Géométrie

I Un peu de dualité

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$.

1. Quelle est la dimension de E^* ?
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit, pour tout i,

$$\phi_i \ : \ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \longmapsto x_i$$

   Montrer que $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ est une base de E^*.
3. Ici, $E = \mathbf{K}_{n-1}[X]$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un n-uplet d'éléments distincts de $\mathbf{K}$. On désigne par $(e_1, \ldots, e_n)$ la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux α_i. Quelle est la base $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ correspondante ?
4. Soit $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que

$$\forall x \in E \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) f_i$$

---

4. Deux applications linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base, donc

$$\forall x \in E \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) f_i$$

équivaut à, pour tout k :

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(f_k) f_i$$

ce qui équivaut à

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \psi_i(f_k) = \delta_{i,k}$$

($\delta_{i,k}$ symbole de Kronecker, 1 si $i = k$ et 0 sinon).
Considérons donc l'application

$$u \ : \ x \longmapsto (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$$

qui est clairement linéaire, donc est élément de $\mathcal{L}(E, \mathbf{R}^n)$. Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, il suffit de montrer l'injectivité (car $\dim(E) = \dim(\mathbf{R}^n) = n$).
Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $\phi_1(x) = \ldots = \phi_n(x) = 0$ donc, pour tout $\psi \in E^*$, $\psi(x) = 0$.
Or si $x \neq 0$, on peut compléter x en une base $(x, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ de E. Si ψ est la première forme linéaire composante associée à cette forme linéaire, alors $\psi(x) = 1$.
On a donc bien u isomorphisme, et donc il y a une unique base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E qui convient : c'est l'image par u^{-1} de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 2 (Oral X)**.** Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans H_1,...,H_n de E stables par u et tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0_E\}$$

II Géométrie vectorielle euclidiennne

Exercice 3 (**Oral Mines**)**.** Trouver tous les couples (f, g) d'éléments de $SO(\mathbf{R}^3)$ différents de l'identité tels que $f \circ g = g \circ f$ (remarque : ce sont bien des rotations vectorielles, le problème n'est pas affine).

Soit D l'axe de f, Δ celui de g. On a $D = \text{Ker}(f - I_n)$, donc D est stable par g, donc $D = \Delta$ ou g est d'angle π modulo 2π et $D \in \Delta^\perp$. Idem en échangeant f et g. Les solutions sont donc les couples (f, g) de rotations ayant même axe, et les couples (f, g) de demi-tours (symétries orthogonales par rapport à des droites) d'axes orthogonaux.

III Utilisation des nombres complexes

Exercice 4. On note D_n le groupe des isométries du plan affine euclidien laissant stable un polygone régulier à n côtés. Déterminer une rotation r et une réflexion s telles que

$$r \circ s = s \circ r^{n-1}$$

et telles que

$$D_n = \left\{Id, r, \ldots, r^{n-1}, s, s \circ r, \ldots, s \circ r^{n-1}\right\} .$$

Une isométrie affine transformant barycentre en barycentre laissera fixe le centre du polyèdre. On se ramène donc à chercher les isométries du plan complexe laissant stable $\mathbf{U}_n$. On voit que $s \ : \ z \longmapsto \overline{z}$ et $r \ : \ z \longmapsto e^{2i\pi/n}z$ conviennent.

Exercice 5. Dans le plan complexe, démontrer que les points d'affixes a, b, c sont alignés si et seulement si

$$a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = b\overline{a} + c\overline{b} + a\overline{c} \ .$$

On suppose que a, b, c sont deux à deux distincts, sinon les points sont alignés et la condition est vérifiée. Les points d'affixes a, b, c sont alors alignés si et seulement si

$$\frac{b-a}{c-a} \in \mathbf{R}$$

ce qui se réécrit, de manière équivalente,

$$\overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} = \frac{b-a}{c-a}$$

Exercice 6. Soit a, b, c, d quatre nombres complexes vérifiant

$$a + c = b + d \quad \text{et} \quad a + ib = c + id \ .$$

Quelle figure forment leurs images dans le plan ?

On réécrit cela sous la forme $b - a = c - d$ (parallélogramme) et $c - ai(b - d)$ (une diagonale image de l'autre par rotation d'angle $\pi/2$). C'est donc un carré.

Exercice 7 (Oral X). Vérifier qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'affixes a, b, c dans le plan complexe soient les sommets d'un triangle équilatéral est :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \ .$$

La condition (faire un dessin) est que $c - a$ soit image de $b - a$ par rotation d'angle $\pi/3$ ou $-\pi/3$, i.e. que l'on ait

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a) \qquad \text{ou} \qquad c - a = e^{-i\pi/3}(b - a)$$

On réécrit cela sous la forme

$$\left(c-a-e^{i\pi/3}(b-a)\right)\left(c-a-e^{-i\pi/3}(b-a)\right)=0$$

Exercice 8 (Oral Mines). Interpréter géométriquement la relation $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$ où x, y et z sont des réels.

A une rotation près (multiplier par e^{-ix}) on peut supposer $x=0$. On est ramené à interpréter $e^{ia}+e^{ib}=-1$, ce qui signifie que le triangle dont les sommets sont les points d'affixes $e^{ia}, e^{ib}, 1$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 9 (Oral X). Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes a, b, c pour que les racines de X^4+aX^2+bX+c forment un parallélogramme dans le plan complexe.

Les 4 racines doivent vérifier, vu l'énoncé, $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ et $x_1-x_2=x_3-x_4$ (à permutation près), ce qui équivaut au fait que ces 4 racines sont de la forme $x,-x,y,-y$. Et donc au fait que $b=0$.

IV Courbes

Exercice 10. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

où $a>0$, $b>0$.

1. Trouver l'équation de la tangente à l'ellipse en un point $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.
2. Trouver un paramétrage de $\mathcal{E}$, retrouver l'équation de la tangente en un point en utilisant ce paramétrage.
3. Montrer qu'une droite est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si son intersection avec $\mathcal{E}$ est réduite à un point.
4. Montrer que la droite passant par (x, y) et dirigée par (α, β) est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = (\beta x - \alpha y)^2$.
5. Montrer qu'il passe par (x, y) deux tangentes à $\mathcal{E}$ orthogonales si et seulement si (x, y) est sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

---

1. La tangente à l'ellipse a pour équation : $\dfrac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$. Ou encore $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

2. Un paramétrage est $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. Ce qui permet sans difficulté de retrouver l'équation de la tangente, dont un vecteur directeur au point de paramètre t est $(-a\sin t, b\cos t)$. Un vecteur orthogonal à cette tangente est $(b\cos t, a\sin t)$ et on trouve l'équation :

$$b\cos t(x - a\cos t) + a\sin t(y - b\sin t) = 0$$

3. Une évidence graphique...Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$. La droite passant par (x_0, y_0) et dirigée par (α, β) est paramétrée par $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$. On cherche les intersections avec $\mathcal{E}$ en résolvant l'équation $\dfrac{1}{a^2}(x_0 + \alpha t)^2 + \dfrac{1}{b^2}(y_0 + \beta t)^2 = 1$, i.e. l'équation $\left(\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2}\right)t + \left(\dfrac{2x_0\alpha}{a^2} + \dfrac{2y_0\beta}{b^2}\right)\right)t = 0$. L'intersection est réduite à un point si et seulement si $\dfrac{2x_0\alpha}{a^2} + \dfrac{2y_0\beta}{b^2} = 0$. Le résultat en découle.

4. Il suffit d'écrire que le discriminant de l'équation d'inconnue t

$$\frac{(x + \alpha t)^2}{a^2} + \frac{(y + \beta t)^2}{b^2} = 1$$

est nul. Il y a quand même quelques calculs à effectuer !

5. De l'équation précédente il résulte qu'une tangente horizontale à $\mathcal{E}$ passe par le point (x, y) si et seulement si $y = \pm b$ (évident géométriquement) et qu'une tangente verticale à $\mathcal{E}$ passe par le point (x, y) si et seulement si $x = \pm a$ (également évident). On obtient donc 4 points d'où l'on peut, comme disent les géomètres, « mener » deux tangentes orthogonales à l'ellipse : les points $(\pm a, \pm b)$.
   Pour chercher les autres points (x, y), on cherche à quelle condition le vecteur $(1, \beta)$ dirige une tangente à l'ellipse passant par (x, y). D'après le calcul de la question précédente, cette condition est
   $$(a^2 - x^2)\beta^2 + 2xy\beta + b^2 - y^2 = 0$$
   Le discriminant (réduit) de cette équation est $x^2y^2 - (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$, i.e. $x^2b^2 + a^2y^2 - a^2b^2$, strictement positif si et seulement si (x, y) est « à l'extérieur » de l'ellipse, ce qui est profondément rassurant. Supposons donc que cette condition soit remplie. Deux tangentes à l'ellipse passent par $\mathcal{E}$. Elles sont orthogonales si et seulement si les deux solutions β et β' vérifient $\beta\beta' = -1$, i.e. (produit des racines d'une équation du second degré) $b^2 - y^2 = a^2 - x^2$. On trouve un cercle passant par les 4 points trouvés initialement (rassurant aussi), appelé cercle orthoptique de l'ellipse puisqu'il s'agit de l'ensemble des points desquels on voit l'ellipse sous un angle droit.

Exercice 11 (Oral Mines). Trouver l'ensemble des points du plan euclidien d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole d'équation $y^2 = ax$ (dans un repère orthonormal).

Le gradient en (x_0, y_0) de $(x, y) \longmapsto y^2 - ax$ est $(-a, 2y_0)$. Deux tels gradient sont orthogonaux si et seulement si $a^2 + 4y_0y_1 = 0$. Si y_0 et y_1 vérifient cette condition, les deux tangentes correspondantes ont pour équations

$$-a\left(x - \frac{y_0^2}{a}\right) + 2y_0(y - y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad -a\left(x - \frac{y_1^2}{a}\right) + 2y_1(y - y_1) = 0$$

soit encore

$$-ax + 2y_0 y = y_0^2 \qquad \text{et} \qquad -ax + 2y_1 y = y_1^2$$

qui se coupent au point de coordonnées $\left(\frac{y_0 y_1}{a}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$ ou encore $\left(-\frac{a}{4}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$. On vérifie alors que l'ensemble cherché est la droite d'équation $x = -a/4$.

Exercice 12 (**Oral Mines**). Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y^2 = 4ax$ ($a > 0$), F le point de coordonnées $(a, 0)$ et D la droite d'équation $x = -a$. Soit $M \in D$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[HF]$.

V Surfaces

Exercice 13 (**Oral Centrale**). Indiquer pour quels u, v, w, t le plan $ux + vy + wz = t$ est tangent à la surface d'équation$z = x^2 - y^2$.

Exercice 14. On considère la surface d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

Démontrer que le plan d'équation $ux + vy + wz = 1$ est tangent à cette quadrique si et seulement si $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 1$; préciser alors le point de contact.

Exercice 15 (**Oral Mines**). Etudier l'intersection de la surface d'équation $z = xy$ avec son plan tangent en un de ses points.

Exercice 16. Soit (S) une surface d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = k$. Soit M un point de l'espace. Démontrer que l'ensemble des points de (S) en lesquels le plan tangent à (S) contient M est l'intersection de (S) et d'un plan.

Exercice 17 (Oral Centrale). Soit $p > 0$. La surface S est définie par

$$M(u,v) = \big(\frac{u^2}{2p}, u\cos v, u\sin v\big)$$

1. Donner un vecteur normal à S au point de paramètre (u,v).
2. Identifier le lieu des points qui sont centre d'une sphère tangente à S et passant par $F = (p/2, 0, 0)$.

Exercice 18. Etudier l'intersection de la surface d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$$

avec son plan tangent quand celui-ci est horizontal.

Notons $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2)$. Le plan tangent est horizontal lorsque le vecteur gradient $\nabla F(x,y,z)$ (supposé non nul) est vertical. Or

$$\nabla F(x,y,z) = \big(4x(x^2+y^2+z^2+3) - 32x, 4y(x^2+y^2+z^2+3) - 32y, 4z(x^2+y^2+z^2+3)\big)$$

$\nabla F(x,y,z) = 0$ si et seulement si
$x\,(x^2+y^2+z^2+3-8) = y\,(x^2+y^2+z^2+3-8) = 0$. Comme $x = y = 0$ est impossible (cela reviendrait à $9 = 0$), on a donc $x^2+y^2+z^2 = 5$ et donc $x^2+y^2 = 4$, $z = \pm 1$. En un tel point $(2\cos\phi, 2\sin\phi, \epsilon)$ avec $\epsilon = \pm 1$, on a donc un plan tangent d'équation $z = \epsilon$, l'intersection avec la surface a pour équation

$$z = \epsilon, \qquad x^2 + y^2 = 4$$

et c'est donc un cercle. La surface donnée est d'ailleurs un tore.

Exercice 19. Soit, dans $\mathbf{R}^n$,

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$$

Quels sont les vecteurs tangents à V en un point de V ? (les a_i sont des réels positifs).

Exercice 20. Soit, dans $\mathbf{R}^n$,

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ ; \ x_1 x_2 \ldots x_n = k\}$$

Quels sont les vecteurs tangents à V en un point de V ? (k est un réel non nul).

On définit $F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$, tout vecteur tangent en $(a_1, \ldots, a_n)$ est orthogonal au gradient de F en ce point, donc orthogonal à $(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$. Mais réciproquement ? soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que $\sum \frac{\lambda_i}{a_i} = 0$, on considère l'arc

$$t \longmapsto \left(a_1 + t\lambda_1, \ldots, a_{n-1} + t\lambda_{n-1}, \frac{k}{(a_1 + t\lambda_1) \cdots (a_{n-1} + t\lambda_{n-1})}\right)$$

dont on calcule la dérivée en 0 et qui montre bien la réciproque.

VI Divers

Exercice 21. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, quel est l'espace tangent en I_n à $SO(n)$?

On peut commencer par regarder $n = 2$, si

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

On dérive (en supposant θ dérivable), et, si $\theta(0) = 0$, alors $\gamma'(0) = \theta'(0) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit qu'une matrice tangente à $SO(2)$ en I_2 est dans $\mathcal{A}_2(\mathbf{R})$, inclusion réciproque assez facile.
Pour n quelconque, si

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad {}^t\gamma(t)\ \gamma(t) = I_n$$

et si $\gamma(0) = I_n$ et si γ est dérivable en 0 alors en dérivant on voit que $\gamma'(0) \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, réciproque pas si facile, mais qui l'est si on pense à $t \longmapsto \exp(tA)$.

Exercice 22. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, quel est l'espace tangent en I_n à $SL_n(\mathbf{R}$?

D'après le cours, les vecteurs tangents en I_n à $SL_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux à $\nabla(\det)(I_n)$. Le calcul de la différentielle du déterminant est un classique à revoir...On trouve que les vecteurs tangents sont de trace nulle. La réciproque peut se faire en considérant, si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, l'application $t \longmapsto \exp(tA)$ qui définit un arc tracé sur $SL_n(\mathbf{R})$ passant par I_n en $t = 0$.
