MATH B (X) 2017

1. Toutes les fonctions combinaisons linéaires, produits, composées de fonctions continues par morceaux le sont, on ne le rappellera pas toujours.

Remarquons que $|f| \leq \frac{1}{2}(f^2+1)$

Donc $|f|m \leq \frac{1}{2}(f^2 m + m)$

Mais $f^2 m$ et m sont, par hypothèse, intégrables. Par comparaison ($0 \leq |f|m$), $|f|m$ l'est. Donc :

$$\boxed{fm \text{ est intégrable}}$$

[Rq : preuve habituelle de g^2 intégrable $\Rightarrow g$ intégrable sur un segment. Bien sûr, ici, on n'est pas sur un segment ! mais c'est la multiplication par m qui fait fonctionner tout cela]. Mais donc $f\sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$ étant de carré intégrables, leur produit est intégrable (manière plus courte de rédiger ce qui précède, je suis mal réveillé ...) et, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int f\sqrt{m} \times \sqrt{m} \right| \leq \sqrt{\int (f\sqrt{m})^2} \times \sqrt{\int (\sqrt{m})^2}$$

Et donc, $\left(\int f m\right)^2 \leq \int f^2 m$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{\mathrm{Var}_m(f) \geq 0}$$

2. a. $h(f^2) = 2f^2 \ln|f|$ $\quad$ ($h(f^2)(x) = 0$ si $f(x)=0$)

Donc la fonction $h : x \mapsto \begin{cases} f^2(x)\ln(|f(x)|) & \text{si } f(x)\neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x)=0 \end{cases}$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ (plutôt, c'est hm qui l'est).

Mais, si $|f(x)| \geq e$,

$$f^2(x) \leq h(x)$$

et, si $|f(x)| \leq e$, $f^2(x) \leq e^2$.

Donc, pour tout réel x,

$$m(x) f^2(x) \leq h(x)m(x) + e^2 m(x)$$

Et, hm et $e^2 m$ étant intégrables, et mf^2 positive,

$$\boxed{f^2 m \text{ est intégrable}}$$

[Rq : le choix de e est quelque peu arbitraire, et peut être remplacé par un $a>1$. L'idée est : puis-je majorer f^2 par $h(f^2)$? ou du moins à une cte près ? réponse : oui, sur les intervalles sur lesquels f est "grande". Sinon, pas de problème puisqu'on multiplie par m]

2.b. h est continue sur $[0,+\infty[$ (car, par croissances comparées, $x \ln x \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$).

h est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et, si $x>0$,

$$h'(x) = \ln x + 1$$

Donc h' croît strictement ; même, $h'' : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Si $x>0$, la formule de Taylor avec Reste-Intégrale donne

$$h(x) - [h(a)+(x-a)h'(a)] = \int_a^x (x-t)h''(t)\,dt$$

Si $x>a$, $t \mapsto (x-t)h''(t)$ est positive continue sur $[a,x]$, non constamment nulle (car >0), donc

$$h(x) - [h(a)+(x-a)h'(a)] > 0$$

Si $x<a$, même conclusion, en écrivant :

$$\int_a^x (x-t)h''(t)\,dt = \left[\int_0^1 u\, h''(x+u(a-x))\,du\right](a-x)^2$$

(chgt de variable $t = x+(a-x)u$)

Reprenons cette expression : si $x<a$,

$$\int_a^x (x-t)h''(t)\,dt = (a-x)^2 \int_0^1 \frac{u}{x+u(a-x)}\,du$$

Ou : $h(x) - [h(a)+(x-a)h'(a)] = (a-x)^2 \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{x+u(a-x)}\,du$

Or $h(x) - [h(a) + (x-a)h'(a)] \xrightarrow[x\to 0]{} h(0) - [h(a) + (0-a)h'(a)]$

et $(a-x)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} a^2$.

Et $\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{x+u(a-x)}\,du = \int_0^1 \frac{u}{(1-u)x+ua}\,du$

Et $\varphi_x(u) = \dfrac{u}{(1-u)x+ua} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{a}$ $\quad (u\in]0,1[)$

$0 \leq \varphi_x(u) \leq \dfrac{1}{a}$ si $u \in]0,1[$

$u \mapsto \dfrac{1}{a}$ intégrable sur $]0,1[$

Donc, par théorème de convergence dominée "étendu",

$$\int_0^1 \frac{u}{x+u(a-x)}\,du \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{a}.$$ Donc

$$h(0) - [h(a) + (0-a)h'(a)] = a > 0.$$

[Rq : un peu sophistiqué, je me suis laissé emporter... directement plutôt,

$h(0) - [-ah'(a) + h(a)] = a\times[\ln a + 1] - a\ln a$

$= a > 0$... un peu plus simple !...]

Bon, finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } a > 0, \\ \forall x \geq 0 \quad h(x) \geq (x-a)h'(a) + h(a) \\ \text{avec inégalité stricte si } x \neq a\end{array}}$$

2.c. Si $f = 0$, $\text{Ent}_m(f) = 0$, supposons $f \neq 0$. Alors ... non, pardon, soyons plus précis :

si $f^2 m = 0$, $h(f^2)m = 0$ (car si $m(x) \neq 0$, $f^2(x) = 0$, donc $h(f^2(x)) = 0$), et $\text{Ent}_m(f) = 0$. Supposons $f^2 m \neq 0$, comme $f^2 m$ est continue positive, on a $a > 0$, ce qui autorise :

$$\forall x \geqslant 0 \quad h(x) \geqslant (x - a) h'(a) + h(a)$$

où $a = \int f(x)^2 m(x) \, dx$.

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(f(x)^2) \geqslant (f(x)^2 - a) h'(a) + h(a)$$

On peut multiplier par $m(x)$ et intégrer :

$$\int h((f(x))^2) m(x) \, dx \geqslant \left(\int f(x)^2 m(x) - a\right) h'(a) + h(a)$$

(sachant que $\int m(x) \, dx = 1$).

Ce qui donne directement :

$$\boxed{\text{Ent}_m(f) \geqslant 0}$$

2. d. Supposons l'existence d'un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)^2 \neq a$. Alors, par 2.b.,

$x \mapsto h(f(x)^2) - [(f(x)^2 - a)h'(a) + h(a)]$ est positive continue non constamment nulle sur $\mathbb{R}$. De même en multipliant par $m(x)$. Et donc $\mathrm{Ent}_m(f) > 0$.

Si f est constante, $f^2(x) = b$, $\mathrm{Ent}_m(f) = h(b) - h(b) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } m > 0, \\ (\mathrm{Ent}_m(f) = 0) \iff (f \text{ constante})\end{array}}$$

3. a. $(\mu f')' = \mu' f' + \mu f''$

Or $\mu'(x) = -2x\mu(x)$, et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mu(x) \neq 0$, donc

$$\frac{1}{\mu(x)}(\mu f')'(x) = -2x f'(x) + f''(x) = 2Lf(x).$$

Donc: $$\boxed{Lf = \frac{1}{2\mu}(\mu f')'}$$

3. b. h_1', h_2', donc leur produit, sont bornés sur $\mathbb{R}$, et μ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $h_1' h_2' \mu$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Qui plus est, $h_1 \times h_2' \mu$ a des limites réelles, d'ailleurs nulles, en $+\infty$ et $-\infty$ (c'est vrai pour μ, et

h_1 et h'_2 sont bornées). Cela légitime l'intégration par parties suivante :

$$\int h'_1 \times h'_2 \rho = \left[h_1 \times h'_2 \rho \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int h_1 \times (\rho h'_2)'$$

d'où, par 3. a :

$$\int h'_1 h'_2 \rho = - \int h_1 \times 2\rho L h_2$$

et donc :

$$\boxed{\int h_1(x)(L h_2)(x) \rho(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int h'_1(x) h'_2(x)\, dx}$$

4 – Avec des notations habituelles, si $(t, x) \in \mathbb{R}^2$

$\forall y \in \mathbb{R} \quad |f(x \cos t + y \sin t) \rho(y)| \leq \|f\|_\infty \rho(y)$

et ρ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc ϕ_f est bien définie.

Par opérations, pour tout $y \in \mathbb{R}$

$(t, x) \mapsto f(x \cos t + y \sin t) \rho(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

et, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$,

$y \mapsto f(x \cos t + y \sin t) \rho(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$\forall ((x,t), y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \quad |f(x \cos t + y \sin t) \rho(y)| \leq \|f\|_\infty \rho(y)$

et $y \mapsto \|f\|_\infty \rho(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous le signe $\int$ montre alors que

$$\boxed{\phi_f \text{ est bien définie et continue}}$$

5.a. Fixons $t \in \mathbb{R}$.

Définissons $h : \begin{array}{|l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x\cos t + y\sin t)\mu(y) \end{array}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto h(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

h est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et

$\frac{\partial h}{\partial x} : (x,y) \mapsto \cos t \, f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$

est continue par rapport à chacune des variables x et y. Et :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \|f'\|_\infty \mu(y)$ (f' est bornée)

or μ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc

$x \mapsto \int f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

de dérivée $x \mapsto \int \cos t \, f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,dy$.

Cela montre que $\underline{\phi_f}$ est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$, et

$\partial_x \phi_f : (t,x) \mapsto \int \cos t \, f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,dy$

La continuité de $\partial_x \phi_f$ sur $\mathbb{R}^2$ se montre comme celle de ϕ_f.

Fixons $x \in \mathbb{R}$.

Définissons $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t, y) \longmapsto f(x\cos t + y\sin t)\,\nu(y)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y \mapsto k(t,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

k est dérivable par rapport à t sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, et

$$\frac{\partial k}{\partial t} : (t,y) \mapsto (-x\sin t \quad + y\cos t)\, f'(x\cos t + y\sin t)\,\nu(y)$$

est continue par rapport à chacune des variables t et y. De plus :

$$\forall (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad \left|\frac{\partial k}{\partial t}(t,y)\right| \leq (|x| + |y|)\, \|f'\|_\infty\, \nu(y)$$

Or ν et $y \mapsto |y|\nu(y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, par exemple à l'aide des croissances comparées : $|y|^3\nu(y) \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} 0$.

Donc $\underline{\phi_f \text{ est dérivable par rapport à } t \text{ sur } \mathbb{R}^2}$, et

$$\partial_t \phi_f : (t,x) \mapsto \int (-x\sin t + y\cos t)\, f'(x\cos t + y\sin t)\,\nu(y)\, d\nu$$

Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R}^2$: il existe M tel que

$$\forall (x,t) \in K \quad |x| \leq M$$

et alors

$$\forall ((x,t),y) \in K\times\mathbb{R}$$

$$|(-x\sin t + y\cos t)\, f'(x\cos t + y\sin t)\,\nu(y)| \leq (M + |y|)\, \|f'\|_\infty\, \nu(y)$$

Or ν et $y \mapsto |y|\nu(y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Donc, par théorème,

$\partial_t \phi_f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion: $\boxed{\phi_f \text{ est de classe } C^1}$

[Rq : Bien savoir faire ce genre de questi. est nécessaire pour aller vite ! ce qui est nécessaire]

De même que l'existence et la continuité de $\partial_x \phi_f$ on montre celles de $\partial_{xx} \phi_f$, et

$$\partial_{xx} \phi_f : (t,x) \longmapsto \int \cos^2 t \, f''(x\cos t + y \sin t)\, \mu(y)\, dy$$

donc:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad |\partial_{xx} \phi_f (t,x)| \leq \int \|f''\|_\infty \mu(y)\, dy = \|f''\|_\infty .$$

$\boxed{\partial_{xx} \phi_f \text{ est bien définie, continue et bornée}}$

5.b. Rappelons:

$$\partial_x \phi_f(t,x) = \int \cos t \, f'(x\cos t + y \sin t)\, \mu(y)\, dy$$

Donc: $\boxed{\partial_x \phi_f (t,x) = \cos t \ \phi_{f'} (t,x)}$