(ax + by, cx + dy) + d\dfrac{\partial g}{\partial v}(ax + by, cx + dy)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = b^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(ax + by, cx + dy) + 2bd\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(ax + by, cx + dy) +$
$d^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(ax + by, cx + dy)$

L'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

équivaut donc à l'équation

$$(a^2-3ab+2b^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+(2ac-3(ad+bc)+4bd)\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+(c^2-3cd+2d^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0$$

On essaye, instruits par l'équation d'onde, d'annuler les coefficients des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$, d'autant que c'est deux fois le même problème avec des lettres différentes. Si on considère $a^2-3ab+2b^2$ comme un polynôme de degré 2 en a, son discriminant est $9b^2-8b^2=b^2$, donc ses racines $a_1=2b$ et $a_2=b$. Prenons par exemple $a=b$, puis $c=2d$ (si on prend $a=b$ et $c=d$, on aura $ad-bc=0$, ce qui ne convient pas, on a supposé la matrice A inversible). Pour fixer les idées, on prend $a=b=d=1$, $c=2$. L'équation devient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}=0$$

que l'on sait résoudre...Finalement, les fonctions cherchées sont les

$$(x,y)\mapsto \phi(x+y)+\psi(2x+y)$$

où ϕ et ψ sont de classe C^2. Remarquons que ce n'est pas la seule manière de les exprimer.

Exercice 19 (Dérivées partielles de fonctions composées). Soit f une fonction de classe C^2 sur un disque ouvert de centre l'origine dans $\mathbf{R}^2$. On définit la fonction g par $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Exprimer le laplacien de f en fonction des dérivées partielles premières et secondes de g.

Pour améliorer la lisibilité, on écrira $(.)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(.)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(.)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta)=-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(.)+\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(.)$$

Et on continue, même processus : on applique aux dérivées partielles de f ce qu'on a appliqué à f ;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta)&=\cos\theta\Big[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(.)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(.)\Big]+\sin\theta\Big[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(.)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(.)\Big]\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(.)+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(.)+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(.)\end{aligned}$$

(en utilisant le théorème de Schwarz). Puis, après simplification et, aussi, utilisation du théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) = -\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(.)-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(.)+\rho^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(.)-2\rho^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(.)+\rho^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(.)$$

On ne calcule pas la dérivée seconde « croisée » (pas utile). On voit, si $\rho \neq 0$, que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) = \Delta f(.) - \frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(.) - \frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(.)$$

d'où le résultat :

$$\Delta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta)$$

Exercice 20 (Problème d'extremum). Montrer que $(x,y) \mapsto (x+y)e^{-x^2-y^2}$ admet un minimum et un maximum absolu et les calculer.

Notons f la fonction. Notant $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ on a

$$|f(x,y)| \leq 2\rho e^{-\rho^2}$$

(avec $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$) (car $|x+y| \leq |x|+|y| \leq \rho+\rho$) et donc par croissances comparées :

$$f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{} 0$$

Notons, par exemple, $a = f(1,1) > 0$, on a $f(-1,-1) = -a$. Soit $R > 0$ tel que

$$\rho \geq R \implies |f(x,y)| \leq a$$

Sur le compact $D'(0,R)$ (disque fermé pour la norme euclidienne canonique) f atteint un max et un min, respectivement $> a$ et $< -a$, et donc ce max et ce min sont « globaux » ou « absolus ». Cherchons à présent les points critiques. S'il pouvait n'y en avoir que 2...On doit résoudre le système

$$1-2x(x+y) = 1-2y(x+y) = 0$$

Comme $x+y=0$ n'est pas compatible avec le système, on a nécessairement $x = y$, et $1-4x^2 = 0$, donc il y a bien deux points critiques : $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Nécessairement, ce sont les points en lesquels sont atteints le minimum absolu et le maximum absolu, qui valent donc respectivement $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ et $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 21 (Principe du maximum).
On désigne par D le carré ouvert $]0,a[\times]0,a[$.

1. Démontrer que si une fonction u, de classe C^2 sur D et à valeurs dans $\mathbf{R}$, admet un maximum relatif en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.
2. Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$, de classe C^2 sur D, nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u = 0$ sur D.
   On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive. Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction
   $$u_\epsilon \ : \ (x, y) \longmapsto u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$$
   ait un maximum relatif sur D.
   En déduire que u est nulle sur D.

On désigne par D le carré ouvert $]0, a[\times]0, a[$ $(a > 0)$.

1. Démontrer que si une fonction u, de classe C^2 sur D et à valeurs dans $\mathbf{R}$, admet un maximum relatif en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.

   (le terme « maximum relatif » signifie « maximum local » mais n'est plus usité). Supposons que u admette un maximum local en (x_0, y_0). L'application
   $$t \longmapsto u(t, y_0)$$
   définie sur $]0, a[$ atteint un maximum local en x_0. Sa dérivée seconde en ce point (qui existe bien !) est donc négative ou nulle (sa dérivée première est nulle). Mais cette dérivée seconde est $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. On procède de même avec l'autre variable et le laplacien, somme de deux termes négatifs ou nuls, l'est.

   ---

2. Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$, de classe C^2 sur D, nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u = 0$ sur D.
   On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive. Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction
   $$u_\epsilon \ : \ (x, y) \longmapsto u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$$
   ait un maximum relatif sur D. En déduire que u est nulle sur D.

Ce qui est sûr, c'est que u_ϵ atteint un maximum absolu sur $\overline{D}$, par argument de continuité/compacité. Si ce maximum n'est pas atteint sur le bord, c'est gagné. Or sur le bord, u_ϵ est majoré par $2\epsilon a^2$. Si $\epsilon < m$ où m est une valeur strictement positive prise par u, on est sûr que le maximum absolu ne peut pas être atteint sur le bord. C'est donc un maximum global atteint sur D, en ce point le laplacien est négatif ou nul d'après la première question. Mais $\Delta u_\epsilon = \Delta u + 4\epsilon = 4\epsilon > 0$ sur D, contradiction. Donc u ne peut pas prendre en un point une valeur strictement positive. Mais $-u$ non plus. Conclusion : u est nulle.

Exercice 22 (Un calcul de gradient). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ (ce qui signifie que A est symétrique, et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}_*^+$ ou, au choix, $X^T AX > 0$ pour tout $X \neq 0$). Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ du produit scalaire canonique. Calculer le gradient de

$$J \ : \ X \mapsto X^T AX + B^T X$$

et étudier ses extremums.

On a le choix, ici, dérivées partielles ou calcul direct. Ce dernier étant un peu plus court :

$$J(X+H) = J(X) + H^T AX + X^T AH + B^T H + H^T AH$$

On remarque que l'application $H \mapsto H^T AX + HAX^T + B^T H$ est linéaire. Et que, comme on le sait (applications linéaires en dimension finie, caractérisation des applications linéaires continues), il existe k tel que, pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\|AH\| \leq k\|H\|$. Donc, par inégalité de Cauchy-Schwarz, $|H^T AH| \leq \|H\|k\|H\| = k\|H\|^2$. Le dernier terme dans la somme est donc $\underset{H\to(0)}{o}(H)$. La différentielle de J en X est donc

$$dJ(X) \ : \ H \longmapsto H^T AX + X^T AH + B^T H$$

Mais A est symétrique, on peut donc écrire

$$dJ(X)(H) = 2X^T AH + B^T H = (2AX + B)^T H$$

D'où l'on tire, par définition du gradient :

$$\nabla J(X) = (2AX + B)$$

S'il y a un extremum, ce ne peut être qu'en $X_0 = -\dfrac{1}{2}A^{-1}B$ (il faut que le point soit critique). Est-ce bien un extremum ? on peut raisonner topologiquement, montrer que

$$J(X) \xrightarrow[\|X\|\to+\infty]{} +\infty$$

(en écrivant par exemple que $J(X) \geq \lambda\|X\|^2 - \|B\|\|X\|$ où λ est la plus petite valeur propre de A et $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique). On en déduit classiquement (en se ramenant à un compact) que J atteint un minimum, or il n'y a qu'un point critique.
On peut aussi agir directement : si $\nabla J(X_0) = 0$, on a pour tout H

$$J(X_0 + H) = J(X_0) + H^T AH$$

or classiquement, si $X \neq (0)$, $H^T AH > 0$, on a donc un minimum local « strict ».

Exercice 23 (Résolution d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1)**.** Soit a un nombre réel ou complexe. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Ecrire (avec des intégrales) l'expression de l'unique solution de l'équation

$$y' + ay = f$$

qui prend au point x_0 de I la valeur y_0.

Exercice 24 (raccordement de solutions). Résoudre l'équation $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe une unique solution sur $]-\infty, 1[$, montrer qu'elle est de classe C^∞ et l'étudier (on pourra chercher une solution développable en série entière).

Résolvons d'abord l'équation homogène sur un intervalle I ne contenant pas 0. Comme elle s'écrit

$$y' + \frac{1}{2x}y = 0$$

on est amené à étudier deux cas :
Si $I \subset]0,+\infty[$, on mutliplie tout par $\sqrt{x}$ pour obtenir les solutions de cette équation homogène : ce sont les

$$x \longmapsto \frac{C}{\sqrt{x}} \qquad , \quad C \in \mathbf{R}$$

Si $I \subset]-\infty, 0[$, on mutliplie tout par $\sqrt{x}$ pour obtenir les solutions de cette équation homogène : ce sont les

$$x \longmapsto \frac{C}{\sqrt{-x}} \qquad , \quad C \in \mathbf{R}$$

De nouveau, supposons $I =]0, 1[$ ou $I =]1, +\infty[$.
Cherchons alors les solutions de l'équation complète sous la forme

$$y \ : \ x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\sqrt{x}}$$

où ϕ est une fonction inconnue, dérivable. Alors y est solution si et seulement si, pour tout $x \in I$,

$$2x\frac{\phi'(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-x}$$

Il s'agit donc de calculer les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$. Si $a \in I$, pour tout $x \in I$, par changement de variable $t = u^2$,

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{2(1-t)\sqrt{t}} = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u$$

Or (décomposition en éléments simples) :

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)$$

Une primitive de $u \longmapsto 1/(1-u^2)$ est donc

$$u \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$$

Et donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$ est

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|$$

Les solutions de l'équation sur I sont donc les

$$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + \frac{C}{\sqrt{x}} \qquad , C \in \mathbf{R}$$

Supposons $I =]-\infty, 0[$.
Cherchons alors les solutions de l'équation complète sous la forme

$$y \ : \ x \longmapsto \frac{\phi(x)}{\sqrt{-x}}$$

où ϕ est une fonction inconnue, dérivable. Alors y est solution si et seulement si, pour tout $x \in I$,

$$2x \frac{\phi'(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{1-x}$$

Il s'agit donc de calculer les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}(1-x)}$. Si $a \in I$, pour tout $x \in I$, par changement de variable $t = -u^2$,

$$\int_a^x \frac{-\mathrm{d}t}{2(1-t)\sqrt{-t}} = \int_{\sqrt{-a}}^{\sqrt{-x}} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u$$

Et donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}(1-x)}$ est

$$x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)$$

Les solutions de l'équation sur I sont donc les

$$x \longmapsto \frac{C + \mathrm{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \qquad , C \in \mathbf{R}$$

Apport des séries entières
Si on nous demande de chercher des solutions DSE, on en trouve une qui marche sur $]-1,1[$ (calcul assez faisable). Est-ce cohérent avec ce qui précède ? pour que

$$x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)$$

ait une limite réelle en 0 (à gauche bien sûr), il faut et il suffit que $C = 0$. Et si $C = 0$, à partir du DSE de Arctan sur $]-1,1[$, on montre que $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)$ est DSE sur $]-1,0[$.

Exercice 25 (résolution d'une équation différentielle, utilisation d'expressions intégrales). Soit f continue bornée sur $]0,+\infty[$. On considère l'équation différentielle

$$xy' - y + f(x) = 0 \ .$$

1. Démontrer que l'équation admet une unique solution y_0 telle que y_0' ait une limite nulle en $+\infty$.

2. On suppose de plus que f a une limite en $+\infty$. Démontrer que y_0 a une limite en $+\infty$.

Exercice 26 (Utilisations de propriétés particulières de la matrice d'un système). On considère le système linéaire à coefficients constants $X' = AX$, où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

1. On suppose A antisymétrique ; montrer que les solutions sont bornées.
2. On suppose A symétrique définie positive. Montrer que pour toute solution X, $t \mapsto \|X(t)\|$ est croissante.

Exercice 27 (Utilisation du wronskien). On considère les deux équations différentielles

$$x'' + f(t)x = 0 \quad (E) \qquad \text{et} \qquad x'' + g(t)x = 0 \quad (E')$$

où f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, vérifiant $f > g$ sur I.
Soient ϕ et ψ des solutions respectives de (E) et (E') sur I (ψ n'étant pas la solution nulle).

1. Démontrer que deux solutions linéairement indépendantes de (E) ne peuvent pas avoir de zéro commun.
2. Démontrer que les zéros de ψ sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro de ψ a un voisinage sur lequel il est l'unique zéro de ψ.

Si un zéro x de ψ n'est pas isolé, il y a une suite de zéros de ψ, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, qui converge vers x. Mais alors

$$\frac{\psi(x_n) - \psi(x)}{x_n - x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $\psi'(x) = 0$. Le théorème d'unicité dit alors que $\psi = 0$.

Exercice 28 (Utilisation d'une série de fonctions). Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Montrer que toutes les solutions de $y'' + y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$ sont de classe C^2. Les exprimer.

L'équation homogène ne pose guère de problème. On peut alors envisager une méthode de variation des constantes, mais il y a plus court. Si on trouve une solution de

$$y'' + y = e^{int}$$

et qu'on en prend la partie réelle, ça ira. Mais in est-il solution de l'équation caractéristique ? c'est le cas si et seulement si $n = \pm 1$. On supposera $n \in \mathbf{N}$, donc d'abord, dans le cas $n \neq 1$, on peut chercher une solution sous la forme $t \mapsto ke^{int}$. On trouve $k = \dfrac{1}{1-n^2}$. Dans le cas $n = 1$, i est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $t \mapsto kte^{it}$. Qui vérifie l'équation si et seulement si, pour tout t,

$$2ik - kt + kt = 1$$

ce qui donne $k = -i/2$. On trouve donc la solution particulière $t \mapsto -i\dfrac{t}{2}te^{it}$, dont la partie réelle est $t \mapsto \dfrac{t}{2}\sin t$. Finalement les solutions de l'équation de départ sont les

$$t \longmapsto \alpha \cos t + \beta \sin t + \frac{1}{1-n^2}\cos(nt) \qquad ((\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2)$$

si $n \neq 1$, et les

$$t \longmapsto \alpha \cos t + \beta \sin t + \frac{t}{2}\sin t \qquad ((\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2)$$

si $n = 1$. Il est alors naturel de se demander si, par hasard, la fonction

$$t \longmapsto a_0 + a_1 \frac{t}{2}\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$$

ne serait pas solution de l'équation différentielle proposée. Ce qui correspondrait à une sorte de principe de superposition généralisé. Or ça marche facilement si on peut dériver terme à terme sous le signe $\sum$. Ce qui se fait bien avec le théorème sur les séries de fonctions de classe C^2, car si $\phi_n \ : \ t \mapsto \dfrac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$, $\sum \phi_n''$ est normalement convergente, donc uniformément. Evidemment $\sum \phi_n$ et $\sum \phi_n'$ convergent elles aussi normalement, la convergence simple suffirait. On a une solution C^2 de l'équation différentielle, comme on les obtient toutes en ajoutant $\alpha \cos + \beta \sin$ on conclut.

Exercice 29 (Variation de la constante). Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. En résolvant l'équation

$$y'' + y = g(x)$$

par la méthode de variation de la constante, déterminer une fonction k telle que les solutions soient de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x k(x-u)g(u)du + \alpha \cos x + \beta \sin x$. Montrer alors que, si g est à valeurs réelles positives, alors pour toute solution y et tout réel x :

$$y(x) + y(x+\pi) \geq 0$$