9 - Notons $(C_1,\dots,C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de la matrice $M(x_1,\dots,x_n)$;

$$G(x_1,\dots,x_n)=0 \iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\} \quad \alpha_1 C_1+\dots+\alpha_n C_n=0$$

$$\iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\} \quad \forall i\in[\![1,n]\!] \quad (x_i\,|\,\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)=0$$

$$\iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\} \quad \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n\in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)^\circ$$

$$\iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\} \quad \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n\in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)\cap\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)^\circ$$

$$\iff \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\} \quad \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0.$$

Donc:

$$\boxed{\big(G(x_1,\dots,x_n)=0\big)\iff (x_1,\dots,x_n) \text{ est liée}}$$

10 - Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que

$$p(x)=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n.$$

Et:

$$G(x_1,\dots,x_n,x)=\begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|x) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_n) & (x_2|x) \\ & & & & \\ & & & & \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|x) \\ (x|x_1) & (x|x_2) & \dots & (x|x_n) & (x|x) \end{vmatrix}$$

Retranchons à la dernière colonne λ_1 fois la première, λ_2 fois la deuxième, ..., λ_n fois la $n^{\text{ième}}$, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. On obtient :

$$G(x_1,\dots,x_n,x) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|x-p(x)) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_n) & (x_2|x-p(x)) \\ \vdots & & & & \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|x-p(x)) \\ (x|x_1) & (x|x_2) & \dots & (x|x_n) & (x|x-p(x)) \end{vmatrix}$$

Mais, si $k \in [\![1,n]\!]$, $(x_k | x-p(x)) = 0$. On peut alors développer par rapport à la dernière colonne :

$$\underline{G(x_1,\dots,x_n,x) = (x|x-p(x))\, G(x_1,\dots,x_n)}$$

Et : $(x|x-p(x)) = \|x-p(x)\|^2 + (p(x)|x-p(x)) = \|x-p(x)\|^2 = d(x,V)^2$

Et, comme $G(x_1,\dots,x_n) \neq 0$, on a bien :

$$\boxed{d(x,V)^2 = \frac{G(x_1,\dots,x_n,x)}{G(x_1,\dots,x_n)}}$$

11) Soit $f \in C([0,1])$; on a :

$$N_2(f)^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \le \int_0^1 (N_\infty(f))^2 \, dt = N_\infty(f)^2$$

Une norme étant toujours positive :

$$\boxed{N_2(f) \le N_\infty(f)}$$

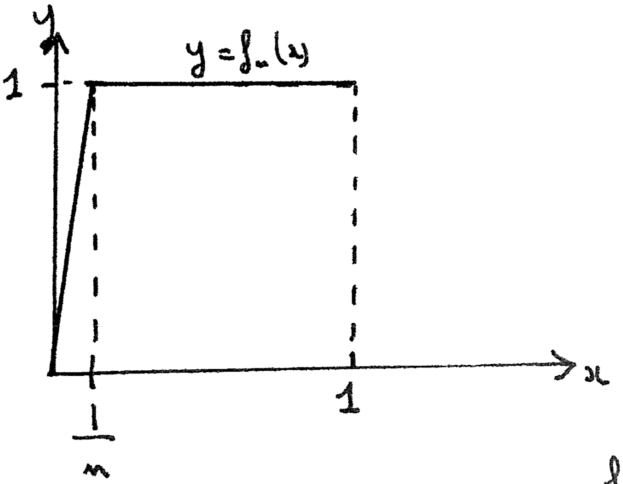
Soit $g \in \overline{A}^\infty$; il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$N_\infty(f_n - g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Alors, par ce qui précède, $N_2(f_n-g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $g \in \overline{A}^2$.

$$\boxed{\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2}$$

12 -



Soit f_n affine par morceaux continue sur $[0,1]$ telle que

· f_n affine sur $[0,\frac{1}{n}]$, avec $f_n(0) = 0$, $f_n(\frac{1}{n}) = 1$

· f_n affine sur $[\frac{1}{n},1]$, avec $f_n(1) = f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

On a $f_n \in V_0$, et

$$(N_2(\phi_0 - f_n))^2 = \int_0^1 (\phi_0 - f_n)^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} (\phi_0 - f_n)^2$$

Mais, sur $[0,\frac{1}{n}]$, $0 \le \phi_0 - f_n \le 1$, donc : $\underline{(N_2(\phi_0 - f_n))^2 \le \frac{1}{n}}$.

Donc $N_2(\phi_0 - f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_0$ pour N_2, donc, comme les f_n sont

dans V_0 : $\boxed{\phi_0 \in \overline{V_0}^2}$

13- Soit $\phi \in C([0,1])$, quelconque, alors

$$\phi = \phi(0)\phi_0 + (\phi - \phi(0)\phi_0)$$

Mais $\phi - \phi(0)\phi_0 \in V_0$ $(\phi(0) - \phi_0(0)\,\phi(0) = 0)$,

donc, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de V_0 qui

converge vers ϕ_0, la suite $(\phi(0) f_n + (\phi - \phi(0)\phi_0))_{n\in\mathbb{N}}$

est une suite d'éléments de V_0 qui converge vers ϕ pour N_2.

Et donc : $\boxed{V_0 \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_2}$

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C([0,1])$ qui

converge vers g pour N_∞. Alors, comme

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |f_n(0) - g(0)| \leq N_\infty(f_n - g),$$

la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(0)$. Mais $f_n(0) = 0$ pour

tout n, donc $g(0) = 0$.

Et donc : $\overline{V_0}^\infty \subset V_0 \subsetneq C([0,1])$

$\boxed{V_0 \text{ n'est pas dense pour } N_\infty}$

Rq : plus élégant, de $\forall f \in C([0,1])$ $|f(0)| \leq N_\infty(f)$

on déduit que $T : f \mapsto f(0)$ est linéaire continue de $(C([0,1]), N_\infty)$ dans $\mathbb{R}$.

Donc son noyau, V_0, est fermé, donc $\overline{V_0}^{\infty} = V_0 \subsetneq C([0,1])$

14_ Soit $(a,b) \in \overline{V}^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ (dans le contexte du problème, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, mais avec $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ça marche aussi bien).

Il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Par opérations sur les suites convergentes,

$$\lambda a_n + \mu b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda a + \mu b$$

Mais, comme V est un espace vectoriel, $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$.

Donc : $\lambda a + \mu b \in \overline{V}$.

$\overline{V}$ est donc stable par combinaisons linéaires, non vide bien sûr (car $V \subset \overline{V}$), donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } V \text{ est un sous-espace vectoriel,}\\ \overline{V} \text{ est un sous-espace vectoriel}\end{array}}$$

15 – Les ϕ_m sont dans $C([0,1])$, donc, si V est dense pour N_∞, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\phi_m \in \overline{V}^\infty = C([0,1])$

Si, réciproquement, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\phi_m \in \overline{V}^\infty$, alors, par 14., toutes les fonctions polynômes sur $[0,1]$ sont dans $\overline{V}^\infty$. Notons E l'espace des fonctions polynômes sur $[0,1]$:

$$E \subset \overline{V}^\infty, \text{ donc } \overline{E}^\infty \subset \overline{V}^\infty$$

($\overline{E}^\infty$ est le plus petit fermé contenant E, et $\overline{V}^\infty$ est un fermé).

Donc, comme $\overline{E}^\infty = C([0,1])$ (premier théorème de Weierstrass, $[0,1]$ étant un segment), on en déduit bien : $C([0,1]) \subset \overline{V}^\infty$, d'où

$$C([0,1]) = \overline{V}^\infty.$$

$$\boxed{V \text{ est dense pour } N_\infty \text{ si et seulement si } \forall m \in \mathbb{N} \quad \phi_m \in \overline{V}^\infty}$$

16 – Comme en 15, si V est dense dans $C([0,1])$ pour N_2, alors

$$\forall m \geqslant 0 \quad \phi_m \in \overline{V}^2$$

Et, si $\forall m \geqslant 0$ $\phi_m \in \overline{V}^2$, alors, notant E les fonctions polynomiales sur $[0,1]$ (ou plutôt leur espace), on a :

$$E \subset \overline{V}^2$$

$$\text{Donc } \overline{E}^\infty \subset \overline{E}^2 \subset \overline{V}^2$$

Or, par ce qui précède, $\overline{E}^\infty = C([0,1])$, d'où $\overline{V}^2 = C([0,1])$

$$\boxed{V \text{ est dense pour } N_2 \text{ si et seulement si } \forall m \geqslant 0 \quad \phi_m \in \overline{V}^2}$$

17 – $W_n = \mathrm{Vect}(\phi_{\lambda_k})_{0\leq k\leq n}$, donc

$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de $C([0,1])$ telles que

$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$, ce qui autorise à utiliser 5 :

$(W$ dense dans $C([0,1])$ pour $N_2) \Leftrightarrow (\forall \nu\in\mathbb{N} \quad \phi_\nu \in \overline{W}^2)$ (par 16.)

$\Leftrightarrow \forall \nu\in\mathbb{N} \quad d(\phi_\nu, W) = 0$ (par 4.)

$\Leftrightarrow \forall \nu\in\mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} d(\phi_\nu, W_n) = 0$ (par 5.)

$$\boxed{W \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_2 \text{ si et seulement si: } \forall \nu\in\mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} d(\phi_\nu, W_n) = 0}$$

18) On utilise 10 :

$$d(\phi_\nu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\nu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$

(notation de 10), où

$$(\phi_\alpha | \phi_\beta) = \int_0^1 t^\alpha t^\beta \, dt = \int_0^1 t^{\alpha+\beta} \, dt = \frac{1}{\alpha+\beta+1}.$$

Donc $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}) = \det\left(\left(\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j+1}\right)_{0\leq i,j\leq n}\right)$