S.c. Mais aussi :

$$\partial_t \phi_f(t,x) = \int (-x\sin t + y\cos t) f'(x\cos t + y\sin t)\,\mu(y)\,dy$$

Et

$$L\phi_f(t,x) = \frac{1}{2}\partial_{xx}\phi_f(t,x) - x\partial_x \phi_f(t,x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos^2 t\, f''(x\cos t + y\sin t)\,\mu(y)\,dy$$

$$- x\int \cos t\, f'(x\cos t + y\sin t)\,\mu(y)\,dy$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\cos^2 t\, f''(x\cos t + y\sin t) - x\cos t\, f'(x\cos t + y\sin t)\right)\mu(y)\,dy$$

Donc :

$$\cos t\,\partial_t \phi_f(t,x) - \sin t\, L\phi_f(t,x)$$

$$= \int \left(y\cos^2 t\, f'(x\cos t + y\sin t) - \frac{1}{2}\sin t\cos^2 t\, f''(x\cos t + y\sin t)\right)\mu(y)\,dy$$

$$= -\cos^2 t \int \left(\frac{\sin t}{2} f''(x\cos t + y\sin t) - y f'(x\cos t + y\sin t)\right)\mu(y)\,dy$$

La dérivée de $y \mapsto \mu(y) f'(x\cos t + y\sin t)$ est

$$y \mapsto \left(-2y f'(x\cos t + y\sin t) + \sin t\, f''(x\cos t + y\sin t)\right)\mu(y),$$

donc

$$\cos t\,\partial_t \phi_f(t,x) - \sin t\, L\phi_f(t,x) = -\frac{\cos^2 t}{2}\Big[\mu(y) f'(x\cos t + y\sin t)\Big]_{y\to-\infty}^{y\to+\infty}$$

$$= 0$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{\cos t\, \partial_t \Phi_f(t,x) = \sin t\, L\, \Phi_f(t,x)}$$

[Rq : il doit y avoir moyen de faire mieux ; j'avais envisagé une IPP, l'utilisation de 3.b...].

5. d. Notons que $\Phi_f(0,x) = \int f(x)\mu(y)\,dy = f(x)$

Donc $\int \Phi_f(0,x)\mu(x)\,dx = \int f(x)\mu(x)\,dx$

On aimerait dériver $t \mapsto \int \Phi_f(t,x)\mu(x)\,dx$, pour montrer que la dérivée est nulle. Même genre de justification que dans le 5.a. La dérivée est

$$t \mapsto \int \partial_t \Phi_f(t,x)\mu(x)\,dx$$

Or

$$\cos t \int \partial_t \Phi_f(t,x)\mu(x)\,dx = \sin t \int L\Phi_f(t,x)\,\mu(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin t \int 0 \times \partial_x \Phi_f(t,x)\,\mu(x)\,dx$$

(par 3.b.)

$$= 0.$$

La dérivée est donc nulle en tout point de $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, nulle partout par continuité. Et donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \int \Phi_f(t,x)\mu(x)\,dx = \int f(x)\mu(x)\,dx}$

(l'appartenance de $x \mapsto 1$ à C_b^2 ne pose pas le problème, celle de $x \mapsto \phi_f(t,x)$ résulte de 5.a., 5.b.

et du fait que si f est bornée, ϕ_f l'est par

$$|\phi_f(t,x)| \leq \|f\|_\infty).$$

6 - Comme vu plus haut, ϕ_f est bornée. Elle est, de plus, positive ; pour tout t réel, $x \mapsto h(\phi_f(t,x))$ est donc bien définie. Elle est continue (h et ϕ_f les sont), et bornée, car ϕ_f l'est, et h est bornée sur tout $[0,A]$, $A>0$. Donc J est bien définie. Pour tout x réel, $t \mapsto h(\phi_f(t,x))\mu(x)$ est continue, et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad |h(\phi_f(x,t))\mu(x)| \leq \alpha\mu(x)$$

Donc, par théorème de continuité sous le signe $\int$, $\alpha\mu$ étant intégrable,

$$\boxed{J : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est continue.}}$$

$$\Phi_f(0,x) = f(x), \quad \Phi_f\left(\tfrac{\pi}{2},x\right) = \int f(y)\,\mu(y)\,dy.$$

Donc :

$$\boxed{J(0) = \int h(f(x))\mu(x)\,dx}$$

$$J\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \int h\left(\int f(y)\mu(y)\,dy\right)\mu(x)\,dx = \boxed{h\left(\int f(y)\mu(y)\,dy\right)}$$

7. a. Notons

$$\varphi : \begin{vmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto h(\Phi_f(t,x))\,\mu(x) \end{vmatrix}$$

On a vu que, pour tout t, $x \mapsto \varphi(t,x)$ était continue, intégrable sur $\mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \Phi_f(t,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto \partial_t \Phi_f(t,x)$. Et la formule de définition de Φ_f, ainsi que le fait que $f > 0$, montrent que $\Phi_f > 0$. Comme h est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, φ est dérivable par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R}^2$,

et :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} : (t,x) \mapsto h'(\Phi_f(t,x))\,\partial_t \Phi_f(t,x)\,\mu(x)$$

Par opérations, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ est continue par rapport à chacune des ses variables sur $\mathbb{R}^2$ (h, h' sont continues, Φ_f, $\partial_t\Phi_f$ sont continues). De plus :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = \left(1 + \ln(\Phi_f(t,x))\right)\partial_t \Phi_f(t,x)\,\mu(x)$$

et rappelons que

$$\partial_t \Phi_f(t,x) = \int (-x\sin t + y\cos t)\, f'(x\cos t + y\sin t)\,\mu(y)\,dy$$

Donc : $|\partial_t \Phi_f(t,x)| \leq |x|\,\|f'\| + \|f'\| \int y\,\mu(y)\,dy$

Et ainsi,

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\right| \leq \left(1+\left|\ln(\Phi_f(t,x))\right|\right)\|f'\|_\infty\left(|x|+\int y\,\mu(y)\,dy\right)\mu(x)$$

Mais, de $\forall x\in\mathbb{R} \quad \delta \leq f(x) \leq \|f\|_\infty$ on tire

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2 \qquad \delta \leq \Phi_f(t,x) \leq \|f\|_\infty$$

Donc:

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\right| \leq \left(1+\max\left(|\ln\delta|,\left|\ln(\|f\|_\infty)\right|\right)\right)\|f'\|_\infty\left(|x|+\int y\,\mu(y)\,dy\right)\mu(x)$$

Le majorant est indépendant de t, intégrable sur $\mathbb{R}$. Par théorème,

$$\boxed{\begin{gathered}J \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et} \\ \forall t\in\mathbb{R} \quad J'(t) = \int \left(1+\ln(\Phi_f(t,x))\right)\partial_t\Phi_f(t,x)\,\mu(x)\,dx\end{gathered}}$$

Par 5.c.,

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad \text{c'est } J'(t) = \int \left(1+\ln(\Phi_f(t,x))\right)(\text{suite})\,L\Phi_f(t,x)\,\mu(x)\,dx$$

Mais $x\mapsto \Phi_f(t,x)$ est pour tout t dans C_b^2 (vu en 5.d.), $x\mapsto 1+\ln(\Phi_f(t,x))$ est bornée (vu), de classe C^1, de dérivée $x\mapsto \dfrac{\partial_x\Phi_f(t,x)}{\Phi_f(t,x)}$ bornée ($\partial_x\Phi_f$ l'est, déjà vu, et $\left|\dfrac{1}{\Phi_f}\right|\left(\leq \dfrac{1}{\delta}\right)$). Elle est donc de classe C^2, de dérivée seconde

$$x \mapsto \frac{\partial_{xx}\Phi_f(t,x) \times \Phi_f(t,x) - (\partial_x \Phi_f(t,x))^2}{(\Phi_f(t,x))^2}$$

bornée pour les mêmes raisons ($\partial_{xx}\Phi_f$, $\partial_x \Phi_f$ sont bornées).

On est dans les conditions d'utilisation du 3.b., et donc:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos t\, J'(t) = -\frac{\sin t}{2} \int \frac{(\partial_x \Phi_f(t,x))^2}{\Phi_f(t,x)} \mu(x)\, dx}$$

(Trop de questions kilométriques dans ce problème. Celle-ci par exemple n'est pas d'une difficulté insurmontable, mais la vérification scrupuleuse des hypothèses prend beaucoup de temps)

7.b. f', g sont bornées, par le problème de définition de $\Phi_{f'}$ et Φ_g. Et, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int \left(\frac{f'}{\sqrt{f}}(x\cos t + y\sin t)\sqrt{\mu(y)}\right)\left(\sqrt{f}\,(x\cos t + y \sin t)\sqrt{\mu(y)}\right) dy\right)^2$$

$$\leq \int \frac{f'^2}{f}(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,dy \times \int f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,dy$$

Donc:

$$\boxed{(\Phi_{f'}(t,x))^2 \leq \Phi_f(t,x)\, \Phi_g(t,x)}$$

7.c. On reconnaît, dans le membre de gauche,

$$J(0) - J\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

De plus, par 5.b., $\partial_x \Phi_g(t,x) = \cos t \, \Phi_{g'}(t,x)$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad J'(t)\cos t = -\frac{\sin t}{2} \int \frac{\cos^2 t \left(\Phi_{g'}(t,x)\right)^2}{\Phi_g(t,x)} \mu(x)\,dx$$

ou :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \quad J'(t) = -\frac{\sin t \cos t}{2} \int \frac{\left(\Phi_{g'}(t,x)\right)^2}{\Phi_g(t,x)} \mu(x)\,dx$$

Avec 7.b :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \quad |J'(t)| \leq \frac{|\sin 2t|}{4} \int \Phi_g(t,x)\mu(x)\,dx$$

et, avec 5.d (g est bien dans C_b^0) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \quad |J'(t)| \leq \frac{1}{4}|\sin 2t| \int g(x)\mu(x)\,dx$$

Inégalité vraie sur $\mathbb{R}$ par continuité. Donc :

$$\left|J(0) - J\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4}\int g(x)\mu(x)\,dx \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t|\,dt$$

Mais $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,dt = \left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Donc

$$\boxed{\int h(f(x))\mu(x)\,dx - h\left(\int f(y)\mu(y)\,dy\right) \le \frac{1}{4}\int \delta(x)\mu(x)\,dx}$$

[Question de synthèse, assez sympathique ...].

8. f_δ est dans C_b^2 (f_δ est C^2, et $f_\delta = \delta + f^2$, $f'_\delta = 2ff'$, $f''_\delta = 2ff'' + 2f'^2$ sont bornées car f, f', f'' le sont). Et $f_\delta \geq \delta$, 7. s'applique donc à f_δ :

$$\int h(f_\delta(x))\mu(x)\,dx - h\left(\int f_\delta(y)\mu(y)\,dy\right) \le \int \frac{(f(x)f'(x))^2}{\delta + f(x)^2}\mu(x)\,dx$$

f est bornée, f^2 aussi, $h(f^2)$ aussi, donc f admet une entropie relativement à μ.

Restreignons : $\underline{\delta \in]0,1]}$

$$f_\delta(y)\mu(y) \xrightarrow[\delta \to 0]{} f^2(y)\mu(y)$$

et $|f_\delta(y)\mu(y)| \le (1 + \|f\|_\infty^2)\mu(y)$

où $y \mapsto (1 + \|f\|_\infty^2)\mu(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante de δ, montre par théorème de convergence dominée que

$$\int f_\delta(y)\mu(y)\,dy \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int f^2(y)\mu(y)\,dy$$

Et donc, h étant continue,

$$h\left(\int f_\delta(y)\mu(y)\,dy\right) \xrightarrow[\delta \to 0]{} h\left(\int f^2(y)\mu(y)\,dy\right)$$

De même, il existe M tel que

$$\forall x \in [0, 1+\|f\|_\infty^2] \qquad |h(x)| \leq M$$

(car h est continue sur le compact $[0, 1+\|f\|_\infty^2]$), donc

la domination $|h(f_\delta(x))\mu(x)| \leq M\mu(x)$

permet de dire que

$$\int h(f_\delta(x))\,\mu(x)\,dx \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int h(f^2)\mu$$

Enfin, $\dfrac{f(x)^2 f'(x)^2}{\delta + f(x)^2} \leq f'(x)^2$. On a bien :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } f \in C_b^1,\ f \text{ admet une entropie relative à } \mu, \text{ et} \quad \mathrm{Ent}_\mu(f) \leq \displaystyle\int |f'(x)|^2 \mu(x)\,dx\end{array}}$$

III . 9. $x \mapsto x$ est de classe C^1 à dérivée bornée. Donc elle admet une entropie relativement à m. Donc $x \mapsto x^2 m(x)$ est intégrable par 2.c.

Or $x \mapsto m(x)$ l'est. Donc $x \mapsto |x| m(x)$ l'est, comme produit ($|x| m(x) = \sqrt{x^2 m(x)} \times \sqrt{m(x)}$) de fonctions de carrés intégrables (on refait le 1... !). Finalement,

$$\boxed{\int (1 + |x| + x^2)\, m(x)\, dx < +\infty}$$

10. a. Si $f \in C_b^1$, f a une entropie relativement à m, donc $f^2 m$ est intégrable (2.c.), donc $f m$ aussi (1.) Donc :

$$\boxed{f^2 m \text{ et } f m \text{ sont intégrables}}$$

Supposons (2) montrée (vrai, surtout) dans le cas

$$\int f m = 0, \int f^2 m = 1$$

Soit $f \in C_b^1$; $f_1 : x \mapsto f(x) - \int f m$ vérifie $\int f_1 m = 0$, et est dans C_b^1. $f_2 : x \mapsto \dfrac{f_1(x)}{\sqrt{\int f_1^2 m}}$ est dans C_b^1, vérifie $\int f_2 m = 0$, et $\int f_2^2 m = 1$. Sauf si $\int f_1^2 m = 0$, cas que l'on réserve