pour plus tard.

Donc : $\mathrm{Var}_m(f_2) \leq C \int (f_2'(x))^2 m(x)\,dx$

Ou encore :

$$\int f_2^2 m - \left(\int f_2 m\right)^2 \leq C \int (f_2')^2 m$$

Ou encore :

$$\int f_1^2 m - \left(\int f_1 m\right)^2 \leq C \int f_1'^2 m$$

(en tout multipliant par $\int f_1^2 m$).

Mais $f_1' = f'$, et

$$\int f_1^2 m - \left(\int f_1 m\right)^2 = \int \left(f - \int f m\right)^2 m - \left(\int \left(f - \int f m\right) m\right)^2$$

$$= \int f^2 m - 2\left(\int f m\right)^2 + \left(\int f m\right)^2$$

$$- \left(\int f m - \int f m\right)^2$$

$$= \int f^2 m - \left(\int f m\right)^2$$

On obtient bien

$$\boxed{\mathrm{Var}_m(f) \leq \frac{C}{2} \int f'^2 m}$$

Si $\int f_1^2 m = 0$, $f_1^2 m = 0$ car elle est continue positive, donc $f_1^2(x) = 0$ ou $m(x) = 0$ pour tout x, donc $f_1 m = 0$, l'inégalité est alors évidente.

$$\boxed{\text{Il suffit de montrer (L) dans le cas où } \int f m = 0 \text{ et } \int f^2 m = 1}$$

10.b. f_ε est, si $\varepsilon > 0$, de classe C^1, et $f'_\varepsilon = \varepsilon f'$ est bornée.

On a donc:

$$\int h((1+\varepsilon f(x))^2)\, m(x)\,dx - h\left(\int (1+\varepsilon f(x))^2 m(x)\,dx\right) \leq C \int \varepsilon^2 f'(x)^2 m(x)\,dx$$

ou, tenant compte des hypothèses:

$$\int h((1+\varepsilon f(x))^2)\, m(x)\,dx - h(1+\varepsilon^2) \leq C\,\varepsilon^2 \int f'(x)^2 m(x)\,dx$$

On prend $\varepsilon \in \,]0, \delta]$, où δ est choisi tel que $\delta \leq 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + \varepsilon f(x) > 0$ (possible car f est bornée).

Alors
$$\frac{1}{\varepsilon^2} h((1+\varepsilon f(x))^2) = \frac{2}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon f(x))^2 \ln(1+\varepsilon f(x))$$

Non, c'est mal dit. Choisissons δ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + \delta f(x) \geq \frac{1}{2}$

et notons que $h'(x) = 1 + \ln x$, $h'(1) = 1$, $h''(x) = \frac{1}{x}$, $h''(1) = 1$

Enfin, $h'''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Alors, avec $(1+\varepsilon f(x))^2 = 1 + 2\varepsilon f(x) + \varepsilon^2 (f(x))^2$,

$$\left| h((1+\varepsilon f(x))^2) - [2\varepsilon f(x) + \varepsilon^2 (f(x))^2] - \frac{1}{2}[2\varepsilon f(x) + \varepsilon^2 (f(x))^2]^2 \right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(2\varepsilon |f(x)| + \varepsilon^2 f(x)^2\right)^3$$

(inégalité de Taylor-Lagrange).

Donc :

$$\left| \int h((1+\varepsilon f(x))^2)\, m(x)\, dx - \varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \right|$$
$$\leq 2\varepsilon^3 \int |f(x)|^3 m(x)\, dx + \frac{1}{2}\varepsilon^4 \int f(x)^4 m(x)\, dx$$
$$+ \frac{\varepsilon^3}{4} \int (2|f(x)| + \varepsilon f(x)^2)^3 m(x)\, dx$$

Donc $\frac{1}{\varepsilon^2} \left| \int h((1+\varepsilon f(x))^2) m(x)\, dx - 3\varepsilon^2 \right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Et donc $\frac{1}{\varepsilon^2} \int h((1+\varepsilon f(x))^2)\, m(x)\, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 3$

En divisant l'inégalité initiale par ε^2 et faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$3 - 1 \leq C \int f'(x)^2 m(x)\, dx$$

ou $$1 \leq \frac{C}{2} \int f'(x)^2 m(x)\, dx$$

que est ce qu'on veut, car $\mathrm{Var}_m(f) = 1$. Finalement,

$$\boxed{(2) \text{ est montré}}$$

[Encore une question technique, pénible...]

11. a- Comme admis,

$$H'(\lambda) = \int f(x) e^{\lambda f(x)} m(x) dx$$

De plus, par $|f'(x)| \leq 1$, on tire :

$$Ent_m(f) \leq C, \quad Var_m(f) \leq \frac{C}{2}.$$

Et

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) h(H(\lambda)) = \lambda \int f(x) e^{\lambda f(x)} m(x) dx - h(H(\lambda))$$

$$= \int h(e^{\lambda f(x)}) m(x) dx - h\left(\int e^{\lambda f(x)} m(x) dx\right)$$

$$= Ent_m(k)$$

où $h : x \mapsto e^{\frac{\lambda}{2} f(x)}$

h est bien de classe C^1, $h' : x \mapsto \frac{\lambda}{2} f'(x) e^{\frac{\lambda}{2} f(x)}$ est bornée car f et f' le sont, on peut donc appliquer :

$$Ent_m(h) \leq \frac{C\lambda^2}{4} \int f'(x)^2 e^{\lambda f(x)} m(x) dx.$$

Et comme $f'(x)^2 \leq 1$, on conclut :

$$\boxed{\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) h(H(\lambda)) \leq \frac{C\lambda^2}{4} H(\lambda)}$$

11. b. En divisant par $H(\lambda)$ (qui est >0) :

$$\lambda \frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} - \ln(H(\lambda)) \leq C \frac{\lambda^2}{4}$$

ou encore, notant $G(\lambda) = \ln(H(\lambda))$:

$$\lambda G'(\lambda) - G(\lambda) \leq C \frac{\lambda^2}{4}$$

On divise par λ, on multiplie par $\frac{1}{\lambda}$ (on fait comme si on avait une équation différentielle ou bien dérivé quotient) :

$$\left(\frac{G(\lambda)}{\lambda}\right)' \leq C \frac{1}{4}$$

Or $H(0) = 1$, $G(0) = 0$ donc, si $\lambda \geq 0$, si $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \lambda$

$$\frac{G(\lambda)}{\lambda} - \frac{G(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{C}{4}(\lambda - \varepsilon)$$

ou $G(\lambda) \leq \lambda \frac{G(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{C}{4}\lambda(\lambda - \varepsilon)$

G est de classe C^1, $G'(0) = \frac{H'(0)}{H(0)} = \int f(x)\, m(x)\, dx$,

donc en prenant la limite quand $\varepsilon \to 0$ on obtient bien :

$$G(\lambda) \leq \lambda \int f(x)\, m(x)\, dx + \frac{C\lambda^2}{4}$$

et donc, en prenant l'exponentielle, qui croît :

$$\boxed{H(\lambda) = \int e^{\lambda f(x)}\, m(x)\, dx \leq \exp\left(\lambda \int f(x)\, m(x)\, dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right)}$$

12 - Chaque $f_n : x \mapsto n \arctan(\frac{x}{n})$ est bornée, C^1, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}$ bornée aussi. Donc chaque f_n est dans C^1_b. Et vérifie $|f_n'(x)| \leq 1$.

Donc, pour tout $\lambda \geq 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int e^{n\lambda \arctan(\frac{x}{n})} m(x)\,dx \leq \exp\left(\lambda \int n \arctan\left(\frac{x}{n}\right) m(x)\,dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

$n \arctan(\frac{x}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$;

$$\left| n \arctan\left(\frac{x}{n}\right) m(x) \right| \leq n \left| \frac{x}{n} \right| m(x) = |x|\, m(x)$$

constitue une domination, $x \mapsto |x| m(x)$ étant intégrable par 9.

Donc,

$$\exp\left(\lambda \int n \arctan\left(\frac{x}{n}\right) m(x)\,dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp\left(\lambda \int x\, m(x)\,dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

Mais, si $a < b$,

$$\int_a^b e^{n\lambda \arctan(\frac{x}{n})} m(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b e^{\lambda x} m(x)\,dx$$

(domination par $x \mapsto e^{\lambda |x|} m(x)$ par compt), et

$$\int_a^b e^{n\lambda \arctan(\frac{x}{n})} m(x)\,dx \leq \int e^{n\lambda \arctan(\frac{x}{n})} m(x)\,dx$$

$$\leq \exp\left(\lambda \int x\, m(x)\,dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

Donc, en prenant les limites quand $n \to +\infty$

$$\int_a^b e^{\lambda x} m(x)\,dx \leq \exp\left(\lambda \int_a^b x\, m(x)\,dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Ce pour tous $a < b$ réels, donc :

$$\boxed{(3) \text{ s'applique à la fonction } f(x) = x}$$

13. a. C'est-à-dire :

$$\int e^{\lambda x} m(x)\,dx \leq \exp\left(\lambda \int x\, m(x)\,dx + C\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

A fortiori,

$$\int_a^{+\infty} e^{\lambda x} m(x)\,dx \leq \exp\left(\lambda M + C\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

et donc

$$e^{\lambda a} \int_a^{+\infty} m(x)\,dx \leq \exp\left(\lambda M + C\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

ou

$$\int_a^{+\infty} m(x)\,dx \leq \exp\left(\lambda M + C\frac{\lambda^2}{4} - \lambda a\right)$$

Soit $\varphi : \lambda \mapsto (M-a)\lambda + C\frac{\lambda^2}{4}$ définie sur $[0, +\infty[$.

$\varphi' : \lambda \mapsto (M-a) + \dfrac{C\lambda}{2}$

s'annule en $\lambda = \dfrac{2(a-M)}{C}$ ... si $a \geq M$, ce que l'on suppose. On prend cette valeur de λ :

$$\int_a^{+\infty} m(x)\,dx \leq \exp\left(-\frac{2(a-M)^2}{C} + \frac{(a-M)^2}{C}\right)$$

ou encore :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} m(x)\,dx \leq \exp\left(-\frac{(a-M)^2}{C}\right)}$$

13.b. Notons $\mu(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} m(x)\,dx$; si $b > M$,

$$\int_M^b e^{\alpha x^2} m(x)\,dx = \Big[-\mu(x)\,e^{\alpha x^2}\Big]_M^b + 2\alpha \int_M^b x e^{\alpha x^2} \mu(x)\,dx$$

L'évaluation (majoration, pardon) du 13.a. dit que

$$0 \leq \mu(b)\,e^{\alpha b^2} \leq \exp\left(-\frac{(b-M)^2}{C} + \alpha b^2\right) \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0$$

car $-\dfrac{1}{C} + \alpha < 0$ $\left(\alpha < \dfrac{1}{C}\right)$.

De même, si $\alpha < \dfrac{1}{C}$, $x e^{\alpha x^2} \mu(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $x \mapsto x e^{\alpha x^2} \mu(x)$ est intégrable sur $[M, +\infty[$. Donc $\displaystyle\int_M^b e^{\alpha x^2} m(x)\,dx$ a une limite finie quand $b \to +\infty$, ce qui montre ($x \mapsto e^{\alpha x^2} m(x)$ étant positive) que $x \mapsto e^{\alpha x^2} m(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On procède de même avec $f_n(x) = n \operatorname{arcth}\left(-\frac{x}{n}\right)$ pour montrer que (3) s'applique à $f(x) = -x$, on conclut que $x \mapsto e^{\alpha x^2} m(x)$ est intégrable sur $]-\infty, -1[$. Et finalement

$$\boxed{\text{Si } \alpha < \frac{1}{c},\ x \mapsto e^{\alpha x^2} m(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

14. a. Soit $P : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du$; $P' = p$, et

si $u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1, $t \mapsto P(u(t))$ l'est aussi et

$$\frac{d}{dt}\left[P(u(t))\right] = u'(t)\,p(u(t))$$

Et alors:

$$\forall t \in]0,1[\quad u'(t)\,p(u(t)) = \int p(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall t \in]0,1[\quad P(u(t)) = \left(\int p(x)\,dx\right) t + K$$

$$\Longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall t \in]0,1[\quad u(t) = P^{-1}\left[\left(\int p(x)\,dx\right) t + K\right]$$

Mais, réciproquement, notons que P est de classe C^1, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, \int p(x)\,dx[$. Et P' ne s'annule pas, donc $P^{-1} :]0, \int p(x)\,dx[\longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1;

Prenons $K=0$, et $u : t \mapsto P^{-1}\left(\left(\int p(x)\,dx\right)t\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = x \iff \left(\int p(x)\,dx\right) t = P(x) \iff t = \frac{1}{\int p}\, P(x).$$

P (petit p)

u est bien bijection.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe } u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1, \\ \text{bijection, telle que} \\ \forall t \in]0,1[\quad u'(t)\,p(u(t)) = \int p(x)\,dx\end{array}}$$

14.b. $\varphi : t \mapsto \dfrac{u(t)+v(t)}{2}$ est de classe C^1 sur $]0,1[$, strictement croissante car u et v le sont ($u'(t)>0$, $v'(t)>0$ de même), $\lim\limits_{0} \varphi = -\infty$, $\lim\limits_{1} \varphi = +\infty$. Donc φ est une bijection de classe C^1 de $]0,1[$ sur $]-\infty,+\infty[$, ce qui autorise le changement de variable $x = \frac{1}{2}(u(t)+v(t))$ pour écrire :

$$\left(\int r(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 r\left(\frac{u(t)+v(t)}{2}\right)\left(\frac{u'(t)+v'(t)}{2}\right) dt\right)^2$$

La fonction $z \mapsto z^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et tous les réels intervenant dans les expressions manipulées sont positifs, on peut donc écrire :

$$\left(\int r(x)\,dx\right)^2 \geq \left(\int_0^1 \sqrt{p(u(t))}\sqrt{q(v(t))}\,\frac{u'(t)+v'(t)}{2}\,dt\right)^2$$

Donc

$$\left(\int r(x)\,dx\right)^2 \geq \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{\int p \int q}\left[\sqrt{\frac{u'(t)}{v'(t)}}+\sqrt{\frac{v'(t)}{u'(t)}}\right]}{2}\,dt\right)^2$$

Reste à voir que, si $x>0$, $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 1$ (étude de fonction, ou développement de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x+\frac{1}{x}+2 \geq 0$

et on obtient bien :

$$\boxed{\int p(x)\,dx \int q(x)\,dx \leq \left(\int r(x)\,dx\right)^2}$$

15. a- Si $y \notin A$, l'inégalité est claire. Si $y\in A$, il s'agit de montrer :

$$\exp\left(\frac{1}{2}d(x,A)^2\right) \leq \exp\left[x^2+y^2-\frac{(x+y)^2}{2}\right]$$

qui équivaut à

$$\exp\left(\frac{1}{2}d(x,A)^2\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2}(x-y)^2\right)$$

ou encore à :

$$d(x,A) \leq |x-y|$$

qui est conséquence de $y\in A$. Donc

$$\boxed{\exp\left(\frac{1}{2}d(x,A)^2-x^2\right)\mathbb{1}_A(y)\exp(-y^2) \leq \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2}\right)}$$

15. b. On est tenté d'utiliser l'extension de (5),

avec $p : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)^2 - x^2\right)$

$q : x \mapsto \mathbb{1}_A(x) \exp(-x^2)$

$r : x \mapsto \exp(-x^2)$

qui par 15. a. vérifient (4). Donc :

$$\int \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)^2\right) e^{-x^2} dx \times \int \mathbb{1}_A(x) e^{-x^2} dx \leq \left(\int e^{-x^2} dx\right)^2$$

ou encore :

$$\sqrt{\pi} \int \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)^2\right) \mu(x) dx \times \sqrt{\pi} \int \mathbb{1}_A(x)\, \mu(x)\, dx \leq \pi \left(\int \mu(x) dx\right)^2$$

ou encore :

$$\int \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)^2\right) \mu(x) dx \times \mu(A) \leq 1$$

Avec l'hypothèse $\mu(A) > 0$, on obtient :

$$\boxed{\int \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)^2\right) \mu(x)\, dx \leq \frac{1}{\mu(A)}}$$

16. a. On peut écrire

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{I}\, a_i , b_i \,\mathrm{I}$$

où $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$ $\quad a_i \le b_i \le a_{i+1}$

et $\quad a_p \le b_p$

(le symbole I étant] ou [indifféremment).

Alors :

$$A_t = \bigcup_{i=1}^{p} [a_i - t , b_i + t]$$, donc

$$\boxed{A_t \in \mathrm{Int}}$$

[Rq : justifier plus précisément $A_t = \dots$ semble inutile au vu de la longueur du sujet].

16. b. Si $\mu(A_t) = 1$, c'est clair. Sinon, il s'agit de montrer :

$$e^{\frac{t^2}{2}} \le \frac{1}{\mu(A)\mu(\overline{A_t})}$$ où $\overline{A_t} = A_t^c$. Bof...

Classons, plutôt :

$$\int \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)^2\right) \mu(x)\,dx = \int_{A_t} \exp\left(\frac{1}{2} (d(x,A)^2\right) \mu(x)\,dx + \int_{A_t^c} \exp\left(\frac{1}{2} d(x,A)\right)^2 \mu(x)\,dx$$

$$\ge \mu(A_t) + e^{\frac{t^2}{2}} (1 - \mu(A_t))$$

Donc :

$$\mu(A_t) + e^{\frac{t^2}{c}}\left(1-\mu(A_t)\right) \leq \frac{1}{\mu(A)}$$

A fortiori,

$$\boxed{1-\mu(A_t) \leq \frac{e^{-\frac{t^2}{c}}}{\mu(A)}}$$