Convexité

Exercice 1. Justifier, en utilisant des arguments de convexité, les inégalités (très classique pour la première, presque du cours, classique pour la seconde) :

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall x \in [0, \pi/2] \qquad \sin x \geq \frac{2}{\pi}x$$

Ces deux inégalités se montrent en étudiant des variations de fonctions. Avantage de la convexité : l'élégance des preuves. Inconvénient : la stricte convexité n'est pas au programme, on n'obtient donc pas le fait que ces inégalités sont strictes ailleurs qu'en -1 pour la première, en 0 et en $\pi/2$ pour la seconde.

On parle de fonctions concaves sur les intervalles considérés. La première est donc au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, la seconde au-dessus de sa corde entre les deux points d'abscisses 0 et $\pi/2$.

Exercice 2 (**Inégalité de Jensen).**
On considère une variable aléatoire X à valeurs réelles, et ϕ une fonction réelle d'une variable réelle, dérivable, convexe. On suppose que X et $\phi(X)$ sont d'espérance finie. En écrivant que le graphe de ϕ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $m = E(X)$, montrer que

$$\phi\left(E(X)\right) \leq E\left(\phi(X)\right)$$

Qu'obtient-on avec la fonction $x \mapsto x^2$ et avec la fonction $x \mapsto |x|$?

De

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \phi(x) \geq \phi(m) + (x - m)\phi'(m)$$

on tire (comme X est à valeurs réelles)

$$\phi(X) \geq \phi(m) + (X - m)\phi'(m)$$

et donc, par croissance et linéarité de l'espérance,

$$E\big(\phi(X)\big) \geq \phi(m) + \phi'(m)\Big(E\big(X\big) - m\Big)$$

d'où le résultat. L'application à $x \mapsto x^2$ donne

$$\big(E(X)\big)^2 \leq E(X^2)$$

Et celle à $|.|\ldots$est un peu abusive car $|.|$ n'est pas C^1.

Exercice 3 (Inégalité de Jensen).

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ et $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a < b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t$$

(inégalité de Jensen)

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe C^1. Soit $\gamma \in \mathbf{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \phi(x) \geq \phi(\gamma) \ + \ (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen pour $\phi : x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat obtenu peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen pour $\phi : x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat obtenu peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

1. Définissons, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas

$\dfrac{b-a}{n}$ sur le segment $[a,b]$. En utilisant la convexité de ϕ,

$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$

Mais $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$,

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\, \mathrm{d}t$,

ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »...On conclut donc.

2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\phi\left(f(t)\right) \geq \phi(\gamma) + \left(f(t)-\gamma\right)\phi'(\gamma)$$

On intègre entre a et b ($a < b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne

$$\int_a^b \phi\left(f(t)\right) \mathrm{d}t \geq (b-a)\phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$

En particulier, prenons $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\left(f(t)\right) \mathrm{d}t$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$
ou encore
$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$
ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\int_a^b 1\times f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire
$$\frac{b-a}{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
ou encore
$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$
(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :
$$1 \leq \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$
Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

Exercice 4 (*Oral Mines*)**.** Montrer que dans un evn, l'adhérence d'une partie convexe est convexe, l'intérieur d'une partie convexe est convexe.

Soit C une telle partie. Si x et y sont dans $\overline{C}$, il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de C qui convergent respectivement vers x et y. Si $t \in [0,1]$, alors

$$tx_n + (1-t)y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} tx + (1-t)y$$

Par convexité de C, on obtient ainsi une suite d'éléments de C qui converge vers $tx + (1-t)y$, qui est donc dans $\overline{C}$. Ce qui permet bien de conclure à la convexité de $\overline{C}$. Pour celle de $\overset{\circ}{C}$, c'est un peu plus difficile, mais un dessin aide beaucoup. En effet, si x et y sont dans $\overset{\circ}{C}$, si on trace une boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ que l'on suppose incluse dans C, et une boule ouverte de centre y et de rayon $r' > 0$ que l'on suppose elle aussi incluse dans C, on peut penser que, pour tout $t \in [0,1]$, la boule ouverte de centre $tx + (1-t)y$ et de rayon $tr + (1-t)r'$ est incluse dans C. Mais bien sûr, comme d'habitude, on fait le dessin pour la norme euclidienne usuelle, il fait donc vérifier que ça marche bien. Et ce n'est pas parce que le dessin est simple que l'écriture l'est. Simplifions : en remplaçant r et r' par $\min(r, r')$, on peut supposer $r = r'$. Soit alors $z \in B(tx + (1-t)y, r)$. Ce qui signifie que

$$z = tx + (1-t)y + u$$

avec $\|u\| < r$. Mais alors

$$z = t(x+u) + (1-t)(y+u)$$

et $(x+u, y+u) \in C^2$, ce qui conclut.

Exercice 5. Soit $p > 1$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on définit

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Démontrer que si $N_p(x) \leq 1$ et $N_p(y) \leq 1$, si $0 \leq \lambda \leq 1$, alors $N_p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq 1$. En déduire que N_p est une norme sur $\mathbf{C}^n$. Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} N_p(x)$.

L'application $z \mapsto z^p$ est convexe sur $\mathbf{R}^+$, du fait que $p > 1$. Et donc pour tout i,

$$\begin{aligned} |\lambda x_i + (1-\lambda) y_i|^p &\leq (\lambda |x_i| + (1-\lambda)|y_i|)^p \\ &\leq \lambda |x_i|^p + (1-\lambda)|y_i|^p \end{aligned}$$

Ajoutons ces inégalités, on obtient

$$[N_p(\lambda x + (1-\lambda)y)]^p \leq \lambda \left(N_p(x)\right)^p + (1-\lambda)\left(N_p(y)\right)^p$$

et avec l'hypothèse $N_p(x) \leq 1$ et $N_p(y) \leq 1$, on trouve bien

$$N_p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq 1$$

On aimerait en déduire, sans hypothèse sur x et y (on supposera quand même x et y non nuls, ce qui n'est pas restrictif),

$$N_p(x+y) \leq N_p(x) + N_p(y) \tag{1}$$

On commence par constater que les propriétés d'une norme, autres que l'inégalité triangulaire, sont facilement vérifiées par N_p, entre autres l'homogénéité, ce qui permet de dire que (1) équivaut à

$$N_p\left(\frac{1}{N_p(x)+N_p(y)}x + \frac{1}{N_p(x)+N_p(y)}y\right) \leq 1 \tag{2}$$

On aimerait donc trouver un $\lambda \in [0,1]$, un x' et un y' tels que $N_p(x') \leq 1$ et $N_p(y') \leq 1$, vérifiant

$$\frac{1}{N_p(x)+N_p(y)}x = \lambda x' \qquad , \qquad \frac{1}{N_p(x)+N_p(y)}y = (1-\lambda)y'$$

Comme

$$\frac{N_p(x)}{N_p(x)+N_p(y)} + \frac{N_p(y)}{N_p(x)+N_p(y)} = 1$$

on est tenté de prendre $\lambda = \dfrac{N_p(x)}{N_p(x)+N_p(y)}$, donc $1-\lambda = \dfrac{N_p(y)}{N_p(x)+N_p(y)}$ (on a bien $0 \leq \lambda \leq 1$), $x' = \dfrac{1}{N_p(x)}x$ et $y' = \dfrac{1}{N_p(y)}y$. Ce qui permet de conclure que

(2) est vérifiée, puis donc (1). Les autres propriétés d'une norme ne posent pas de problème, on conclut donc.
La double inégalité

$$[N_\infty(x)]^p \leq [N_p(x)]^p \leq n \times [N_\infty(x)]^p$$

(très facile en partant de $[N_p(x)]^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$) donne

$$N_\infty(x) \leq N_p(x) \leq n^{1/p} \times N_\infty(x)$$

et donc

$$N_p(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} N_\infty(x)$$

ce qui rend la notation N_∞ cohérente.

Exercice 6. Comparer, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs, leurs moyennes arithmétique, géométrique, harmonique :

$$a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

$$b = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

$$c \quad \text{où} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

Tous ces réels étant strictement positifs, on peut comparer leurs logarithmes. Or

$$\ln b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

La fonction ln étant concave, on en tire

$$\ln b \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \ln a$$

Donc $b \leq a$. Remplaçons alors les x_i par les $1/x_i$, on obtient

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$$

Et finalement $c \leq b \leq a$.

Exercice 7. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs. Démontrer que

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right]^{1/n} \geq 1 + \left[\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)\right]^{1/n}$$

Un peu de réécriture avec exponentielle et logarithme amène à considérer la fonction

$$t \longmapsto \ln\left(1+e^t\right)$$

qui est convexe (calcul de sa dérivée seconde, par exemple).

Exercice 8 (**Entropie**)**.** Montrer que la fonction

$$x \longmapsto x \ \ln x$$

se prolonge en une fonction convexe sur $\mathbf{R}^+$.

La fonction est convexe sur $]0, +\infty[$ (calcul de la dérivée seconde), et se prolonge par continuité en 0. Montrer qu'une fonction est convexe, c'est montrer que pour tous x et y dans son domaine de définition :

$$\forall t \in [0, 1] \qquad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Mais on peut se limiter à $x < y$ (si $x = y$, c'est une égalité évidente, et si $x > y$ on permute x et y), et à $t \in]0, 1[$ (si $t = 0$ ou $t = 1$ il y a égalité). Donc, ici, la seule chose à montrer est, pour $y > 0$ et $t \in]0, 1[$,

$$f(t \times 0 + (1-t) \times y) \leq tf(0) + (1-t)f(y)$$

mais on sait déjà

$$\forall x > 0 \qquad f(t \times x + (1-t) \times y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Il n'y a plus qu'à prendre la limite quand $x \to 0$, les inégalités larges sont conservées par passage à la limite.

Exercice 9. Soit f convexe sur $\mathbf{R}^+$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

Exercice 10 (Oral X). Soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue, I intervalle de $\mathbf{R}_*^+$. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f(\dfrac{1}{x})$ est convexe.

On peut commencer par vérifier que ça marche...avec des fonctions puissances, par exemple.

On peut ensuite examiner le cas des fonctions de classe C^2. Si $g : x \mapsto xf(x)$ et $h : x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ alors on calcule :

$g'' : x \mapsto 2f'(x) + xf''(x)$

$h' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2} f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$h'' : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}\left(2f'\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f''\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

L'équivalence en résulte donc avec cette hypothèse de régularité supplémentaire.

Supposons g convexe. Montrons que h l'est. Notre but va être de montrer que, pour tous x et y dans I, pour tout $s \in [0,1]$,

$$h\left(\frac{s}{x}+\frac{1-s}{y}\right) \leq sh\left(\frac{1}{x}\right)+(1-s)h\left(\frac{1}{y}\right)$$

Pourquoi écrire la convexité de h comme ça ? pour que le second membre « ressemble un peu plus à g », et parce que le calcul des dérivées inspire aussi de travailler ici sur les inverses. On doit donc montrer

$$f\left(\frac{xy}{sy+(1-s)x}\right) \leq sf(x)+(1-s)f(y)$$

Il est naturel de tout réécrire en termes de g : on doit donc montrer que (pour tous etc. . .)

$$\frac{sy+(1-s)x}{xy}g\left(\frac{xy}{sy+(1-s)x}\right) \leq \frac{s}{x}g(x)+\frac{1-s}{y}g(y)$$

ou encore que

$$g\left(\frac{xy}{sy+(1-s)x}\right) \leq \frac{sy}{sy+(1-s)x}g(x)+\frac{(1-s)x}{sy+(1-s)x}g(y)$$

qui est effectivement vrai par convexité de g. Gageons que la réciproque est analogue.

Exercice 11 (Oral X-ens). Soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$$

Il n'y a qu'un sens intéressant.

Méthode 1 On voit assez facilement que si on itère l'application de

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$$

on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+y\right)\right) &\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+f(y)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)+f(y)\right) \end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right) \leq \frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$

d'où l'idée de démontrer, par récurrence sur n :

$$\forall n \geq 0\ \forall k \in [\![0,2^n]\!]\ \forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x)+(1-\frac{k}{2^n})f(y)$$

La récurrence n'est pas difficile à établir : il suffit de dire que, si k et k' sont dans $[\![0,2^n]\!]$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)+\left(\frac{k'}{2^n}x+(1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)+f\left(\frac{k'}{2^n}x+(1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)$$

on simplifie, on utilise la propriété à l'étape n, on en déduit la propriété à l'étape $n+1$.

Pour conclure, on utilise alors la continuité de f et la densité de l'ensemble $\left\{\frac{k}{2^n}\ ;\ 0 \leq k \leq 2^n\right\}$ dans $[0,1]$ (qui se démontre comme dans l'exercice de topologie sur les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$).

Méthode 2 (Beaucoup plus graphique). On raisonne par l'absurde, en supposant que f ne soit pas convexe. On fixe alors $x < y$ dans I et $t_0 \in]0,1[$ tels que

$$f\left(t_0 x + (1-t_0)y\right) > t_0 f(x) + (1-t_0) f(y)$$

Par continuité de f,

$$A = \{u \in [0,t_0]\ ;\ f\left(ux + (1-u)y\right) = uf(x) + (1-u)f(y)$$

est un fermé relatif de $[0,t_0]$ (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc un fermé (un fermé relatif A d'un fermé F est l'intersection avec ce fermé F d'un fermé G, donc est fermé). Non vide car il contient 0. Il a donc un plus grand élément (il est non vide majoré, il a donc une borne supérieure, qu'il contient car il est fermé). On appelle t_1 cet élément, et on note $x_1 = t_1 x + (1-t_1)y$ (évidemment, on ne fait que décrire ce qu'on voit sur un dessin : x_1 est l'abscisse du dernier point avant $t_0 x + (1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ rencontre la courbe).

De même,

$$B = \{u \in [t_0, 1] \ ; \ f\left(ux + (1-u)y\right) = uf(x) + (1-u)f(y)$$

a un plus petit élément t_2, et on note $x_2 = t_2 x + (1-t_2)y$ (x_2 est l'abscisse du premier point après $t_0 x + (1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ rencontre la courbe).
Sur $]t_1, t_2[$, l'application continue

$$u \mapsto f\left(ux + (1-u)y\right) - uf(x) - (1-u)f(y)$$

ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant strict d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc est strictement positif (c'est son signe en t_0). En particulier en $(t_1 + t_2)/2$, ce qui donne finalement

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$

Exercice 12 (Normes intégrales sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{C})$)**.** On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose $a < b$. On désigne par p et q deux réels strictement positifs qui vérifient la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

1. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y,

$$\exp\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p}\exp(x)+\frac{1}{q}\exp(y)$$

puis en déduire que, pour tous nombres réels positifs α et β :

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

2. Démontrer que, pour tous éléments f, g de E,

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \frac{1}{p}\int_{[a,b]} |f|^p \; + \; \frac{1}{q}\int_{[a,b]} |g|^q$$

3. En utilisant la question précédente, on se propose de démontrer l'inégalité de Hölder, valable pour n'importe quels éléments f et g de E :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_{[a,b]} |g|^q\right)^{1/q}$$

   (a) Examiner le cas où l'une des deux fonctions est nulle.

   (b) Examiner le cas où $\displaystyle\int_{[a,b]} |f|^p = \int_{[a,b]} |g|^q = 1$.

   (c) On se place dans le cas général, on suppose néanmoins que ni f ni g n'est la fonction nulle. Montrer qu'il existe deux réels positifs λ et μ tels que les fonctions $f_1 = \lambda f$ et $g_1 = \mu g$ vérifient $\displaystyle\int_{[a,b]} |f_1|^p = \int_{[a,b]} |g_1|^q = 1$; exprimer λ et μ à l'aide d'intégrales faisant intervenir f, g, p et q.Conclure alors en utilisant la question précédente.

(d) L'inégalité de Cauchy-Schwarz est-elle un cas particulier de l'inégalité de Hölder ?

4. Vérifier que :

$$\Big(|f|+|g|\Big)^p = |f|\Big(|f|+|g|\Big)^{p-1} + |g|\Big(|f|+|g|\Big)^{p-1}$$

En appliquant (adroitement !) l'inégalité de Hölder à chacun des produits du second membre, en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\Big(\int_{[a,b]} |f+g|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{[a,b]} |f|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int_{[a,b]} |g|^p\Big)^{1/p}$$

5. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_p : & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & f & \longmapsto & \Big(\int_{[a,b]} |f|^p\Big)^{1/p} \end{array}$$

est une norme sur E.

6. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer que, si $1 < p < p'$ et si $f \in E$,

$$\phi_p(f) \leq (b-a)^{1/p-1/p'}\ \phi_{p'}(f)$$

Utiliser ce résultat pour comparer les normes ϕ_p entre elles ; les comparer à la norme N_∞ de la convergence uniforme sur $[a,b]$.

On pourra utilement s'inspirer des comparaisons des normes intégrales usuelles vues en cours

On peut démontrer (exercice d'intégration) que, pour tout élément f de E,

$$\lim_{p \to +\infty} \phi_p(f) = N_\infty(f)$$

ce qui justifie l'appellation N_∞

---

1. La première inégalité résulte de la convexité de la fonction exp, que l'on peut justifier par exemple en disant que sa dérivée seconde est positive. On peut réécrire cette inégalité sous la forme

$$\exp(\frac{x}{p})\ \exp(\frac{y}{q}) \leq \frac{1}{p}\exp(x) + \frac{1}{q}\exp(y)$$

et il s'agit donc de choisir x et y tels que $\exp x = \alpha^p$ et $\exp y = \beta^q$. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, c'est impossible, mais alors l'inégalité à démontrer est simple. Supposons donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, posons $x = p \ln \alpha$ et $y = q \ln \beta$, on obtient bien ce qu'on veut.

---

2. On commence par l'inégalité traditionnelle :

$$\left|\int_a^b f(t)\ g(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ |g(t)|\ dt$$

On écrit alors

$$\forall t \in [a,b] \qquad |f(t)|\ |g(t)|\ \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p\ +\ \frac{1}{q}|g(t)|^q$$

Et on intègre cette inégalité, ce qui conclut (bien sûr, on utilise le fait que $a \leq b$, sinon en intégrant l'inégalité on changerait son sens).

---

3. (a) Dans le cas où l'une des deux fonctions est nulle, les deux membres de l'inégalité sont nuls, il n'y a donc rien à faire.

(b) On suppose $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p\ dt = \int_a^b |g(t)|^q\ dt = 1$. La question 2. donne alors

$$\left|\int_a^b f(t)\ g(t)\ dt\right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ce qui est ici l'inégalité de Hölder.

(c) Soit $f_1 = \lambda f$. Alors

$$\int_a^b |f_1(t)|^p \ dt \ = \ 1 \ \Leftrightarrow \ |\lambda|^p \int_a^b |f(t)|^p \ dt \ = 1$$

Or, comme $|f|^p$ est une fonction positive continue non constamment nulle sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b |f(t)|^p \ dt \ > 0$$

(par le cours sur l'intégrale d'une fonction sur un segment). Une unique valeur de λ, si on suppose de plus λ réel positif, convient donc :

$$\lambda = \Big(\int_a^b |f(t)|^p \ dt\Big)^{-1/p}$$

On considère de même

$$\mu = \Big(\int_a^b |g(t)|^q \ dt\Big)^{-1/q}$$

et on a

$$\int_a^b |g_1(t)|^q \ dt \ = \ 1$$

On peut appliquer le b) à f_1 et g_1 : on obtient

$$\Big|\int_a^b \lambda f(t) \ \mu \ g(t) \ dt\Big| \ \leq \ 1$$

ou encore

$$\Big|\int_a^b f(t) \ g(t) \ dt\Big| \ \leq \ \frac{1}{\lambda\mu}$$

ce qui est bien l'inégalité de Hölder.

(d) …dont l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une conséquence, il n'est que de prendre $p = q = 2$.

4. La vérification demandée n'est pas bien difficile. Intégrons l'égalité obtenue, puis appliquons l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b \big(|f(t)| + |g(t)|\big)^p dt \leq \int_a^b |f(t)|\big(|f(t) + |g(t)|\big)^{p-1} dt + \int_a^b |g(t)|\big(|f(t) + |g(t)|\big)^{p-1} dt$$

$$\leq \Big(\int_a^b |f|^p\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b (|f|+|g|)^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\int_a^b |g|^p\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b (|f|+|g|)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}$$

Mais $q = 1/(1 - 1/p) = p/(p - 1)$. Donc $(p - 1)q = p$.

Il ne reste plus qu'à tout diviser par $\left(\int_a^b (|f| + |g|)^p\right)^{1/q}$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.