mp* 24-25 : révisions pour l'écrit - Dérivation, intégration

I Chapitres concernés

C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12, C13, C14

II Questions de cours les plus classiques

Dans ces chapitres, il n'y a guère de questions de cours. Ce qui caractérise les chapitres C, c'est un ensemble de « gros » théorèmes qu'il faut savoir utiliser.

III Exercices

Exercice 1 (**Théorème de Rolle).** Soit P un polynôme réel scindé (sur $\mathbf{R}$). Démontrer que son polynôme dérivé P' est aussi scindé. *On peut se contenter de « dessiner » la solution.*

Exercice 2 (**Théorème de Rolle).** Démontrer que le polynôme

$$D^n\Big((X^2-1)^n\Big)$$

est scindé sur $\mathbf{R}$, que toutes ses racines sont simples et appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1,1[$. *On peut se contenter de « dessiner » la solution.*

Exercice 3 (**Théorème de classe C^k par prolongement).** On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$.

1. Démontrer que ϕ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty($ et que sa dérivée k-ième est de la forme $x \mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$, où P_k est polynomiale. On prolonge ϕ à $\mathbf{R}$ en définissant, si $x \leq 0$, $\phi(x) = 0$. Démontrer que ϕ est de classe C^∞. Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de la fonction $x \mapsto \phi(x+2)\phi(-1-x)$, puis de son unique primitive qui a pour limite 0 en $-\infty$.

Exercice 4 (TCVD après un changement de variable). Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}dt$.

Exercice 5 (TCVD avec fonction indicatrice). Pour tout entier naturel non nul n, on définit

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ \ln x \ dx\ .$$

Démontrer que la suite (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ \ln x \ dx$.

Exercice 6 (Intégrabilité avec des équivalents). On désigne par α et β deux réels positifs. Examiner l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_*^+$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\ .$$

Exercice 7 (Intégrabilité par comparaison). Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que $t \mapsto e^{-ta}f(t)\ dt$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Démontrer que, si $x > a$, alors $t \mapsto e^{-tx}f(t)\ dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8 (L'intégrale semi-convergente la plus célèbre...). et la plus typique !
Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$
converge.

Exercice 9 (Intégrale généralisée : plus difficile !). Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\ dt$ converge. Démontrer que, si $x > a$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\ dt$ converge (ici, on ne suppose pas l'intégrabilité ; on pourra introduire la fonction
$$F\ :\ y \mapsto \int_0^y e^{-ta} f(t)\ dt$$
pour faire une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A e^{-tx} f(t)\ dt$)

Exercice 10 (Intégrale fonction de ses bornes). Soit $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\ dt$.
Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée.

Savoir dériver une intégrale fonction d'une de ses bornes, ou de ses deux bornes, en introduisant une primitive ou en « rentrant » les bornes dans l'intégrale par un changement de variable affine qui ramène le segment d'intégration à $[0, 1]$.

Exercice 11 (Continuité et dérivation sous le signe $\int$). Soit $f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 ; montrer que
$$g\ :\ (x, y, z) \mapsto \int_x^y f(z, t)\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^3$.
En déduire une expression de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \int_{\cos x}^{\sin x} f(x^2, t)\mathrm{d}t$$

Exercice 12 (Continuité et dérivation sous le signe $\int$). Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\, dt\ .$$

Domaine de définition ? La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ? Calculer la dérivée de f, puis f. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

Exercice 13 (dérivation sous le signe $\int$). Calculer

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2-iux}\, dx$$

en la considérant comme fonction de u.

Exercice 14 (dérivation sous le signe $\int$). Démontrer que la fonction $\Gamma\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Exercice 15 (Dérivation sous le signe $\int$). Soit $f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^n $(n \geq 1)$. On suppose $f(a) = 0$ (a réel). Partant de

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt$$

montrer qu'il existe g de classe C^{n-1} sur $\mathbf{R}$ tel que, pour tout réel x,

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

Savoir dominer en utilisant un argument de compacité.

Exercice 16 (Un calcul de différentielle). Dans un espace euclidien E, montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0_E\}$ et calculer sa différentielle (utiliser de préférence les dérivées partielles).

Exercice 17 (Un calcul de différentielle). Calculer la différentielle de l'application qui, à toute matrice inversible, associe son déterminant : on l'exprimera à l'aide de la trace et en faisant intervenir la comatrice, et pour cela on commencera par calculer les dérivées partielles en écrivant par exemple les formules de développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Exercice 18 (Résolution d'une EDP). Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra utiliser un changement de variable linéaire $u = ax+by$, $v = cx+dy$.

Exercice 19 (Dérivées partielles de fonctions composées). Soit f une fonction de classe C^2 sur un disque ouvert de centre l'origine dans $\mathbf{R}^2$. On définit la fonction g par $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Exprimer le laplacien de f en fonction des dérivées partielles premières et secondes de g.

Exercice 20 (Problème d'extremum). Montrer que $(x, y) \mapsto (x+y)e^{-x^2-y^2}$ admet un minimum et un maximum absolu et les calculer.

Exercice 21 (Principe du maximum).
On désigne par D le carré ouvert $]0,a[\times]0,a[$.

1. Démontrer que si une fonction u, de classe C^2 sur D et à valeurs dans $\mathbf{R}$, admet un maximum relatif en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.
2. Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$, de classe C^2 sur D, nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u = 0$ sur D.
   On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive. Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction
   $$u_\epsilon \ : \ (x,y) \longmapsto u(x,y) + \epsilon(x^2+y^2)$$
   ait un maximum relatif sur D.
   En déduire que u est nulle sur D.

Exercice 22 (Un calcul de gradient). Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ (ce qui signifie que A est symétrique, et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}_*^+$ ou, au choix, $X^TAX > 0$ pour tout $X \neq 0$). Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ du produit scalaire canonique. Calculer le gradient de
$$J \ : \ X \mapsto X^TAX + B^TX$$
et étudier ses extremums.

Exercice 23 (Résolution d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1)**.** Soit a un nombre réel ou complexe. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Ecrire (avec des intégrales) l'expression de l'unique solution de l'équation
$$y' + ay = f$$
qui prend au point x_0 de I la valeur y_0.

Exercice 24 (raccordement de solutions). Résoudre l'équation $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe une unique solution sur $]-\infty,1[$, montrer qu'elle est de classe C^∞ et l'étudier (on pourra chercher une solution développable en série entière).

Exercice 25 (résolution d'une équation différentielle, utilisation d'expressions intégrales). Soit f continue bornée sur $]0,+\infty[$. On considère l'équation différentielle
$$xy' - y + f(x) = 0 \ .$$

1. Démontrer que l'équation admet une unique solution y_0 telle que y_0' ait une limite nulle en $+\infty$.
2. On suppose de plus que f a une limite en $+\infty$. Démontrer que y_0 a une limite en $+\infty$.

Exercice 26 (Utilisations de propriétés particulières de la matrice d'un système). On considère le système linéaire à coefficients constants $X' = AX$, où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

1. On suppose A antisymétrique ; montrer que les solutions sont bornées.
2. On suppose A symétrique définie positive. Montrer que pour toute solution X, $t \mapsto \|X(t)\|$ est croissante.

Exercice 27 (Utilisation du wronskien). On considère les deux équations différentielles
$$x'' + f(t)x = 0 \quad (E) \qquad \text{et} \qquad x'' + g(t)x = 0 \quad (E')$$
où f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, vérifiant $f > g$ sur I.
Soient ϕ et ψ des solutions respectives de (E) et (E') sur I (ψ n'étant pas la solution nulle).

1. Démontrer que deux solutions linéairement indépendantes de (E) ne peuvent pas avoir de zéro commun.
2. Démontrer que les zéros de ψ sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro de ψ a un voisinage sur lequel il est l'unique zéro de ψ.

Exercice 28 (Utilisation d'une série de fonctions). Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Montrer que toutes les solutions de $y'' + y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$ sont de classe C^2. Les exprimer.

Exercice 29 (Variation de la constante). Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. En résolvant l'équation

$$y'' + y = g(x)$$

par la méthode de variation de la constante, déterminer une fonction k telle que les solutions soient de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x k(x-u)g(u)du + \alpha \cos x + \beta \sin x$. Montrer alors que, si g est à valeurs réelles positives, alors pour toute solution y et tout réel x :

$$y(x) + y(x+\pi) \geq 0$$