$\boxed{\text{Algèbre 68}}$ *1.(a) et 2. se traitent en utilisant la théorie des espaces euclidiens.*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calculs,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le théorème du rang,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

1.(a) : A est symétrique réelle donc diagonalisable, voir le chapitre sur les espaces euclidiens (Ab2).

1.(b) : On calcule $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ par exemple en ajoutant la première ligne à la deuxième et en la retranchant à la troisième :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

On peut alors mettre en facteur λ dans chacune des lignes 2 et 3 :

$$\det(A - \lambda I_3) = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

et là, appliquer la règle de Sarrus n'est pas pénible :

$$\det(A - \lambda I_3) = \lambda^2(1 - \lambda + 1 + 1) = \lambda^2(3 - \lambda)$$

Donc 0 est valeur propre double, 1 est valeur propre simple. On propose à l'examinateur deux vérifications qui lui feront plaisir : d'abord, il est assez clair que A est de rang 1, donc $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2, donc 0 est valeur propre de multiplicité ≥ 2. Ensuite, la somme $0 + 0 + 3$ est bien égale à $\mathrm{Tr}(A)$.

Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 : c'est $\mathrm{Ker}(A)$, que l'on obtient en résolvant

$$AX = (0)$$

ce qui donne, avec des notations évidentes, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. C'est un plan, dont on a une équation et dont il n'est pas dur de trouver une base (i.e. deux vecteurs indépendants qui vérifient l'équation) : par exemple,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Pour $E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$, on peut résoudre le système

$$AX = 3X$$

ou plus astucieusement se souvenir que les sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles sont inclus dans l'image, laquelle est engendrée par les vecteurs colonnes. Ici,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Donc $E_3(A)$, sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(A)$ non réduit à $\{0\}$, est exactement $\mathrm{Im}(A)$. Finalement

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

On a

$$\dim(E_0(A)) + \dim(E_3(A)) = 3 = \dim\left(\mathbf{R}^3\right)$$

(en supposant que le corps de base soit $\mathbf{R}$), ce qui montre la diagonalisabilité. Remarquons que 3 étant une valeur propre simple, le sous-espace propre associé est nécessairement de dimension 1, on aurait pu s'éviter de le déterminer. Mais ici, on a une diagonalisation de A : si par exemple

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}\,(0,0,3)$. Il y a bien sûr de multiples autres choix.

1.(c) : $\mathrm{rg}(A) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$. Donc 0 est valeur propre au moins double de P_A, qui est donc nécessairement scindé et s'écrit (je prends la définition de P_A au programme, ce qui donne un signe $-$ par rapport à la question précédente)

$$P_A = X^2(X-a)$$

Mais on sait que $a = \mathrm{Tr}(A) = 3$, donc il y a un autre sous-espace propre que $\mathrm{Ker}(A)$, il est nécessairement de dimension 1, et on a la diagonalisabilité.

1.(d) : $A^2 = 3A$, donc $X(X-3)$, scindé à racines simples, est annulateur de A.

Algèbre 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

où a est un nombre réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Si $a = 0$, clairement $\mathrm{rg}(A) = 2$ (la première colonne est nulle, les deux dernières sont indépendantes). Si on considère comme brutal de calculer $\det(A)$, on peut ajouter les colonnes 1 et 2 à la colonne 3, ce qui ne change pas le rang. On en déduit que si $a = -1$, le rang vaut 2 encore (dernière colonne nulle, les deux premières indépendantes). Et si $a \neq -1$, on divise la troisième colonne par $a+1$, donc A a même rang que $A' = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On retranche a fois la dernière colonne à la première, on retranche la troisième colonne à la deuxième, A a donc même rang que $A'' = \begin{pmatrix} -a & a-1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et finalement on conclut que le rang vaut 2 quand $a \in \{0, -1\}$, 3 sinon. Il y a mille autres façons de faire.

Pour la diagonalisabilité, on peut éventuellement remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre, associé à la valeur propre $1 + a$ (beaucoup de matrices proposées à l'oral ont des sommes de lignes constantes, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre). L'avantage est qu'on sait alors que $1+a$ est valeur propre, mais ce n'est pas très compliqué de calculer

$$P_A(x) = \begin{pmatrix} X & -a & -1 \\ -a & X & -1 \\ -a & -1 & X \end{pmatrix}$$

On ajoute par exemple toutes les colonnes à la dernière, on factorise $X-a-1$, on obtient

$$P_A(X) = (X-a-1)\begin{pmatrix} X & -a & 1 \\ -a & X & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ajoute ensuite a fois la dernière colonne à la première, puis on développe par rapport à la première colonne :

$$P_A(X) = (X-a-1)(X+a)(X+1)$$

Par condition suffisante, si ces trois valeurs propres sont distinctes, A est diagonalisable. Les cas à examiner sont donc ceux où elles ne sont pas distinctes, c'est-à-dire :

• $a = 1$: 2 est valeur propre simple, -1 est valeur propre double. On peut chercher le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ en résolvant $AX = -X$, mais autant étudier le rang de $A + I_3$, qui nous donnera avec le théorème du rang la dimension de $E_{-1}(A)$. Ici,

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A+I_3) = 1$, donc $\dim\left(E_{-1}(A)\right) = 2$, et A est diagonalisable.

• $a+1 = -1$, c'est-à-dire $a = -2$. 2 est valeur propre simple, -1 est valeur propre double. Et

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, donc $\dim\left(E^{-1}(A)\right) = 1$, or -1 est de multiplicité 2, donc A n'est pas diagonalisable.

• $a+1=-a$, donc $a=-1/2$. $1/2$ est valeur propre double, -1 est valeur propre simple. Et

$$A-\frac{1}{2}I_3=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & 1\\ -1/2 & -1/2 & 1\\ -1/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2, donc, comme ci-dessus, il n'y a pas diagonalisabilité.

Algèbre 70

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $B=aI_3+bA+cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

   Déduisez de la question 1. les éléments propres de B.

On peut calculer le polynôme caractéristique...ou regarder l'action de l'endomorphisme canoniquement associé à A sur les vecteurs de la base canonique et en déduire que $A^3=1$...ou regarder quand le système $AX=\lambda X$ a une solution X autre que $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$...bref, on trouve que $\mathrm{Sp}(A)=\{1,j,j^2\}$, et que, pour $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$,

$$E_\lambda(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda^2\\ \lambda\end{pmatrix}\right)$$

(les valeurs propres de A sont des racines cubiques de 1). La condition suffisante (3 valeurs propres distinctes), ou le polynôme annulateur X^3-1 scindé à racines simples, montrent la diagonalisabilité. Si

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2\end{pmatrix}$$

alors

$$A=PDP^{-1}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

Mais alors

$$B = P\left(aI_3 + bD + cD^2\right)P^{-1}$$

avec

$$aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$$

On a diagonalisé B, on a donc les valeurs propres :

$$\mathrm{Sp}(B) = \{a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj\}$$

Si elles sont distinctes, les sous-espaces propres de B sont les mêmes que ceux de A. En revanche, si elles ne sont pas distinctes, les sous-espaces propres de B sont « plus gros » : si les trois valeurs propres sont égales, B est une homothétie, son sous-espace propre unique est $\mathbf{C}^3$. Si « deux » valeurs propres $a + b\lambda + c\lambda^2$ et $a + b\mu + c\mu^2$ sont égales (avec $\lambda \neq \mu$), le sous-espace propre associé est

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^2 \\ \mu \end{pmatrix}\right)$$

Algèbre 73

1. **On pose** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
   Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

   Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - X - 6 = (X-3)(X+2)$. Il y a deux valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable. Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont les (a, a), $a \neq 0$. Les vecteurs propres associés à -2 sont les $(a, -4a)$, $a \neq 0$.

   ---

2. **Déterminez toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et déduisez-en l'ensemble des matrices qui commutent avec A.**

Une matrice qui commute avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ laisse stables ses sous-espaces propres (il est plus clair d'énoncer ceci en termes d'endomorphismes canoniquement associés). Et réciproquement. Les matrices qui commutent avec cette matrice sont donc les matrices diagonales. Or

$$AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$$

Les matrices qui commutent avec A sont donc les $P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale quelconque, et par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Mais plutôt que faire le calcul, on peut remarquer que c'est un espace vectoriel de dimension 2...et donc le commutant de A est ici $\mathbf{K}[A]$, ou encore $\mathrm{Vect}(A, I_2)$.

Exercice 1 (Matrices à diagonale strictement dominante)**.**

1. **Soit A une matrice carrée d'ordre n réelle ou complexe à diagonale strictement dominante, c'est à dire telle que, pour tout i :**

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Démontrer que A est inversible : on démontrera pour cela, par l'absurde, que le système $AX = 0$ n'a pas de solution non nulle, en écrivant une équation bien choisie de ce système.

Quelle hypothèse analogue conduit à la même conclusion ?

Supposons que $AX = 0$ ait une solution non nulle : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Soit i_0 un indice tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

la i_0-ième équation du système $AX = 0$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0$$

que l'on peut réécrire

$$a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j$$

Mais $x_{i_0} \neq 0$, donc

$$a_{i_0,i_0} = \sum_{j \neq i_0} -a_{i_0,j} \frac{x_j}{x_{i_0}}$$

Et, par inégalité triangulaire :

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

ce qui est contradictoire. De plus, A est inversible si et seulement si ${}^{t}A$ est inversible. On peut donc énoncer : pour tout i,

$$|a_{j,j}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{i,j}|$$

---

2. **Démontrer que l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans la réunion de disques suivante (si on se place sur $\mathbf{C}$)** :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbf{C} \ ; \ |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

Déterminer une autre réunion de disques contenant toutes les valeurs propres de A.

Soit z une valeur propre de A. Alors $A - zI_n$ n'est pas inversible, donc n'est pas à diagonale strictement dominante, donc il existe i tel que

$$|a_{i,i} - z| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

et z appartient donc à la réunion de disques indiquée. Les valeurs propres de A sont celles de ${}^tA$, donc sont dans

$$\bigcup_{j=1}^{n}\left\{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z-a_{j,j}| \leq \sum_{i\neq j}|a_{i,j}|\right\}$$

Question subsidiaire : On pose, pour tout i, $L_i = \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. On suppose, pour tout couple (i,j) tel que $i \neq j$,

$$|a_{i,i}|\ |a_{j,j}| > L_i L_j$$

Montrer que A est inversible (*Indication : suivre le même principe que dans la première question, en remarquant préalablement qu'il ne peut y avoir qu'au plus un i tel que l'on n'ait pas $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$.*

Remarquons que si $|a_{i,i}| \leq L_i$ et $|a_{j,j}| \leq L_j$ alors (multiplication d'inégalités de même sens entre réels positifs, légitime donc...)

$$|a_{i,i}|\ |a_{j,j}| \leq L_i L_j$$

L'hypothèse fait donc que $|a_{i,i}| \leq L_i$ ne peut se produire qu'au plus une fois. Si cela ne se produit pas, on est ramené à la première question de l'exercice (stricte dominance diagonale classique), supposons donc qu'il y ait un unique i_0 tel que

$$|a_{i_0,i_0}| \leq L_{i_0}$$

Reprenons la résolution de la première question. Supposons que X soit une solution non nulle de $AX = 0$. S'il existe $i \neq i_0$ tel que

$$|x_i| = \max_{1\leq j\leq n}|x_j|$$

alors on aboutit à une contradiction par la démarche de la première question. Supposons donc

$$|x_{i_0}| = \max_{1\leq j\leq n}|x_j|$$

Il n'est pas possible que x_{i_0} soit la seule composante non nulle de X, car on aurait alors $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = 0$, or $a_{i_0,i_0} = 0$ est incompatible avec la condition imposée sur A. Soit alors i_1 tel que

$$|x_{i_1}| = \max\left(\{|x_j|\ ;\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq i_0\}\right)$$

On va essayer de tirer une contradiction des deux équations (venant de $AX = 0$)

$$a_{i_0,i_0} = \sum_{j\neq i_0} -a_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}} \quad \text{et} \quad a_{i_1,i_1} = \sum_{j\neq i_0} -a_{i_1,j}\frac{x_j}{x_{i_1}}$$

L'inégalité triangulaire appliquée à chacune donne

$$|a_{i_0,i_0}| \leq L_{i_0}\frac{|x_{i_1}|}{|x_{i_0}|} \quad \text{et} \quad |a_{i_1,i_1}| \leq L_{i_1}\frac{|x_{i_0}|}{|x_{i_1}|}$$

et le produit de ces deux inégalités entre réels positifs donne une contradiction, concluante.

Exercice 2 (polynômes caractéristiques de matrices tridiagonales). On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note P_n son polynôme caractéristique ; trouver une relation de récurrence entre P_n, P_{n-1}, P_{n-2}. Dans le cas où, pour tout i, $b_i = c_i \neq 0$, le corps de base étant $\mathbf{R}$, démontrer que A_n admet n valeurs propres distinctes.

C'est le point de départ. L'étude de ces matrices est motivée par leur intervention dans la discrétisation d'équations aux dérivées partielles. Le plus souvent, elles sont symétriques : $\forall i \quad b_i = c_i$.

Indication : développer par rapport à la dernière ligne ou par rapport à la dernière colonne. On trouve

$$P_n = (X - a_n)P_{n-1} - (-c_{n-1}) \times (-b_{n-1}) \times P_{n-2}$$

C'est-à-dire,

$$P_n = (X - a_n)P_{n-1} - c_{n-1}b_{n-1}P_{n-2}$$

Si $b_n = c_n \neq 0$ pour tout n, et il est alors important d'être sur $\mathbf{R}$, on montre par récurrence que P_n est scindé à racines simples, les racines de P_n « séparant »

celles de P_{n+1} (entre deux racines consécutives de P_{n+1} il y a exactement une racine de P_n).
Précisons cela : la relation est

$$P_n = (X - a_n)P_{n-1} - b_{n-1}^2 P_{n-2}$$

Avec $P_1 = X - a_1$ et $P_2 = (X - a_1)(X - a_2) - b_1^2$.
De $\widetilde{P_2}(a_1) = -b_1^2 < 0$ et du fait que $\widetilde{P_2}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$, on déduit que P_2 est scindé simple sur $\mathbf{R}$, et que a_1, unique racine de P_1, est strictement entre les deux racines de P_2.
Supposons que P_{n-2} et P_{n-1} soient scindés simples sur $\mathbf{R}$, que leurs racines soient respectivement les α_i et les β_i, avec

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha_{n-2} < \beta_{n-1}$$

(on dit que les racines de P_{n-2} « séparent » celles de P_{n-1}).
Pour la suite, supposons n impair, le raisonnement est parfaitement analogue si n est pair.
On a $\widetilde{P_n}(\beta_i) = -b_{n-1}^2 \widetilde{P_{n-2}}(\beta_i)$. Comme le terme de plus haut degré de P_{n-2} est X^{n-2}, et comme $n-2$ est impair, on a $\widetilde{P}_{n-2}$ est < 0 sur $]-\infty, \alpha_1[$. Et donc $\widetilde{P_n}(\beta_1) = -b_{n-1}^2 \widetilde{P_{n-2}}(\beta_i) > 0$. Or le terme de plus haut degré de P_n est X^n, donc $\widetilde{P_n}$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, donc par théorème des valeurs intermédiaires P_n a au moins une racine dans $]-\infty, \beta_1[$. On continue ainsi (mais pour que ce soit clair il faut faire un tableau de signes), on montre que P_n a au moins une racine sur chaque β_i, β_{i+1} et sur $\beta_{n-1}, +\infty[$, or P_n est de degré n donc a au plus n racines, donc P_n a exactement n racines « séparées » par celles de P_{n-1} et la propriété est récurrente.

Exercice 3 (Etude des matrices de rang 1).
Les questions sont indépendantes. *A l'écrit des Mines, un problème entier autour des matrices de rang 1 a déjà été posé, c'est dire si le sujet est riche.*

1. Démontrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $X\ Y^T$ où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{K})$, X et Y non nuls. Si $p = q$, comment s'exprime alors sa trace en fonction de X et Y ?

Dans les questions suivantes, les matrices considérées sont carrées

2. Donner une matrice de rang 1 diagonalisable et une matrice de rang 1 non diagonalisable.
3. On suppose ici $p = q$, A une matrice de rang 1, carrée d'ordre p. Déterminer, suivant les valeurs de la trace de A, les valeurs propres de A. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.
4. Montrer que si une matrice carrée A vérifie $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$, A est un projecteur (i.e. $A^2 = A$). *Posé à l'oral des Mines*
5. Soit u un endomorphisme de rang 1. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.*Posé à l'oral des Mines*

---

1. Si $A = X\ Y^T$ où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{K})$, X et Y non nuls, on voit que les colonnes de A sont les $y_j X$. Elles sont toutes dans $\mathrm{Vect}(X)$, et donc le rang de A, qui est celui de la famille de ses vecteurs colonnes, est ≤ 1. Mais $A \neq 0$ (car il y a au moins un produit $x_i y_j$ non nul), donc $\mathrm{rg}(A) = 1$. Si réciproquement $\mathrm{rg}(A) = 1$, soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ une colonne qui engendre l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A. Alors ces colonnes peuvent s'écrire $y_1 C, \ldots, y_q C$. Et donc, en notant $X = C$ et Y comme on pense, on a $A = X\ Y^T$. Dans le cas où $p = q$, la trace vaut $\sum x_i y_i$, c'est-à-dire $X^T\ Y$, c'est-à-dire $Y^T\ X$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et diagonalisable car diagonale. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, triangulaire donc ses valeurs propres se voient sur la diagonale : il y a 0, c'est tout. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle. Ce n'est pas le cas. Bien sûr on peut construire des matrices $n \times n$ de la même manière. Plus généralement, on voit que les matrices de la base canonique sont diagonalisable si et seulement si elles sont diagonales.
3. Le rang de A vaut 1, donc

$$\dim(\mathrm{Ker} A) = \dim(E_0(A)) = n - 1$$

(théorème du rang). Donc (cours) 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, donc le polynôme caractéristique P_A est divisible par X^{n-1}. Donc

$$P_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} = X^{n-1}\left(X - \mathrm{Tr}(A)\right)$$

Et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, il n'y a qu'une valeur propre, et le sous-espace propre n'est pas $\mathbf{K}^n$ tout entier, donc A n'est pas diagonalisable. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, il y a deux sous-espaces propres, la somme de leurs dimensions vaut n, donc A est diagonalisable.

4. On reprend à peu près les arguments de la question précédente, pour montrer que A est diagonalisable, semblable à D telle que $d_{1,1} = 1$, $d_{i,j} = 0$ sinon. Or $D^2 = D$, donc $A^2 = A$.

5. Une remarque cruciale : tous les sous-epaces propres d'un endomorphisme sont soit égaux à son noyau, soit inclus dans son image.Cela résulte simplement du fait que, si $\lambda \neq 0$, si $u(x) = \lambda x$, alors $x = u\left(\dfrac{1}{\lambda}x\right)$. Donc, rang 1 ou pas rang 1, un endomorphisme non nul u tel que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ est tel que

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$$

et ne peut pas être diagonalisable.

Autre remarque cruciale : $\mathrm{Im}(u)$ est toujours stable par u, c'est assez évident. Mais dans le cas où cette image est de rang 1, elle est alors nécessairement engendrée par un vecteur propre. Ce qui fait ici que si $\mathrm{Im}(u)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$, on a

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$$

et E est ainsi écrit comme somme de deux sous-espaces propres, il y a diagonalisabilité. Attention ! quand le rang est > 1, l'image n'a aucune raison d'être un sous-espace propre. Simplement, elle contient tous les sous-espaces propres autres que le noyau.

Exercice 4 (**Oral Centrale).** Diagonaliser la matrice carrée réelle dont tous les coefficients valent 1.

Rappel : diagonaliser, c'est donner une matrice P et une matrice D telles que...

Lorsqu'on aura les résultats sur les matrices symétriques réelles, on pourra aller plus vite pour la diagonalisabilité et la détermination des sous-espaces propres.

Pour la diagonalisation effective, ce sont les matrices symétriques réelles qui marchent le plus rapidement. Ici, pour la diagonalisabilité, on peut remarquer que $J^2 = nJ$, donc $X(X-n)$, scindé simple, annule J. Mais ça ne donne pas P. Remarquons que $\mathrm{rg}(J) = 1$, donc le noyau de J est un sous-espace propre de dimension $n-1$. Donc $P_J = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(J)) = x^{n-1}(X-n)$. Or le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre associé à n. Ne reste plus qu'à trouver une base du noyau, ce qui se fait assez facilement. Ensuite, on remplit une matrice P avec des colonnes propres. Par exemple, avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $D_1 = \mathrm{diag}(0, 0, \dots, 0, n)$, on a

$$J = P_1 D_1 P_1^{-1}$$

ou alors (et il y a bien d'autre choix possibles) avec

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $D_2 = \mathrm{diag}(n, 0, \dots, 0, 0)$, on a

$$J = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

Exercice 5 (Une diagonalisation). Diagonaliser la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire trouver une matrice diagonale semblable, la matrice de passage et son inverse) (voir fichier Maple page suivante).

On peut faire le calcul directement, mais il est judicieux d'écrire cette matrice comme combinaison linéaire de deux matrices intéressantes.

On a

$$A = \beta J + (\alpha - \beta) I_n$$

avec J une matrice pleine de 1. On est ramené à diagonaliser J, ce qui est fait dans l'exercice précédent. On obtient, si $J = PDP^{-1}$,

$$A = P(\beta D + (\alpha - \beta) I_n) P^{-1}$$

ce qui diagonalise bien.

```
> restart;with(LinearAlgebra):
> f:=proc(i,j) if i=j then a else b fi end;
```

$$f := \mathbf{proc}(i, j)\ \mathbf{if}\ i = j\ \mathbf{then}\ a\ \mathbf{else}\ b\ \mathbf{end\ if}\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> A:=Matrix(6,6,f);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & b & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b & b \\ b & b & a & b & b & b \\ b & b & b & a & b & b \\ b & b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{bmatrix}$$

```
> s:=[Eigenvectors(A)];
```

$$s := \left[\begin{bmatrix} a-b \\ a-b \\ a-b \\ a-b \\ a-b \\ a+5b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

Attention ! pour Maple, a+5b et a-b sont différents. C'est à l'utilisateur d'examiner le cas où ils seraient égaux. C'est d'ailleurs assez simple.

```
> P:=op(2,s);
```

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> P**(-1).A.P;
```

$$\begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+5b \end{bmatrix}$$

Exercice 6 (diagonalisabilité des matrices compagnes, classique à l'oral et à l'écrit). *Classique car ces matrices interviennent dans certains problèmes : voir la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton, les suites récurrentes...*

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que, pour tout scalaire λ, $\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si P est scindé simple.

3. Retrouver le résultat des questions précédentes en résolvant le système

$$AX = \lambda X$$

et en cherchant les λ pour lesquels il admet une solution X non nulle.

On voit que le calcul du polynôme caractéristique n'est pas toujours la meilleure méthode de calcul des valeurs propres.
On remarquera que cet exercice répond affirmativement à la question « Tout polynôme unitaire est-il le polynôme caractéristique d'une certaine matrice ? ».

---

1. Pour calculer le polynôme caractéristique, un développement par rapport à la première ligne est un peu épineux (efficace, mais il faut écrire les mineurs avec beaucoup de soin). Les autres développements (par rapport à la dernière ligne, ou par rapport à la première ou dernière colonne) marchent, il faut simplement faire une récurrence, mais ce n'est pas gênant car les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ sont intéressants et permettent d'être sûr de la formule. L'astuce consiste en l'opération

$$C_n \longleftarrow C_n + XC_{n-1} + X^2C_{n-2} + \cdots + X^{n-1}C_1$$

puis développement par rapport à le dernière colonne. On trouve dans tous les cas

$$P_A = X^n - a_1X^{n-1} - \ldots - a_n$$

(on vérifie que la trace et le déterminant sont là où il faut !).

2. Les $n-1$ premières colonnes de $A-\lambda I_n$ sont linéairement indépendantes. Par théorème du rang, tout sous-espace propre est de dimension ≤ 1, donc de dimension 1. Et donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n si et seulement s'il y en a n, i.e. si et seulement si P_A est scindé simple. La condition suffisante se transforme ici en condition nécessaire et suffisante.

3. La résolution du système mène au fait qu'il n'a pas de solution non nulle lorsque $\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \ldots - a_n \neq 0$. Et lorsque $\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \ldots - a_n = 0$, il y a une droite vectorielle de solutions, engendrée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi les résultats précédents.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Eléments propres ? diagonalisabilité ? Calcul de** A^n **?**

Deux remarques préliminaires : on n'a pas forcément intérêt à calculer directement par la méthode de Sarrus le polynôme caractéristique d'une matrice 3×3 : on risque de se retrouver avec un polynôme de degré 3 que l'on ne saura pas forcément factoriser. Il y a souvent dans les matrices posées à l'oral des matrices dont la somme des coefficients de chaque ligne (ou chaque colonne) est la même. Ce qui donne rapidement une valeur propre. Par exemple, ici, on voit que 2 est valeur propre, et $(1, 1, 1)$ est vecteur propre associé. Les deux autre valeurs propres (complexes, a priori, sauf si on sait que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables et si on a eu la bonne idée de remarquer que la matrice ici est bien symétrique réelle) ont pour somme 0 (grâce à la trace) et comme produit -1 (grâce au déterminant), ce sont donc 1 et -1. Ce qui permet de diagonaliser sans trop de problème.
Si $A = PDP^{-1}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
On peut aussi diviser X^n par le polynôme minimal de A :

$$X^n = (X-1)(X+1)(X-2)Q + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$$

On calcule les trois coefficients α_n, β_n, γ_n grâce aux valeurs en 1, -1, 2, puis on applique à A :

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$$

Exercice 8 (Diagonalisation simultanée)**.** Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables. Démontrer que u et v commutent si et seulement si ils sont diagonalisables dans une même base, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v (on pourra utiliser la stabilité des sous-espaces propres de u par v ou réciproquement). Enoncer ce résultat en termes de matrices.

Si u et v sont diagonalisables dans une même base, soit $\mathcal{B}$ une telle base. Deux matrices diagonales commutent, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u \circ v)$$

ce qui permet bien de conclure $u \circ v = v \circ u$.
Supposons, réciproquement, $u \circ v = v \circ u$. Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ (les λ_i étant deux à deux distincts), et, pour tout i entre 1 et p,
$E_i(u) = \ker(u - \lambda_i Id)$. Comme u est diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

(on note E l'espace vectoriel sur lequel sont définis u et v). Les E_i sont stables par v (car v commute avec les $u - \lambda_i Id$). Donc v induit sur chaque E_i un endomorphisme v_i qui est, d'après le cours, diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i formée de vecteurs propres de v_i, donc de vecteurs propres de v. En « réunissant » les bases $\mathcal{B}_1$,. . ., $\mathcal{B}_p$, on obtient une base de E (adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$) formée de vecteurs propres pour u et pour v. Donc u et v sont simultanément diagonalisables.
En termes de matrices : soit A, B deux matrices diagonalisables ; $AB = BA$ si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ et D, Δ diagonales telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = P\Delta P^{-1}$

Exercice 9 (**Supplément à la diagonalisation simultanée**)**.**
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales (on pourra commencer par une famille finie).

Etonnant : il y a deux manières d'envisager une récurrence. Et les deux fonctionnent. Mais la première est plus efficace.

On est en dimension finie (cela va sans dire, sinon la diagonalisabilité n'a pas de sens). Récurrons donc sur la dimension de l'espace.
Initialisation : en dimension 1, tout est diagonalisable, il n'y a donc aucun problème.
Récurrence : supposons la propriété vraie en dimension $\leq m$. On se place sur un espace de dimension $m+1$. Si tous les u_i sont des homothéties, c'est terminé. Supposons donc que u_{i_0} ne soit pas une homothétie. Par hypothèse de récurrence (applicable car tous les sous-espaces propres sont de dimension $\leq m$), il y a une base de chacun des sous-espaces propres de u_{i_0} formée de vecteurs propres communs à tous les u_i, $i \neq i_0$. La concaténation de telles bases résout le problème.
Avec cette méthode, nul besoin de commencer par étudier le cas d'une famille finie d'endomorphismes.

Moins agréable :
Montrons par récurrence $\mathcal{P}_n$: « si $u_1, \ldots, u_n$ sont n endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales ».
$\mathcal{P}_2$ a été démontrée.
Montrons $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Soit donc $u_1, \ldots, u_{n+1}$ $n+1$ endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Soit E_λ un sous-espace propre de u_{n+1} ; E_λ est stable par $u_1, \ldots, u_n$, qui induisent sur E_λ des endomorphismes $u_{\lambda,1}, \ldots, u_{\lambda,n}$. Ces endomorphismes commutent car ils sont induits par des endomorphismes qui commutent. Par $\mathcal{P}_n$, il existe une base de E_λ formée de vecteur propres communs à $u_{\lambda,1}, \ldots, u_{\lambda,n}$, donc de vecteurs propres communs à $u_1, \ldots, u_n$. Ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de u_{n+1}, puisqu'ils sont dans E_λ. Or $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{n+1})} E_\lambda$; en « réunissant » des bases des E_λ comme celle qu'on vient de construire, on obtient une base de E formée de vecteur propres commmuns à $u_1, \ldots, u_{n+1}$. D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Le gros défaut de cette méthode, c'est qu'il faut maintenant ruser pour passer à une famille infinie d'endomorphismes :
Pour une famille $(u_i)_{i\in I}$ quelconque d'endomorphismes diagonalisables qui commutent, on commence par remarquer que si on considère une sous-famille finie $(u_j)_{j\in J}$, où J est une partie finie de I, ses éléments sont simultanément diagonalisables (d'après ce qui vient d'être fait). Donc toute combinaison linéaire des u_i est diagonalisable. Donc tous les éléments de $\text{Vect}(u_i)_{i\in I}$ sont diagonalisables. Or ils commutent entre eux (facile). Mais cet espace est de dimension finie (comme sev de $\mathcal{L}(E)$), on peut en prendre une base et lui appliquer le cas « fini », ce qui conclut : tous les éléments de $\text{Vect}(u_i)_{i\in I}$ sont simultanément diagonalisables.

Exercice 10 (Trigonalisation simultanée)**.** Dans cette question, le corps de base est $\mathbf{C}$. On suppose que u et v commutent, mais on ne les suppose plus diagonalisables. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun (on pourra utiliser la stabilité des sous-espaces propres de u par v ou réciproquement). Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Le corps de base étant algébriquement clos, $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. v laisse stable $\text{Ker}(u - \lambda Id)$, car v et $u - \lambda Id$ commutent. Et donc v induit sur $\text{Ker}(u - \lambda Id)$ un endomorphisme v_λ. Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de $v\lambda$ est un vecteur propre de v qui est dans $\text{Ker}(u-\lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u.
Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: « si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = PT'P^{-1}$ ».
Pour $n = 1$, c'est bien clair.
Montrons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de $\mathbf{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de

la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer $\mathcal{P}_n$, il existe donc $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que

$$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$

Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.

Exercice 11 (Une trigonalisation simultanée (oral Mines)).
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Il y a ici une méthode : **une** trigonalisation simultanée se traite comme **la** trigonalisation simultanée. Pourtant ici, l'hypothèse essentielle (commutation) est absente. La question est : comment s'en passer pour obtenir quand même un vecteur propre commun ? Il est peut-être plus clair de s'intéresser aux endomorphismes canoniquement associés. On a $u \circ v = \Theta$, et on aimerait un vecteur propre commun à u et v. C'est-à-dire un x non nul tel que

$$u(x) = \lambda x \qquad , \qquad v(x) = \mu x$$

Mais alors, appliquant u à la deuxième égalité : $\mu u(x) = 0_E$. Donc $\mu = 0$ ou $u(x) = 0$. Donc $\mu = 0$ ou $\lambda = 0$, ce qui indique qu'il va falloir prendre x dans un des noyaux. Si $\mathrm{Sp}(v) \neq \{0\}$, soit x un vecteur propre de v associé à une valeur propre non nulle μ. On déduit alors de $u(v(x)) = 0_E$ que $\mu u(x) = 0_E$, donc $u(x) = 0_E$, donc c'est gagné : on a un vecteur propre commun. Reste le cas où $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$. Remarquons alors que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Tout élément non nul de $\mathrm{Im}(v)$ sera vecteur propre de u. S'il en existe, bien sûr. Mais $v = \Theta$ est un cas pas intéressant (car il n'y a qu'à trigonaliser A). Supposons $v \neq \Theta$. Le sous-espace $\mathrm{Im}(v)$ est non réduit à $\{0_E\}$ et est stable par v, l'endomorphisme induit a donc au moins un vecteur propre (on est sur $\mathbf{C}$), qui est alors vecteur propre de u. Finalement, ce n'était pas la peine de considérer le premier cas. La suite est une récurrence avec calcul par blocs comme dans **la** trigonalisation simultanée.

Exercice 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. **Déterminer l'idéal annulateur de A et la dimension de $\mathbf{R}[A]$.**

Il revient au même de déterminer l'idéal annulateur de A et son polynôme minimal, générateur de cet idéal. On pourrait partir du polynôme caractéristique, et chercher parmi ses diviseurs (vu le théorème de Cayley-Hamilton) : compliqué.

Plus astucieux : si on sait que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, on sait que le polynôme minimal est scindé à racines simples, il n'y a plus qu'à déterminer les valeurs propres de A, qui sont les racines de ce polynôme.

On peut aussi se dire qu'il est utile de savoir se débrouiller avec la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1, qui intervient dans de nombreux exercices. En dimension 3, elle vérifie $J^2 = 3J$. Or $A = 2I_3 - J$. Donc

$$(2I_3 - A)^2 = 3(2I_3 - A)$$

ce qui donne

$$A^2 - A - 2I_3 = 0$$

Le polynôme $X^2 - X - 2$ annule A ; s'il n'était pas minimal, il y aurait un polynôme annulateur de A de degré 1, A serait une homothétie, ce qui n'est pas le cas.

Autre méthode : calculer A^2, et s'apercevoir d'une relation entre A^2, A et I_3.

L'idéal annulateur est donc l'ensemble des multiples de $X^2 - X - 2$.

---

2. **Trouver deux suites réelles** (a_n) **et** (b_n) **telles que pour tout** n, $A^n = a_n I + b_n A$.

• commençons par une méthode assez naturelle :

$(a_0, b_0) = (1, 0)$, $(a_1, b_1) = (0, 1)$ conviennent pour $n = 0$ et $n = 1$. Et, si $A^n = a_n I + b_n A$,

$$A^{n+1} = a_n A + b_n(A + 2I) = 2b_n I + (a_n + b_n)A$$

Par récurrence, la suite $\big((a_n, b_n)\big)_{n\geq 0}$ définie par $(a_0, b_0) = (1, 0)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (2b_n, a_n + b_n)$$

convient. Il y a évidemment unicité car la famille (I, A) est libre (sinon le polynôme minimal serait de degré 1). On peut exprimer les a_n et les b_n : en écrivant

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

et en diagonalisant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou en écrivant

$$b_{n+1} = a_n + b_n = 2b_{n-1} + b_n$$

ce qui donne une relation de récurrence linéaire dont l'équation caractéristique est (pas si surprenant si on y réfléchit un peu)

$$r^2 - r - 2 = 0$$

d'où $\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = (-1)^n \alpha + 2^n \beta$, on calcule α et β à l'aide de $n = 0$ et $n = 1$, puis on a $a_n = 2b_{n-1}$ (si $n \geq 1$).

• Autre méthode : diagonaliser A.

• probablement **la meilleure méthode** (mais elle n'est pas forcément la première à laquelle on pense, cela vaut la peine de bien la comprendre) :

on divise X^n par le polynôme minimal $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$:

$$X^n = (X+1)(X-2)Q + \alpha_n X + \beta_n \qquad (1)$$

Appliqué à A ($(X+1)(X-2)Q$ étant dans l'idéal annulateur) :

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n$$

Pour calculer α_n et β_n, il est naturel de donner à la variable les valeurs -1 et 2 dans l'identité entre fonctions polynômes déduite de (1) :

$$2^n = 2\alpha_n + \beta_n \qquad (-1)^n = -\alpha_n + \beta_n$$

d'où, très facilement, α_n et β_n.

---

3. **Commutant de A ?**

Compte tenu de ce qui a déjà été vu, on peut utiliser le fait que A est diagonalisable, de valeurs propres 2 (double) et -1 (simple). Inutile pour cela de calculer le polynôme caractéristique, il est de notoriété publique que J a pour valeurs propres 0 (double, J étant de rang 1) et 3 (simple). Une base de vecteurs propres ? il suffit de nouveau de chercher les vecteur propres de J : $(1,1,1)$ est vecteur propre de J, associé à la valeur propre 3, donc vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$ sont vecteur propres pour J associés à la valeur propre 0, donc pour A associés à la valeur propre 2. En définissant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a $A = PDP^{-1}$. De plus,

$$AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$$

Une matrice qui commute avec D laisse ses sous-espaces propres stables (c'est plus clair lorsqu'on énonce cela en termes d'endomorphismes, en considérant les endomorphismes canoniquement associés), et donc est du

type
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$
Mais réciproquement, un produit par blocs montre qu'une telle matrice commute avec D (que l'on aura intérêt à écrire par blocs en utilisant le bloc $2I_2$). Les matrices qui commutent avec A sont donc les
$$P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} P^{-1}$$
ou encore (en multipliant les paramètres par 3, pour chasser les dénominateurs) les matrices
$$\begin{pmatrix} a+b+c+d+e & a-2b-2d+c+e & a+b+d-2c-2e \\ a-b-c & a+2b-c & a-b+2c \\ a-d-e & a+2d-e & a-d+2e \end{pmatrix}$$
(avec Maple, c'est plus agréable...)

Exercice 13. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $AC = CB$, C non nulle.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N} \quad A^k C = C B^k$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$. *En général à l'oral, cette question serait posée directement, sans l'intermédiaire de la question précédente.*
3. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Récurrence pour la première question, combinaison linéaire pour la deuxième. On en déduit que si P est par exemple le polynôme minimal de A,
$$CP(B) = (0)$$
Ceci n'implique surtout pas que $P(B) = 0$, mais que $P(B) \notin GL_n(\mathbf{C})$. Or on scinde P (on est sur $\mathbf{C}$, c'est important) :
$$P = \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)$$

(les α_i ne sont donc pas supposés distincts : rien n'oblige A à être diagonalisable). Les α_i sont les valeurs propres de A. Alors

$$\prod_{i=1}^{d}(B - \alpha_i I_n) \notin GL_n(\mathbf{C})$$

Mais alors au moins un des $B - \alpha_i I_n$ n'est pas inversible, ce qui conclut.

Exercice 14. Soit u diagonalisable, λ une valeur propre de u, p_λ la projection sur le sous-espace propre de u associé à λ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme de u (on pourra raisonner matriciellement).

Dans une base adaptée à la décomposition de l'espace en somme directe des sous-espaces propres, on aura

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m1} & & & & \\ & \lambda_2 I_{m2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_p I_{mp} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_{m1} & & & & \\ & (0) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (0) \end{pmatrix}$$

où p est la projection sur le sep $E_{\lambda_1}(u)$ parallèlement à la somme des autres. Soit L_1 le polynôme qui vaut 1 en λ_1, 0 en λ_k pour $k = 1, 2, \ldots, p$ (Lagrange...). On a $B = L_1(A)$ et donc $p = L_1(u)$.

Exercice 15. 1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer qu'il existe au moins une droite stable par u.

---

u a au moins une valeur propre, donc au moins un vecteur propre. Or x est un vecteur propre pour u si et seulement si $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

---

2. **Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie. On veut démontrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u. Pour cela, on considère Q un diviseur irréductible de μ, polynôme minimal de u.**

   (a) **Montrer que** $\mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$ **est différent de** $\{0_E\}$.

   On écrit $\mu = QQ_1$; on a $Q(u) \circ Q_1(u) = \Theta$. Si $Q(u) \in \mathrm{GL}(E)$, alors $Q_1(u) = \Theta$, donc Q_1 annule u. Ce qui contredit la minimalité de μ. Donc $Q(u) \notin \mathrm{GL}(E)$, donc $\mathrm{Ker}\big(Q(u)\big) \neq \{0_E\}$.

   (b) **Soit x non nul dans** $\mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$ **; vérifier que** $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ **est stable par u (on pourra distinguer deux cas, suivant le degré de Q). Conclure.**

   Si $Q = X - \alpha$, dire que $x \in \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$ équivaut à dire

   $$u(x) = \alpha x$$

   Dans ce cas, $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big) = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u, et c'est une droite.

Si $Q = X^2 + \alpha X + \beta$ (avec $\alpha^2 - 4\beta < 0$), dire que $x \in \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$ équivaut à dire

$$u^2(x) = -\alpha u(x) - \beta x$$

et alors $\mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan stable par u.

Comme un polynôme réel irréductible est de degré 1 ou 2, qu'il n'est pas restrictif de supposer unitaire, on conclut.

---

3. **Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $\alpha + i\beta$ est une valeur propre complexe non réelle de A, et que $X_1 + iX_2$ est un vecteur propre associé (α et β sont des réels, X_1 et X_2 des matrices colonnes réelles, que l'on identifiera à des éléments de $\mathbf{R}^n$). Montrer que $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$ est stable par A, et retrouver le résultat de l'exercice précédent.**

On a $A(X_1 + iX_2) = (\alpha + i\beta)(X_1 + iX_2)$, donc $AX_1 - \alpha X_1 + \beta X_2 = i(-AX_2 + \beta X_1 + \alpha X_2)$. Une colonne dont les coefficients sont à la fois réels et imaginaires purs est nulle. Donc

$$AX_1 = \alpha X_1 - \beta X_2 \quad , \quad AX_2 = \beta X_1 + \alpha X_2$$

ce qui montre bien que $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$, qui est une droite ou un plan, est stable par A.

Exercice 16 (Ni une diagonalisation, ni une trigonalisation).
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ n'ayant pas de valeur propre réelle. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que A soit semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

On considère une valeur propre complexe $\alpha + i\beta$ (avec bien sûr α et β réels), $X_1 + iX_2$ un vecteur propre associé, X_1 et X_2 étant des colonnes réelles. Alors en identifiant (il n'est pas dur de voir qu'on a le droit) parties réelles et imaginaires, on obtient

$$AX_1 = \alpha X_1 - \beta X_2 \qquad , \qquad AX_2 = \beta X_1 + \alpha X_2$$

ce qui donne à peu près ce qu'on veut, à condition de voir que (X_1, X_2) est libre. Si X_2 est nulle, X_1 qui ne l'est pas est vecteur propre associé à la valeur propre α, à rejeter. Si $X_1 = tX_2$ avec t réel, on obtient que

$$AX_2 = (t\beta + \alpha)X_2$$

là encore contraire à l'hypothèse.

Exercice 17. Soit A une matrice diagonalisable ; montrer que, pour tout p entier naturel, A^p est diagonalisable.
Réciproquement, soit $p \geq 2$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ tels que A^p soit diagonalisable. Démontrer que A est diagonalisable. Donner un exemple montrant que ce résultat est en général faux si on ne suppose pas la matrice inversible. Donner aussi un exemple montrant que le résultat est faux sur $\mathbf{R}$.
Si A^p est diagonale, A est-elle diagonale ?
Montrer enfin que A est diagonalisable si et seulement si A^p l'est et $\mathrm{Ker}(A^p) = \mathrm{Ker}(A)$.

De $A = PDP^{-1}$ on tire $A^p = PD^pP^{-1}$, ce qui résout la première question.
La seconde se résout en utilisant un argument polynomial : si A^p est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé simple P. Mais $P(X^p)$ annule alors A. Est-il scindé simple ? pour le voir, on écrit

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$$

où les a_i sont deux à deux distincts. A quoi sert l'hypothèse d'inversibilité de A ? à pouvoir supposer les a_i non nuls (on peut par exemple choisir pour P le polynôme minimal de A^p, cette matrice n'ayant pas 0 pour valeur propre). Chaque a_i a exactement p racines p-ièmes distinctes : $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$. On a alors

$$P(X^p) = \prod_{i=1}^{r}(X^p - a_i) = \prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_{i,k})\right)$$

qui est scindé simple (deux nombres complexes qui n'ont pas la même puissance p-ième ne peuvent pas être égaux). Et donc A est diagonalisable.
La considération de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $p = 2$ montre que la réciproque est fausse. Comme toujours sur $\mathbf{R}$, la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est utile : R^2 est diagonalisable (diagonale, même) et pourtant R ne l'est pas. Et par la même occasion on voit que la réponse à la dernière question est négative.

Si A est diagonalisable, A^p l'est, elles sont semblables à des matrices diagonales (D et D^p) qui ont le même nombre de coefficients nuls sur la diagonale, donc leurs noyaux sont de même dimension, or $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^p)$...Supposons réciproquement que A^p soit diagonalisable, et que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^p)$. On suppose ce noyau non nul, sinon le travail a déjà été fait. Et on écrit

$$P(X) = X\prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$$

le polynôme minimal de A^p, avec les a_i deux à deux distincts, non nuls. Avec les notations ci-dessus, le polynôme

$$X^p\prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_{i,k})\right)$$

annule A, donc, par théorème des noyaux,

$$\mathbf{K}^n = \text{Ker}(A^p) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r}\left(\bigoplus_{k=1}^{p}\text{Ker}(A - \alpha_{i,k}I_n)\right)$$

Mais en remplaçant $\text{Ker}(A^p)$ par $\text{Ker}(A)$, on obtient que $\mathbf{K}^n$ est somme de sous-espaces propres de A (dans la somme directe, il y a peut-être des espaces réduits à $\{0_{\mathbf{K}^n}\}$, mais ce n'est pas grave, ils ne comptent pas). Donc A est diagonalisable.

Exercice 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n\mathbf{K}$, et soit $\Phi_A \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\big)$ définie par

$$\Phi_A(M) = AM$$

Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Par récurrence on vérifie

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \Phi_A^k \ : \ M \mapsto A^k M$$

Et, par combinaison linéaire de ces résultats :

$$\forall P \in \mathbf{K}[X] \qquad P(\Phi_A) \ : \ M \mapsto P(A)M$$

Donc $P(\Phi_A) = \Theta_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} \ \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ P(A)M = (0) \ \Leftrightarrow P(A) = (0)$ Les polynômes annulateurs de Φ_A et ceux de A sont donc les mêmes. On en déduit que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est (car Φ_A admet un polynôme annulateur scindé simple si et seulement si A admet un polynôme scindé simple). Accessoirement, les valeurs propres de A et de Φ_A sont les mêmes.

Exercice 19. Démontrer que toute matrice vérifiant $A^2 = A$ est diagonalisable.

$X^2 - X = X(X-1)$ est scindé à racines simples.

Exercice 20 (**Oral CCP, Mines, écrit X, ens...**).

Pas difficile, mais à savoir !

Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que tous les éléments de G sont diagonalisables.

Tout élément est d'ordre fini, donc admet un polynôme annulateur de la forme $X^d - 1$. Or sur $\mathbf{C}$ un tel polynôme est scindé à racines simples.

Exercice 21 (**Matrices de permutation**).

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ par

$$(P_\sigma)_{i,j} = 1 \quad \text{si} \quad i = \sigma(j)\ , \quad 0 \text{ sinon}$$

Montrer que P est diagonalisable.

Lien avec l'exercice précédent ?

Le plus simple est, notant u_σ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à P_σ, de remarquer que

$$u_\sigma^k(e_i) = e_{\sigma^k(i)}$$

si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Il existe donc p tel que $u_\sigma^p = Id$, ce qui montre qu'il y a un polynôme annulateur de la forme $X^p - 1$, scindé à racines simples car on est sur $\mathbf{C}$.

Exercice 22 (**Oral Centrale**). Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3, vérifiant $f^3 = f^2$ et $\dim(\ker(f - Id)) = 1$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \{0, 1\}$.

$$X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$$

n'est certes pas scindé à racines simples, mais ce polynôme annulateur donne déjà beaucoup d'indications. On peut utiliser le théorème des noyaux, tenant compte du fait que

$$X^2 \wedge (X-1) = 1$$

et on obtient

$$E = \mathrm{Ker}(f - Id) \bigoplus \mathrm{Ker}(f^2)$$

Le premier sous-espace est de dimension 1 d'après l'énoncé, le second de dimension 2. Il peut être égal à $\mathrm{Ker}(f)$, dans ce cas une base adaptée donne la forme voulue avec $\alpha = 0$. Si en revanche on a une inclusion stricte de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathrm{Ker}(f^2)$, on peut prendre e dans $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(e) \in \mathrm{Ker}(f)$. Et $(f(e), e)$ est libre. On rajoute un élément de $\mathrm{Ker}(f - Id)$ devant, on obtient ce qu'on veut avec $\alpha = 1$.

Exercice 23 (Oral ens). Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $p^2 = p$ ou $p^3 = p$ alors p est diagonalisable.

Les polynômes $X^2 - X = X(X-1)$ et $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ sont scindés à racines simples, il suffit donc d'utiliser la cns du cours.

---

2. Si $p^4 = p$, l'endomorphisme p est-il diagonalisable ?

Le polynôme $X^4 - X = X(X-1)(X^2+X+1)$ n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$. Si le polynôme minimal de p est X, $X-1$ ou $X(X-1)$, p est diagonalisable. Mais sinon, $X^2 - X + 1$ est un facteur de ce polynôme minimal, qui n'est pas scindé, donc p n'est pas diagonalisable. Remarquons d'ailleurs qu'ici, p ne peut pas être trigonalisable sans être diagonalisable.

---

3. On suppose $n = 3$. Trouver une partie finie S de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de cardinal minimal telle que, pour tout endomorphisme p tel que $p^4 = p$, on peut trouver $A \in S$ telle que A soit la matrice de p dans une certaine base de E.

Le polynôme minimal de p divise $X^4 - X$, est de degré ≤ 3 (théorème de Cayley-Hamilton) et a au moins une racine réelle (on est en dimension impaire). Ce peut être X, $X-1$, $X(X-1)$, $X(X^2+X+1)$, $(X-1)(X^2+X+1)$.

(a) Si le polynôme minimal est X. Alors la matrice de p dans n'importe quelle base de E est (0) (matrice nulle à trois lignes et trois colonnes).

(b) Si le polynôme minimal est $X-1$. Alors la matrice de p dans n'importe quelle base de E est I_3.

(c) Si le polynôme minimal est $X(X-1)$. Alors p est diagonalisable et a deux valeurs propres : 0 et 1. L'une est simple, l'autre double. Il existe donc une base dans laquelle la matrice de p est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Si le polynôme minimal est $X(X^2+X+1)$. Le lemme de décomposition des noyaux dit alors

$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p^2 + p + Id)$$

$\mathrm{Ker}(p^2+p+Id)$ est stable par p, et est de dimension paire (car p induit sur ce noyau un endomorphisme annulé par X^2+X+1 qui n'a pas de racine réelle, donc l'endomorphisme induit n'a pas de valeur propre, ce qui ne peut se produire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel que lorsque la dimension est paire). Il n'est pas réduit à $\{0_E\}$ (sinon on aurait $p = \Theta$, le polynôme minimal serait X), il est donc de dimension 2, et par voie de conséquence $\mathrm{Ker}(p)$ est de dimension 1. Si e_1 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(p^2 + p + Id)$, alors $p(e_1) = e_2$ est aussi dans ce noyau, et (e_1, e_2) est libre (il n'y a pas de valeur propre, donc pas de vecteur propre dans ce noyau, donc e_1 n'est pas vecteur propre). Enfin,

$$p(e_2) = p^2(e_1) = (-p - Id)(e_1) = -e_2 - e_1$$

Complétons (e_1, e_2) en une base de E en lui adjoignant un vecteur e_3 dans $\mathrm{Ker}(p)$. Dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Si le polynôme minimal est $(X-1)(X^2+X+1)$; même étude, en remplaçant $\mathrm{Ker}(p)$ par $\mathrm{Ker}(p - Id)$. On aboutit à une base dans laquelle la matrice de p est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Finalement, les cas s'excluant mutuellement, on a trouvé un ensemble S minimal de 6 matrices. Un tel ensemble n'est bien entendu pas unique.

Exercice 24 (Réduction par blocs)**.** Soit A, B deux matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice

$$M \quad = \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.

Méthode polynomiale : On démontre par récurrence, en utilisant le produit par blocs, que

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad M^k \quad = \quad \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$$

et, par combinaison linéaire de ces égalités, pour tout polynôme P :

$$P(M) \quad = \quad \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

Si M est diagonalisable, il existe P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$. Alors $P(A) = P(B) = 0$, donc A et B sont diagonalisables.

Réciproquement, si A et B sont diagonalisables, il existe Q_1 et Q_2 scindés à racines simples tels que $Q_1(A) = 0$ et $Q_2(B) = 0$ (remarque : on note toujours 0 la matrice nulle, quel que soit son format, ce qui est un peu abusif !). Soit $P = \text{ppcm}(Q_1, Q_2)$. P est scindé simple (on peut écrire $Q_1 = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - a_i)^{m_i}$ et $Q_2 = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - a_i)^{m'_i}$ avec m_i et m'_i dans $\{0, 1\}$, et alors $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - a_i)^{\max(m_i, m'_i)})$), et $P(M) = 0$, donc M est diagonalisable.

On peut aussi raisonner par équivalences, en utilisant le polynôme minimal : on sait que

$$P(M) = 0 \ \Leftrightarrow P(A) = P(B) = 0$$

et donc, si $\mathcal{I}_M$ (resp. $\mathcal{I}_A$, $\mathcal{I}_B$) désigne l'idéal des polynômes annulateurs de M (resp. de A, de B), $\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B$, donc, notant μ_M le polynôme annulateur de M (resp....), $\mu_M = \text{ppcm}(\mu_A, \mu_B)$. Et donc

$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable } &\Leftrightarrow \ \mu_M \text{ scindé simple} \\ &\Leftrightarrow \ \mu_A \text{ et } \mu_B \text{ scindés simples} \\ &\Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ diagonalisables} \end{aligned}$$

Méthode « vectorielle » Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{K}^{p+q}$ canoniquement associé à M. Si $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{p+q})$ est la base canonique de $\mathbf{K}^{p+q}$, alors $F = \text{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ et $G = \text{Vect}(\epsilon_{p+1}, \ldots, \epsilon_{p+q})$ sont stables par u, et si on note u_F et u_G les endomorphismes induits par u sur ces sous-espaces, alors $A = \mathcal{M}_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_p)}(u_F)$ et $B = \mathcal{M}_{(\epsilon_{p+1},\ldots,\epsilon_{p+q})}(u_G)$. D'après le cours, si u est diagonalisable, u_F et u_G le sont, donc A et B le sont. Réciproquement, si A et B sont diagonalisables, u_F et u_G le sont, il existe donc une base de F formée de vecteurs propres de u_F (donc de u) et une base de G formée de vecteurs propres de u_G (donc de u) ; en « recollant » ces deux bases, on obtient une base de $\mathbf{K}^{p+q}$ formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable, donc M l'est.

Autre méthode On peut calculer le polynôme caratéristique χ_M de M : $\chi_M = \chi_A \chi_B$, donc $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$. Puis, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, on essaye de trouver le sous-espace propre associé en résolvant $MX = \lambda X$. La structure par blocs de M suggère d'écrire, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p+q,1}(\mathbf{K})$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où $X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{K})$, et alors

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} AX_1 = \lambda X_1 \\ BX_2 = \lambda X_2 \end{cases}$$

Pour résoudre, on distingue trois cas, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$. On y arrive (en appliquant la caractérisation de la diagonalisabilité qui utilise la somme des dimensions des sous-espaces propres), mais c'est plus long que les méthodes précédentes.

Autre idée Si A et B sont diagonalisables, on a $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ (notations habituelles : P et Q inversibles, Δ et D diagonales). La matrice $R = \begin{pmatrix} P & (0) \\ (0) & Q \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & (0) \\ (0) & Q^{-1} \end{pmatrix}$, et, en effectuant un produit par blocs, on trouve que $R^{-1}MR$ est diagonale. Donc M est diagonalisable. Cette idée ne marche pas très bien pour la réciproque.

---

2. **Démontrer que M est trigonalisable si et seulement si A et B le sont.**

Ici, les méthodes polynomiale et vectorielle fonctionnent, mais il est beaucoup plus rapide de dire que χ_M est scindé si et seulement si χ_A et χ_B le sont (car $\chi_M = \chi_A \chi_B$).

---

3. **Soit C une matrice à p lignes et q colonnes. On définit**

$$N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune. Démontrer que N est diagonalisable, et est semblable à M.

On a $\chi_N = \chi_A \chi_B$, donc $\mathrm{Sp}(N) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$, on cherche le sous-espace propre associé en résolvant $NX = \lambda X$. On écrit, si $X \in \mathcal{M}_{p+q,1}(\mathbf{K})$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où $X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{K})$, et alors

$$NX = \lambda X \iff \begin{cases} AX_1 + CX_2 = \lambda X_1 \\ BX_2 = \lambda X_2 \end{cases}$$

Premier cas : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et, donc, $\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$. Alors :

$$NX = \lambda X \iff \begin{cases} AX_1 = \lambda X_1 \\ X_2 = (0) \end{cases}$$

Donc, notant $E_\lambda(N)$ le sous-espace propre de N associé à λ,

$$E_\lambda(N) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ (0) \end{pmatrix} \ ; \ X_1 \in E_\lambda(A) \right\}$$

L'application $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ (0) \end{pmatrix}$ est donc un isomorphisme de $E_\lambda(A)$ sur $E_\lambda(N)$, ces deux sous-espaces ont donc même dimension.
Deuxième cas : $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et, donc, $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$

$$NX = \lambda X \iff \begin{cases} BX_2 = \lambda X_2 \\ X_1 = (A - \lambda I_n)^{-1} CX_2 \end{cases}$$

Donc,

$$E_\lambda(N) = \left\{ \begin{pmatrix} (A - \lambda I_n)^{-1} CX_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \ ; \ X_2 \in E_\lambda(B) \right\}$$

L'application $X_2 \mapsto \begin{pmatrix} (A-\lambda I_n)^{-1}CX_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$ est donc un isomorphisme de $E_\lambda(B)$ sur $E_\lambda(N)$, ces deux sous-espaces ont donc même dimension.
Finalement,

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(N)} \dim\bigl(E_\lambda(N)\bigr) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\bigl(E_\lambda(A)\bigr) + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(B)} \dim\bigl(E_\lambda(B)\bigr) = p+q$$

d'où la diagonalisabilité de N. Elle a les mêmes valeurs propres que M, avec les même multiplicités. Comme M et N sont diagonalisables (M est « une N particulière » : avec $C=0$), elles sont donc semblables à une même matrice diagonale (mêmes coefficients diagonaux, même nombre d'apparitions), elles sont semblables.

Exercice 25 (Oral Centrale). Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n. On suppose que son polynôme minimal est

$$m_A = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k}$$

Déterminer le polynôme minimal de la matrice construite par blocs : $\begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}$

(O désigne un bloc carré nul, I un bloc carré unité).

On commence par un produit par blocs et une récurrence pour voir que si $B = \begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}$ alors pour tout naturel $k \geq 1$, $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1} \\ O & A^k \end{pmatrix}$. Puis, par combinaison linéaire, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A) \\ O & P(A) \end{pmatrix}$. Donc P annule B si et seulement si P et P' annulent A, donc si et seulement si m_A divise P et P', donc si et seulement si chaque λ_k est racine de multiplicité au moins m_k+1 de P. Finalement

$$m_B = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{1+m_k}$$

Exercice 26. Soit A une matrice carrée d'ordre n. A quelle condition la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Soit P un polynôme ; on montre (en commençant, par récurrence, par les X^k, puis pas combinaison linéaire) que

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

Si M est diagonalisable, il existe P scindé simple tel que $P(M) = 0$, donc $P(A) = 0$ (A est donc diagonalisable) et $AP'(A) = 0$. Le polynôme minimal de A divise donc P et XP'. Il divise donc $P \wedge XP'$. Or, si P est scindé simple, $P \wedge P' = 1$. Donc $P \wedge XP' = P \wedge X$. Donc le polynôme minimal de A divise X, c'est donc X. Donc $A = 0$, la réciproque est claire.

Exercice 27. Soit A une matrice carrée d'ordre n. A quelle condition la matrice définie par blocs

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Méthode 1 : polynômes
Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule, par blocs :

$$M^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Donc, si M est diagonalisable, M^2 l'est, donc A l'est (voir exercice sur la « réduction par blocs »). Réciproquement, si A est diagonalisable, M^2 l'est (voir le même exercice). Et il existe donc un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M^2) = (0)$. Le polynôme $P(X^2)$ annule alors M. Est-il scindé simple ? on peut écrire

$$P(X^2) = \prod_{i=1}^{d} (X^2 - \mu_i)$$

où les μ_i sont deux-à-deux distincts. Supposons dorénavant que le corps de base est $\mathbf{C}$. Si les μ_i sont non nuls, chaque $(X^2 - \mu_i)$ se factorise en

$$X^2 - \mu_i = (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$$

où $\pm\alpha_i$ sont les racines carrées de μ_i. On voit alors que $P(X^2)$ est scindé simple.
Conclusion partielle : Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ est si A est diagonalisable inversible, M est diagonalisable.
(en effet, on peut alors supposer tous les μ_i non nuls ; si un μ_i est nul, on peut enlever le terme X correspondant du polynôme annulateur P, car M^2 est inversible).
Et si A est diagonalisable mais non inversible ? On résout alors $MX = 0$ et $M^2X = 0$ en écrivant par blocs

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

(X_1 et X_2 étant deux colonnes de même « hauteur »). On voit que les dimensions des noyaux de M et de M^2 sont différentes. Or si M est diagonalisable, elle est semblable à une matrice D diagonale, M^2 est semblable à D^2, il y a autant de coefficients non nuls sur la diagonale de D que sur celle de D^2, donc les noyaux de M et de M^2 ont même dimension. Finalement,

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible

Méthode 2
L'avantage de cette deuxième méthode est de ne pas faire d'hypothèse sur le corps de base !
On résout $MX = \lambda X$ par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} X_2 & = & \lambda X_1 \\ AX_1 & = & \lambda X_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} X_2 & = & \lambda X_1 \\ AX_1 & = & \lambda^2 X_1 \end{array} \right.$$

On voit que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, et les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes (l'application

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ dans $E_\lambda(M)$). En utilisant la caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on en déduit

M est diagonalisable si et seulement si A l'est et toutes les valeurs propres de A ont deux racines carrées distinctes.

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on retrouve le résultat précédent (heureusement !). Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ par exemple, M est diagonalisable si et seulement si A l'est et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}_*^+$.

Exercice 28 (Résultats classiques sur les endomorphismes nilpotents). Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbf{K} - ev$ de dimension finie n, u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Démontrer que u est trigonalisable.

Le polynôme scindé X^p (p est un entier naturel non nul) annule u.

---

2. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

Le polynôme caractéristique de u est scindé (car u est trigonalisable). La seule valeur propre possible pour u est 0 (seule racine de X^p). Il n'y a qu'un polynôme scindé unitaire de degré n qui a comme seule racine 0 : c'est X^n.

Il y a beaucoup de manières différentes d'arriver à ce résultat. On peut par exemple prendre une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, il n'y a que des 0 sur la diagonale, le polynôme caractéristique de u se calcule facilement...

---

3. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, démontrer que l'indice de nilpotence de u est au plus égal à n.

Le polynôme caractéristique est X^n ; le polynôme minimal est donc X^p pour un certain $p \leq n$ (le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique). On a alors $u^p = \Theta$ (X^p annule u) et $u^{p-1} \neq \Theta$ (X^{p-1} n'annule pas u). Donc p est l'indice de nilpotence de u.

---

4. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, à l'aide de l'exercice classique sur les « noyaux itérés ».

On a (voir exercice sur les noyaux itérés) :

$$\mathrm{Ker}(u^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(u^{p-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^p) = E$$

La suite finie $\Big(\dim\big(\mathrm{Ker}\, u^k\big)\Big)_{0\leq k\leq p}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers naturels, ce qui implique facilement, pour tout k entre 0 et p, $\dim\big(\mathrm{Ker}\, u^k\big) \geq k$ (récurrence « finie »). Et, partant, $n \leq p$.

---

5. **Démontrer que, sur $\mathbf{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est son unique valeur propre. Est-ce encore vrai sur $\mathbf{R}$?**

Si une matrice est nilpotente, sa seule valeur propre est 0, quel que soit le corps. Réciproquement, si la seule valeur propre est 0, comme on est sur $\mathbf{C}$, le polynôme minimal est scindé, il est donc de la forme X^p. Donc la matrice est nilpotente. En revanche, sur $\mathbf{R}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(construite à partir d'un bloc 2×2 de matrice de rotation d'angle $\pi/2$) a pour seule valeur propre 0, et pourtant n'est pas nilpotente (mais bien sûr, elle a des valeurs propres complexes non nulles).

Exercice 29 (Calculs sur les matrices nilpotentes, oral ou écrit). Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente (c'est-à-dire ayant une puissance nulle).

1. Démontrer que N^n est nulle.
2. Démontrer que $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles, et calculer leurs inverses en fonction de N.
3. On écrit le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

où P_n est un polynôme de degré n qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter

En utilisant les opérations sur les développements limités, montrer que le polynôme $1 + x - P_n(x)^2$ est divisible par x^{n+1} ; déterminer alors, à l'aide de P_n et de n, une matrice M dont le carré soit égal à $I_n + N$.

4. Peut-on trouver par la même méthode une racine p-ième (matricielle, bien entendu) de $I_n + N$ $(p \geq 3)$?

---

1 : noyaux emboîtés ou Cayley-Hamilton.

2 : une formule bien importante :

$$I_n - N^n = (I_n - N)(I_n + \cdots + N^{n-1})$$

donc

$$I_n = (I_n - N)(I_n + \cdots + N^{n-1})$$

donc $I_n - N$ est inversible. Et on peut remplacer N par $-N$: $I_n + N$ est inversible, et

$$(I_n + N)^{-1} = I_n - N \cdots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$$

3 : On a, par opérations sur les développements limités (on peut multiplier des développements limités, les élever à une puissance fixe, donc ici élever un développement limité au carré) :

$$1 + x = P_n(x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

ou encore

$$1 + x - P_n(x)^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Mais $x \longmapsto 1 + x - P_n(x)^2$ est une fonction polynôme, et si on écrit

$$1 + X - (P_n(X))^2 = a_\delta X^\delta + a_{\delta+1} X^{\delta+1} + \cdots + a_d X^d$$

avec $a_\delta \neq 0$, on a

$$1 + x - (P_n(x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} a_\delta x^\delta$$

Dire que $1 + x - P_n(x)^2 \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, c'est dire que $a_\delta x^\delta \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, ou encore que

$$\frac{a_\delta x^\delta}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ou encore que $\delta \geq n+1$. On conclut bien à l'existence d'un polynôme Q tel que

$$1 + X - P_n(X)^2 = X^{n+1} Q(X)$$

et en appliquant cela à N :

$$P_n(N)^2 = I_n + N$$

4. Même chose en considérant le développement limité de $(1+x)^{1/p}$.

Exercice 30 (Oral Centrale). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Vu la suite, on serait étonné que A fût diagonalisable. Et effectivement, son polynôme caractéristique vaut $(X-1)^3$, elle a une seule valeur propre, si elle était diagonalisable elle serait diagonale. Remarquons alors que, par blocs, on n'a qu'à s'occuper de réduire

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est $(X-1)^2$. Pas besoin de faire compliqué : on cherche un vecteur propre : $u = (1,1)$ convient (toujours...). Puis on sait, si ϕ est l'endomorphisme canoniquement associé à B, si v est un vecteur indépendant de u, que

$$M_{(u,v)}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(à cause de la trace). Mais $a \neq 0$ (B n'est pas diagonalisable), donc en remplaçant v par $\dfrac{1}{a}v$, on aura une base convenable.
Pour le calcul de A^n, deux méthodes : calculer une matrice de passage de A à la matrice réduite, par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(sauf erreur de ma part). La puissance n-ème de la matrice réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il suffit de calculer P^{-1} et de faire un produit matriciel. Sinon, remarquer que $(X-1)^2$ annule A. Or

$$X^n = (X-1)^2 Q(X) + n(X-1) + 1$$

(Taylor) et donc $A^n = n(A - I_3) + I_3$, plus rapide et élégant.

Exercice 31. Réduire les matrices $A \in \mathcal{M}_5(\mathbf{K})$ telles que $A^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = 3$.

On constate que, X^3 étant scindé, la matrice est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieur stricte.
Le problème est de trouver une matrice semblable à A et la plus simple possible. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A (*il n'est pas nécessaire d'introduire u : on peut tout faire avec A, cela demande seulement un peu plus*

de précautions dans la rédaction). Classiquement (noyaux emboîtés, à refaire si on a ce genre d'exercice à l'oral car ce n'est pas « du cours »), on a

$$\mathrm{Ker}(u^0) = \{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^3) = \mathbf{K}^5$$

Ceci bien sûr, à condition de vérifier que $A^2 \neq 0$. Ce qui n'est pas le plus difficile : si $A^2 = 0$, alors $\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Ker}A$, ce qui est incompatible, pour des raisons de dimension, avec l'hypothèse $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Comme $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 2$, la dimension de $\mathrm{Ker}(u^2)$ peut donc a priori être égale à 3 ou 4. On va examiner ces deux éventualités.

• Supposons $\dim\big(\mathrm{Ker}(u^2)\big) = 3$. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^2)$ dans $\mathbf{K}^5$; il est de dimension 2. Si (e, f) est une base de F, $u(e)$ et $u(f)$ sont dans $\mathrm{Ker}(u^2)$ (comme tout vecteur d'ailleurs) mais pas dans $\mathrm{Ker}(u)$ (car e et f ne sont pas dans $\mathrm{Ker}(u^2)$). Et ils forment une famille libre : si $au(e) + bu(f) = 0_{\mathbf{K}^n}$, on a $u(ae + bf) = 0_{\mathbf{K}^5}$, donc $ae + bf \in \mathrm{Ker}(u)$. Mais $F \cap \mathrm{Ker}(u) \subset F \cap \mathrm{Ker}(u^2) = \{0_{\mathbf{K}^5}\}$. Donc $ae + bf = 0_{\mathbf{K}^5}$. Et donc $a = b = 0$. On a donc une famille libre à deux éléments, qui engendre un sev de $\mathrm{Ker}(u^2)$ en somme directe avec $\mathrm{Ker}(u)$. On aurait donc $2 + 2 \leq 3$. **Ce cas ne peut pas se produire**. *On a montré plus généralement, dans l'exercice sur les noyaux emboîtés, que l'écart entre les dimensions de deux noyaux successifs était décroissant.*

• Supposons $\dim\big(\mathrm{Ker}(u^2)\big) = 4$. Si $e \notin \mathrm{Ker}(u^2)$, $u(e) \in \mathrm{Ker}(u^2) \setminus \mathrm{Ker}\, u$, soit f dans $\mathbf{K}^5$ tel que $(f, u(e))$ soit une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $\mathrm{Ker}(u^2)$ (possible pour des raisons de dimension). Alors on vérifie que $\big(u(f), u^2(e)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, u$. On vérifie aussi que $\big(u(f), f, u^2(e), u(e), e\big)$ est une base de $\mathbf{K}^5$ (former une combinaison linéaire nulle, prendre l'image par u^2, puis par u). Dans cette base, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a d'autres matrices aussi « valables » ; ici, le choix de l'ordre des vecteurs de la base est du type réduction de Jordan.

Exercice 32 (Centrale, X, encore un classique). Soit A une matrice carrée d'ordre n réelle ou complexe. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout k entre 1 et n, $\text{tr}(A^k) = 0$. *Plusieurs méthodes possibles. On pourra par exemple utiliser une récurrence sur la dimension de la matrice et montrer que le polynôme minimal d'une matrice carrée d'ordre n vérifiant, pour tout k entre 1 et n,* $\text{tr}(A^k) = 0$*, admet 0 pour racine.*

Si A est nilpotente, elle annule un polynôme de la forme X^p, $p \geq 1$, qui est scindé. Elle est donc trigonalisable. Soit T triangulaire supérieure et P inversible telles que

$$A = PTP^{-1}$$

Les coefficients diagonaux de T sont ses valeurs propres, donc les valeurs propres de A. Or la seule valeur propres possible pour A est 0. Donc T est triangulaire supérieure « stricte », c'est aussi le cas de ses puissances ; on a donc, pour tout $k \neq 0$, $\text{tr}(T^k) = 0$, donc $\text{tr}(A^k) = 0$.
Pour la réciproque, supposons

$$\forall k \in \{1, \ldots, k\} \qquad \text{tr}(A^k) = 0$$

Et soit $\mu = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_0$ le polynôme minimal de A ; alors

$$A^d + c_{d-1}A^{d-1} + \cdots + c_0 I_n = (0)$$

Prenons la trace ; comme $d \leq n$ (théorème de Cayley-Hamilton), on a $nc_0 = 0$, donc $c_0 = 0$ (on suppose ici que la caractéristique de $\mathbf{K}$ ne divise pas n, sinon le résultat n'est pas valable). On voit que $0 \in \text{Sp}(A)$. Dans une base de $\mathbf{K}^n$ dont le premier vecteur est un élément de $\text{Ker}\, A$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L \\ (0) & B \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$. Donc, par récurrence et produit par blocs,

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & L_k \\ (0) & B^k \end{pmatrix}$$

Et, pour tout k entre 1 et $n-1$, $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(M^k) = \text{tr}(B^k) = 0$. Admettant la propriété à l'ordre $n-1$, on conclut que B est nilpotente. Donc il existe p tel que $B^p = 0$, donc

$$M^p = \begin{pmatrix} 0 & L_p \\ (0) & (O) \end{pmatrix}$$

et donc $M^{p+1} = 0$, ce qui permet de dire $A^{p+1} = 0$. On conclut donc par récurrence, comme souvent très facile à initialiser (pour $n = 1$).

Exercice 33 (Oral Centrale). Soit $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension p qui commutent deux à deux. Démontrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_p$ est l'endomorphisme nul.

Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, l'image de v est stable par u. Et l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(v)$ est nilpotent (conséquence du fait que u l'est). Il n'est donc pas surjectif, et on en déduit que

$$\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$$

(car $u\left(\mathrm{Im}(v)\right)$ est un sous-espace « strict » de $\mathrm{Im}(v)$). On continue de même...

Exercice 34 (Oral ens). Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout p entre 1 et n, $\mathrm{tr}(A^p) = 0$.
2. On suppose que $\{\lambda \in \mathbf{C},\ A + \lambda B \text{ nilpotente}\}$ contient au moins $n + 1$ éléments. Montrer que A et B sont nilpotentes.

La première question est un grand classique. Pour la deuxième, on constate que

$$\lambda \longmapsto \mathrm{tr}\left((A + \lambda B)^k\right)$$

est, pour tout k, polynomiale, de degré $\leq k$, avec coefficient de λ^k : $\mathrm{tr}(B^k)$ et coefficient constant : $\mathrm{tr}(A^k)$. Cette fonction polynomiale s'annule au moins $n + 1$ fois, donc, si $k \leq n$, elle est nulle. Et donc, pour tout k entre 1 et n, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k) = 0$. Ce qui conclut.

Exercice 35 (Oral Mines). Démontrer que si A, B sont deux matrices carrées complexes telles que $AB - BA$ commute avec A et avec B, alors elles sont simultanément trigonalisables. *On pourra s'inspirer de l'exercice sur la réduction simultanée.*

L'idée est de montrer que $AB - BA$ n'est pas inversible. Son noyau est stable par A et par B. On considère alors les restrictions à $\mathrm{Ker}(AB - BA)$ des endomorphismes canoniquement associés à A et B. Ces restrictions commutent, et donc ont un vecteur propre commun, ce qui permet de faire une récurrence.
Reste la question : pourquoi $AB - BA$ est-il non inversible ? Sa trace est nulle, on peut donc essayer

$$(AB-BA)^2 = AB(AB-BA)-BA(AB-BA) = A(AB-BA)B-BA(AB-BA)$$

qui est donc aussi de trace nulle. Et si on arrive à continuer, $AB - BA$ sera nilpotente, donc non inversible.
Mais cela demande des connaissances. Essayons :

$$A(AB - BA) + (AB - BA)A = A^2B - BA^2$$

d'une part,

$$A(AB - BA) + (AB - BA)A = 2A(AB - BA)$$

d'autre part. Donc $A^2B-BA^2 = 2A(AB-BA)$. On montre ainsi par récurrence que $A^kB - BA^k = kA^{k-1}(AB - BA)$ si $k \geq 1$, et $A^0A - BA^0 = (0)$. D'où par combinaison linéaire,

$$P(A)B - BP(A) = P'(A)(AB - BA)$$

pour tout polynôme P. En particulier pour le polynôme minimal de A. Or si P est ce polynôme, P' n'annule pas A, donc $AB - BA$ ne peut pas être inversible.

Exercice 36 (Oral ens). Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanéments diagonalisables.

Notons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il peut être utile de voir J de la manière suivante : si j est l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à J, si $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ est la base canonique de $\mathbf{C}^n$, alors $j(\epsilon_i) = \epsilon_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n-1$, et $j(\epsilon_n) = \epsilon_1$. Ou encore, $j(\epsilon_{\overline{a}}) = \epsilon_{\overline{a+1}}$ en définissant $\epsilon_{\overline{a}} = \epsilon_r$ où r est le reste de la division de a par n. Ces remarques permettent d'obtenir facilement J^2, J^3,...sans poser la multiplication matricielle. Et de voir que

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$$

D'autre part, $J^n = I_n$. Le polynôme minimal de J est donc $X^n - 1$ (il divise $X^n - 1$, et ne peut être de degré strictement inférieur à n car le calcul précédent montre que la famille $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$ est libre.

Finalement, $\mathcal{A} = \mathbf{C}[J]$, et donc est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.

J est annulée par $X^n - 1$, scindé à racines simples sur **C** (ses racines sont les n racines n-ièmes de l'unité dans **C**). Donc J est diagonalisable ; il existe D diagonale et P inversible telles que

$$J = PDP^{-1}$$

Pour tous $(a_0, \ldots, a_{n-1})$,

$$a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1} = P(a_0 I_n + a_1 D + \cdots + a_{n-1} D^{n-1}) P^{-1}$$

or $a_0 I_n + a_1 D + \cdots + a_{n-1} D^{n-1}$ est diagonale. Ce qui répond à la question.

On remplace C par un corps K dans lequel $X^n - 1$ est scindé. Le résultat de la question précédente subsiste-il ? Discuter en fonction de la caractéristique de K.

Question plus délicate **et maintenant hors-programme, on ne sait pas ce que veut dire la carcatéristique d'un corps** ; supposons que $X^n - 1$ ait une racine (au moins) double : de $X^n - 1 = (X - a)^2 Q(X)$ on déduit $nX^{n-1} = (X - a)^2 Q'(X) + 2(X - a)Q(X)$, donc $na^{n-1} = 0$.
premier cas : la caractéristique de K ne divise pas n (ce qui inclut le cas où **K** serait de carctéristique nulle). Alors nécessairement $a = 0$. Or 0 n'est pas racine de $X^n - 1$. Donc $X^n - 1$ n'a pas de racine double, et comme il est scindé, tout ce qui a été fait marche encore.
deuxième cas : K est de caractéristique $p \geq 2$**, et** p **divise** n (rappelons que p est premier).
cas particulier : $n = p$**,** $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ On a alors, pour tout $x \in \mathbf{K}$, $x^p = x$, donc $x^p - 1$ n'a qu'une racine, et n'est pas scindé : contradiction avec les hypothèses, ce cas ne peut se produire.
cas particulier : $n = p$ On sait (voir exercices d'arithmétique) que, si x et y sont dans **K**, $(x+y)^p = x^p + y^p$. Donc, si $x^p = 1$, $(x+y)^p = 1 \Leftrightarrow y^p = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Même contradiction que le sous-cas précédent.

Cas général : $n = pq$; $X^p - 1$ ayant une seule racine (ce qu'on vient de voir), qui est 1, $x^n = 1 \Leftrightarrow x^q = 1$, donc $X^n - 1$ a au plus q racines, pour être scindé c'est encore raté.

Exercice 37 (Oral X). Soit A un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que $A^q - I_n = 0$ (avec $q \in \mathbf{N}_*$). Montrer :

$$\dim\big(\mathrm{Ker(A - I_n)}\big) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i)$$

.

L'énoncé est (volontairement sans doute !) mal posé, sous forme d'endomorphisme. On pose donc le problème sous forme matricielle, et on se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Le polynôme $X^q - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de D, donc de A, donc sont des racines q-ièmes de 1. Notons-les d_k $(1 \leq k \leq n)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i) &= \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(D^i) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n} d_k^i\right) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{q} d_k^i\right) \end{aligned}$$

Mais, si $d_k \neq 1$,

$$\sum_{i=1}^{q} d_k^i = d_k\frac{1 - d_k^q}{1 - d_k} = 0$$

Et, si $d_k = 1$,

$$\sum_{i=1}^{q} d_k^i = 1$$

Donc

$$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{tr}(A^i) = |\{k \in [\![1, n]\!] \ ; \ d_k = 1\}| = \dim\left(E_1(A)\right)$$

(avec des notations habituelles), ce qui conclut.

Si on est très astucieux, on peut voir dans cette relation entre une dimension et une trace un vague rappel du fait que la trace et le rang d'un projecteur sont égaux. Mais quel projecteur ? la trace dans le membre de droite est celle de

$$\frac{1}{q}(Id + A + \ldots + A^{q-1})$$

on montre assez facilement que c'est bien un projecteur, il n'y a plus qu'à montrer que son image est le noyau de $Id - A$, ce qui n'est pas trop difficile.

Exercice 38 (Oral Centrale). Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E. Démontrer que le polynôme caractéristique de u est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces stables par u sont $\{0_E\}$ et E.

Supposons le polynôme caractéristique irréductible. Soit F un sous-espace stable par u, autre que $\{0_E\}$ et E. Le polynôme caractéristique de u_F divise le polynôme caractéristique de u, contradiction.
Supposons le polynôme caractéristique réductible, et soit $\chi_u = Q_1Q_2$ une « vraie » factorisation de ce polynôme. $Q_1(u)\circ Q_2(u) = \Theta$ (théorème de Cayley-Hamilton), donc $Q_1(u)$ et $Q_2(u)$ ne sont pas deux automorphismes. Supposons par exemple que $Q_1(u)$ ne soit pas un automorphisme, et soit $x \in \mathrm{Ker}\big(Q_1(u)\big) \setminus \{0_E\}$. Si d est le degré de Q_1, on a $1 \leq d \leq n-1$ ($n = \dim(E)$), et on vérifie que $\mathrm{Vect}\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big)$ est stable par u. Et ce sous-espace n'est pas $\{0_E\}$ ni E.

Exercice 39 (Oral X). Démontrer qu'un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Supposons u diagonalisable. Soit F un sous-espace stable par u. On sait que u induit sur F un endomorphisme diagonalisable. Or les valeurs propres de u_F (induit par u sur F) sont des valeurs propres de u, et, si λ est une valeur propre de u_F, on a

$$\mathrm{Ker}(u_F - \lambda Id_F) = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E) \cap F = E_\lambda(u) \cap F$$

La diagonalisabilité de u_F permet d'affirmer

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (E_\lambda(u) \cap F)$$

(en autorisant dans cette somme directe des espaces réduits à $\{0\}$, pour les valeurs propres de u qui ne sont pas valeurs propres de u_F). Soit, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, G_λ un supplémentaire dans $E_\lambda(u)$ de $E_\lambda(u) \cap F$. Alors on vérifie que $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} G_\lambda$ est un supplémentaire de F stable par u.

Supposons que tout sous-espace stable par u admette un supplémentaire stable par u. Soit $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u (il y en a car on est sur $\mathbf{C}$). Il admet un supplémentaire F stable par u. Soit u_F induit par u sur F. Si G est un sous-espace de F stable par u_F, il est stable par u, et admet donc un supplémentaire H (dans E) stable par u. On vérifie alors que $H \cap F$ est un supplémentaire de G dans F, stable par u_F. Comme u_F vérifie l'hypothèse « tout sous-espace stable par u_F admet un supplémentaire stable par u_F », on a l'idée de conclure par récurrence sur la dimension de l'espace, ce qui se fait sans problème (initialisation comme d'habitude évidente, en dimension 1, ou même en dimension 2 si on trouve la dimension 1 trop caricaturale).

Exercice 40 (Oral X). Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$. Montrer que le projecteur sur $\ker(u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u)$ est un polynôme en u.

Dans une base adaptée à $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ (on notera dans la suite q la dimension de $\ker(u)$, r celle de $\mathrm{Im}(u)$), la matrice de u est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & A \end{pmatrix}$$

et celle du projecteur sur $\ker(u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u)$ est

$$R = \begin{pmatrix} I_q & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d = a_0 + Q$ un polynôme dont le coefficient constant est a_0 (Q est donc divisible par X). On vérifie sans difficulté que

$$P(M) = \begin{pmatrix} a_0 I_q & (0) \\ (0) & a_0 I_r + Q(A) \end{pmatrix}$$

(si on ne prend pas la précaution de mettre à part le terme constant comme on l'a fait, on risque des erreurs). Donc

$$P(M) = R \Leftrightarrow \Big(a_0 = 1 \text{ et } Q(A) = -a_0 I_q \Big)$$

Le problème est donc de montrer l'existence d'un polynôme Q nul en 0 tel que $Q(A) = -I_q$, ou autrement dit de trouver un polynôme Q_1 tel que $AQ_1(A) = -I_q$ (en notant $Q = XQ_1$). Mais A est inversible (comme $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, u induit sur $\mathrm{Im}(u)$ un automorphisme), il s'agit donc simplement de montrer que A^{-1} est un polynôme de A. Pour cela, considérons

$$\begin{array}{rccc} \phi \ : & \mathbf{K}[A] & \longrightarrow & \mathbf{K}[\mathbf{A}] \\ & B & \longmapsto & AB \end{array}$$

ϕ est un endomorphisme injectif de $\mathbf{K}[A]$ qui est de dimension finie, donc ϕ est surjectif, donc $I_q \in \mathrm{Im}(\phi)$, donc il existe un polynôme Q_2 tel que $AQ_2(A) = I_q$, $Q_1 = -Q_2$ convient.

Exercice 41 (Oral ens). Soit A et B des matrices carrées complexes d'ordre n ayant toutes leurs valeurs propres de parties réelles < 0. Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrer qu'il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AM + MB = C$.

L'application $M \longmapsto AM + MB$ est linéaire, il s'agit de montrer sa surjectivité, on va donc s'intéresser à son injectivité, ce qui est équivalent (méthode classique !).
Si $AM = -MB$, alors $A^2M = MB^2$, par récurrence pour tout $k \geq 1$ on a $A^kM = M(-B)^k$ pour tout $k \geq 0$, donc par combinaison linéaire

$$P(A)M = MP(-B)$$

pour tout polynôme P. Prenons par exemple pour P le polynôme minimal ou le polynôme caractéristique de A. Ses facteurs irréductibles sont des $X - \lambda$ avec λ de partie réelle < 0. Mais alors $-B - \lambda I_n$ est inversible, car $-\lambda$ ne peut être valeur propre de B. Donc $P(B) \in GL_n(\mathbf{C})$, et $M = (0)$, l'endomorphisme est bien injectif donc surjectif.

Exercice 42 (Oral Centrale). Soit $\mathbf{K}$ un corps, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On pose

$$M \otimes A = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$$

1. Soit $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $(M_1 \bigotimes A_1)(M_2 \bigotimes A_2) = (M_1M_2) \bigotimes (A_1A_2)$.
2. Que dire de $M \bigotimes I_n$ si M est inversible ?
3. Si M et A sont diagonalisables, montrer que $M \bigotimes A$ est diagonalisable.

La première question est un calcul (avec un produit par blocs). On en déduit que, si M est inversible, $M \bigotimes I_n$ est inversible d'inverse $M^{-1} \bigotimes I_n$. Donc, déjà, si P est inversible (dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$) et D diagonale,

$$(P \bigotimes I_n)(D \bigotimes I_n)(P \bigotimes I_n)^{-1} = (PDP^{-1}) \bigotimes I_n$$

qui montre que si M est inversible, $M \bigotimes I_n$ l'est.
Mais, de la même manière, si P et Q sont des matrices inversibles (respectivement 2×2 et $n \times n$),

$$(P \bigotimes Q)(P^{-1} \bigotimes Q^{-1}) = I_2 \bigotimes I_n = I_{2n}$$

et, comme le $\bigotimes$ de deux matrices diagonales est diagonale, on en déduit assez facilement que le $\bigotimes$ de deux matrices diagonalisables l'est.

Exercice 43 (**Oral X**)**.** Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, diagonalisables.

1. On suppose $AB = BA$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{K}$, $A + tB$ est diagonalisable.
2. On suppose $n = 2$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et, pour tout $t \in \mathbf{K}$, $A + tB$ diagonalisable. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 44 (**Oral X**)**.** Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont le polynôme minimal est de degré 2 et qui n'ont qu'une valeur propre.

Exercice 45 (Oral Centrale). Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifient $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr} M = n$

Quand une matrice est donnée par un poynôme annulateur, on essaye d'exploiter celui-ci. Mais pour la première, le problème est que

$$X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$$

n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$. Qu'importe, on passe sur $\mathbf{C}$: une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est a fortiori une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Mais le polynôme n'est pas scindé simple (0 est racine double), on ne peut donc pas utiliser de diagonalisation. L'idée est plus élémentaire : sur $\mathbf{C}$, comme le polynôme caractéristique est scindé, on peut utiliser la relation

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} m_\lambda \lambda$$

(où on désigne comme d'habitude par m_λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique). De plus, les valeurs propres de M sont dans $\{1, j, j^2, 0\}$ puisqu'elles sont toutes racines du polynôme annulateur $X^5 - X^2$. On a donc

$$m_1 + m_j j + m_{j^2} j^2 + m_0 0 = n$$

avec $n = m_1 + m_j + m_{j^2} + m_0$, donc, par inégalité triangulaire :

$$n = |m_1 + m_j j + m_{j^2} j^2 + m_0 0| \leq m_1 + m_j + m_{j^2} \leq n$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités. On en déduit en premier lieu que $m_0 = 0$. Ce qui fait que 0 n'est pas valeur propre de M. Ce qui fait que M est inversible, et que M^2 aussi, et donc que $X^3 - 1$ annule M, et donc que M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. On a aussi égalité dans une inégalité triangulaire, ce qui équivaut au fait que tous les nombres complexes figurant dans cette inégalité sont nuls ou de même argument. Et cet argument est nécessairement l'argument de leur somme, qui vaut n. Comme j et j^2 n'ont pas pour argument 0, on en déduit que 1 est la seule valeur propre. Et comme M est diagonalisable,

$$\boxed{M = I_n}$$
