$$\boxed{\text{Mines } 2009 \quad 4h}$$

1) Supposons $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \phi_{\lambda_j} = 0$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}_*^p$ et $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$; alors :

$$\forall x \in [0,1] \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{\lambda_j} = 0$$

d'où $\forall x \in]0,1]$ $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{\lambda_j - \lambda_1} = 0.$

Prenons la limite quand $x \to 0$: si $j \neq 1$, $\lambda_j - \lambda_1 > 0$, donc

$$x^{\lambda_j - \lambda_1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 .$$

On obtient donc : $\alpha_1 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de non nullité des α_i. Il ne peut donc pas y avoir de relation de dépendance linéaire entre les Φ_λ, et :

$$\boxed{(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0} \text{ est une famille libre de } C([0,1])}$$

A. 2. Supposons $R(X) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{A_\ell}{X+b_\ell}$;

alors :

$$A_n D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

(linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne).

Ajoutons à la dernière colonne A_1 fois la première, A_2 fois la deuxième, etc..., A_{n-1} fois la $(n-1)$ième ; on obtient (cette opération élémentaire ne changeant pas le déterminant) :

$$A_n D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix}$$

Mais $R(a_1) = \dots = R(a_{m-1}) = 0$, un développement par rapport à la dernière colonne donne donc :

$$\boxed{A_m D_m = R(a_m) D_{m-1}}$$

3 – Deux cas se présentent :

- Si les b_j ne sont pas deux à deux distincts, alors $D_m = 0$ car c'est le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales. Mais, aussi,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = 0,$$

la formule est donc vérifiée.

- Si les b_j sont deux à deux distincts, montrons, par récurrence sur m, que :

$$\forall m \in [\![1, n]\!] \quad D_m = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} (a_i + b_j)}$$

$m = 1$: il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{a_1 + b_1} = \frac{1}{a_1 + b_1}$$ (convenant qu'un produit vide est l'élément neutre pour $\times$, c'est-à-dire 1)

C'est vrai !

* sous l'hypothèse $D_m = \dfrac{\displaystyle\prod_{1\le i<j\le m}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}(a_i+b_j)}$, $m \le n-1$,

posons $R(X) = \dfrac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m}(X-a_\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m+1}(X+b_\ell)}$; R a $m+1$ pôles simples : $b_1, \dots, b_{m+1}$,

et son numérateur est de degré strictement inférieur à celui de son dénominateur, la décomposition de R en éléments simples donne donc :

$$R(X) = \sum_{\ell=1}^{m+1} \frac{A_\ell}{X+b_\ell}$$

Mais alors, le calcul du 2. montre que

$$A_{m+1} D_{m+1} = R(a_{m+1})\, D_m \quad \text{, donc :}$$

$$A_{m+1} D_{m+1} = \frac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m}(a_{m+1}-a_\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m+1}(a_{m+1}+b_\ell)} \; \frac{\displaystyle\prod_{1\le i<j\le m}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}(a_i+b_j)}$$

Mais, multipliant $R(X) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{m+1} \frac{A_\ell}{X+b_\ell}$, par $X+b_{m+1}$, et prenant la valeur en $-b_{m+1}$ dans l'égalité entre fonctions rationnelles associées, on obtient :

$$A_{m+1} = \frac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m}(-b_{m+1}-a_\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m}(-b_{m+1}+b_\ell)}$$

ou encore $A_{m+1} = \dfrac{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m}(a_\ell+b_{m+1})}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{m}(b_{m+1}-b_\ell)}$

Ce qui donne bien :

$$D_{m+1} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq m+1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq m+1\\ 1\leq j\leq m+1}} (a_i + b_j)}$$

L'hypothèse est donc récurrente, vraie pour $m=1$, donc, par récurrence, vraie si $m \in [\![1, n]\!]$, et par conséquent, dans tous les cas :

$$\boxed{D_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} (a_i + b_j)}}$$

<u>Rq :</u> on peut aussi faire la récurrence sur n.

Cette question demande beaucoup de soin dans la rédaction, et dans la présentation à cause d'expressions "lourdes" à manipuler.

B. 4 – $d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$.

. Si $d(x,A)=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ ne minore pas

$$\{\|x-y\|;\ y\in A\}$$

Il existe donc $y_n\in A /\ \|x-y_n\|\leq\frac{1}{n}$.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x, donc $x\in\overline{A}$.

. si $x\in\overline{A}$, il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x, donc

$$d(x,y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$ $d(x,A)\leq d(x,y_n)$,

donc $d(x,A)\leq 0$. Mais 0 minore $\{\|x-y\|;\ y\in A\}$, donc $d(x,A)\geq 0$. Finalement

$$d(x,A)=0$$

et on a bien montré :

$$\boxed{\text{$d(x,A)=0$ si et seulement si x est adhérent à A}}$$

(question de cours à ne pas manquer !)

5 - Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \subset A_{n+1},$$

donc $\{\|x-y\|;\ y \in A_n\} \subset \{\|x-y\|;\ y \in A_{n+1}\}$

$d(x, A_{n+1})$ minore $\{\|x-y\|;\ y \in A_{n+1}\}$, donc $\{\|x-y\|;\ y \in A_n\}$,

donc $\underline{d(x, A_{n+1}) \leq d(x, A_n)}$

La suite $(d(x, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée (par 0), elle converge donc.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$, donc, comme ci-dessus, on en déduit :

$$d(x, A) \leq d(x, A_n).$$

Les inégalités larges "passent à la limite", on a donc:

$$\underline{d(x, A) \leq \lim(d(x, A_n))}.$$

Mais, si $y \in A$, il existe n_0 tel que $y \in A_{n_0}$. Et donc:

$$\|x-y\| \geq d(x, A_{n_0}) \geq \lim(d(x, A_n)).$$

On voit par là que $\lim(d(x, A_n))$ minore $\{\|x-y\|;\ y \in A\}$, et donc $\underline{\lim(d(x, A_n)) \leq d(x, A)}$.

On conclut bien:

$$\boxed{d(x, A) = \lim(d(x, A_n))}$$

6 – $B \cap V = \{ y \in V \ / \ \|y - x\| \leq \|x\| \}$

$B \cap V$ est donc la boule fermée de centre x et de rayon $\|x\|$ dans V.

Dans l'espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ (on restreint $\|.\|$ à V) de dimension finie, $B \cap V$ est donc fermé et borné, donc compact.

$$\boxed{B \cap V \text{ est compacte}}$$

Comme $B \cap V \subset V$, on a, comme dans le 5.,

$$d(x, V) \leq d(x, B \cap V).$$

Soit maintenant $y \in V$; deux cas se présentent :

. si $y \in B \cap V$, alors $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$

. si $y \notin B \cap V$, alors $\|x - y\| > \|x\|$

Mais $\|x\| = \|x - 0_E\|$, et $0_E \in B \cap V$, donc :

$$\|x\| \geq d(x, B \cap V)$$

Finalement, dans les deux cas, $\|x - y\| \geq d(x, B \cap V)$.

$d(x, B \cap V)$ minore donc $\{ \|x - y\| ; y \in V \}$, ce qui conclut :

$$d(x, B \cap V) \leq d(x, V)$$

et, finalement, $\boxed{d(x, V) = d(x, B \cap V)}$

7. L'application $y \mapsto \|x-y\|$, continue sur le compact $B \cap V$, atteint un minimum.

Il existe donc $y \in B \cap V$ tel que

$$d(x, B\cap V) = \|x-y\|$$

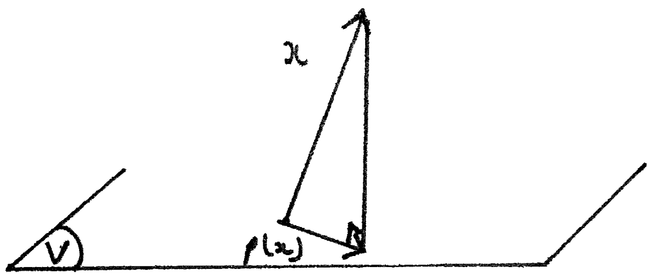
Mais $y \in V$, et $d(x, B\cap V) = d(x,V)$ (6.). Finalement:

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in E, \text{ il existe } y \in V \text{ tel que } d(x,V) = \|x-y\|}$$

8. Notons $p(x)$ la projection orthogonale de x sur V (bien définie car V est de dimension finie). Alors:

$$\forall y \in V \qquad (x - p(x) \mid y - p(x)) = 0$$

$$(\ \forall y \in V \qquad (y - p(x), x - p(x)) \in V \times V^{\circ}).$$



Par théorème de Pythagore:

$$\|x-y\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-y\|^2$$

Et donc

$$\begin{cases} \|x-y\| \geqslant \|x-p(x)\| \\ \|x-y\| = \|x-p(x)\| \iff y = p(x). \end{cases}$$

Finalement:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{La projection orthogonale de } x \text{ sur } V \\ \text{est l'unique } y \in V \text{ tel que} \\ d(x,V) = \|x-y\| \end{array}}$$