CONNEXITÉ PAR ARCS

Exercice 1. On a montré que si u était un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E, il existait une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u était diagonale par blocs, du type :

$$\begin{pmatrix} M_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & M_{\theta_p} & & \\ & & & & -I_q & \\ & & & & & I_r \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

(et, bien entendu, I_t désigne la matrice unité d'ordre t) Que peut-on dire de q si u est une rotation ?
On désigne par n la dimension de E, et on suppose que u est une rotation. Construire une application $t \mapsto M(t)$, de $[0,1]$ dans $SO(n)$, continue, telle que $M(0) = I_n$ et telle que $M(1)$ soit la matrice écrite ci-dessus ($SO(n)$ est donc connexe par arcs).
$\mathcal{O}(n)$ est-il connexe par arcs ? $\mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$ est-il connexe par arcs ?

Solution : chaque matrice $M(\theta_i)$ a un déterminant égal à 1 ; un calcul de déterminant par blocs montre donc, si

$$A = \begin{pmatrix} M_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & M_{\theta_p} & & \\ & & & & -I_q & \\ & & & & & I_r \end{pmatrix},$$

que $\det(A) = (-1)^q$. Et donc, si u est une rotation,

$$\boxed{q \text{ est pair}}$$

Remarquons alors que

$$M(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de réécrire (q étant pair)

$$A = \begin{pmatrix} M_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_{\theta_s} & \\ & & & & I_r \end{pmatrix}$$

(en « rajoutant » $q/2$ matrices M_{θ_i} avec $\theta_i = \pi$). Posons alors, pour tout $t \in [0,1]$,

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_{t\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_{t\theta_s} & \\ & & & & I_r \end{pmatrix}$$

Il est assez clair que l'on définit ainsi un « arc » continu joignant I_n à A et à support inclus dans $SO(n)$. Etant donné deux matrices A et B dans $SO(n)$, on peut donc en raccordant deux tels arcs joindre A et B par un arc continu dans $SO(n)$, dont on prouve ainsi la connexité par arcs.
L'application det est continue sur $O(n)$, et $det\big(O(n)\big) = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs, donc $O(n)$ ne l'est pas non plus.
Enfin, si $A \in O(n) \setminus SO(n)$, l'application

$$\phi \ : \ M \mapsto AM$$

continue car linéaire sur $M_n(\mathbf{R})$, est telle que

$$\phi\big(SO(n)\big) = SO(n) \setminus O(n)$$

ce qui permet de déduire la connexité par arcs de $SO(n) \setminus O(n)$ de celle de $\big(SO(n)\big)$.

Exercice 2 (Utilisé dans un problème de l'X). Démontrer que la sphère unité d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs si et seulement si cet espace est de dimension au moins 2.

Solution : En dimension 1, la sphère unité est de la forme $\{e, -e\}$ où $\|e\| = 1$, elle n'est pas connexe par arcs. Soit x, y deux éléments (que l'on peut supposer distincts) de la sphère unité de E (E de dimension au moins 2). L'application $\phi \ : \ t \mapsto (1-t)x + ty$ est un paramétrage du segment $[x, y]$. Si $x \neq -y$ (x et y non diamétralement opposés), alors $\forall t \in [0,1]$ $\phi(t) \neq 0$, et l'arc $\psi \ : \ t \mapsto \phi(t)/\|\phi(t)\|$ est un arc continu joignant x à y sur la sphère. Si $x = -y$, soit z un troisième point sur la sphère. Il y a un arc continu joignant x à z sur la sphère, un arc continu joignant z à y sur la sphère, donc un arc continu joignant x à y sur la sphère. La sphère est donc connexe par arcs.

Exercice 3. Soit ϕ et ψ deux applications définies sur l'ensemble D des nombres complexes de module strictement inférieur à 1 telles que

$$\forall z \in D \qquad \exp\bigl(\phi(z)\bigr) = \exp\bigl(\psi(z)\bigr) \ .$$

Démontrer que $\phi - \psi$ est constante.

Solution : $(\phi - \psi)(D)$ est connexe par arcs car D l'est et $\phi - \psi$ est continue, or $(\phi - \psi)(D) \subset 2i\pi\mathbf{Z}$, donc $(\phi - \psi)(D)$ est un singleton.

Exercice 4. *(X)* Soit p une application continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que pour tout t, $p(t)$ est un projecteur.
Démontrer que le rang de $p(t)$ ne dépend pas de t.

Solution : Si p est continue, $f \ : \ t \mapsto \mathrm{rg}\bigl(p(t)\bigr)$ est continue car elle peut s'écrire $t \mapsto \mathrm{tr}\bigl(p(t)\bigr)$ et la trace, linéaire en dimension finie, est continue. Or f est à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ (c'est un rang) ; comme elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, elle est constante.

Exercice 5. Démontrer qu'il n'existe pas d'application continue injective de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.

Solution : Si f est continue injective de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$, son image est un segment $[\alpha, \beta]$ (un compact comme image continue d'un compact, un connexe par arcs comme image continue d'un connexe par arcs). Soit (a,b) un élément de $[0,1]^2$. f induit une application continue de $[0,1]^2 \setminus \{(a,b)\}$, connexe par arcs (se montre facilement) dans $[\alpha,\beta] \setminus \{f(a,b)\}$ qui doit donc l'être aussi. Il suffit de choisir (a,b) tel que $f(a,b) \notin \{\alpha, \beta\}$ pour arriver à une contradiction.

Exercice 6. Démontrer qu'un cercle et un segment ne peuvent pas être homéomorphes.

Solution : certes, un cercle et un segment sont tous les deux connexes par arcs, mais si on enlève un point à un cercle, il reste connexe par arcs, alors que si on enlève à un segment un point qui n'est pas une extrémité, il ne sera plus connexe par arcs. Si, donc, ϕ est un homéomorphisme de S (segment) sur C

(cercle), soit I le milieu (par exemple) de S, ϕ induirait un homéomorphisme de $S \setminus \{I\}$ sur $C \setminus \{\phi(I)\}$, ce qui n'est pas possible, le premier n'étant pas connexe par arcs alors que le second l'est.

Exercice 7. Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert connexe par arcs de $\mathbf{R}^n$, à valeurs réelles. On suppose que le gradient de f est nul en tout point. Démontrer qu'alors f est constante.

Solution : Le résultat a été vu, dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables, pour un ouvert convexe. Donc, sur toute boule ouverte incluse dans $\mathcal{U}$ (une boule ouverte est convexe), f est constante. Ou, autrement dit, f est localement constante. Soit $a \in \mathcal{U}$; l'ensemble

$$\{x \in \mathcal{U} \ / \ f(x) = f(a)\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{U}$, et n'est pas vide. C'est donc $\mathcal{U}$ tout entier, ce qui conclut.

Exercice 8. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. A l'aide des valeurs propres de u, déterminer l'ensemble des valeurs prises sur $E \setminus \{0_E\}$ par l'application

$$x \mapsto \frac{\big(x|u(x)\big)}{\|x\|^2}$$

Solution : L'application est continue, $E \setminus \{0_E\}$ est connexe par arcs si E est de dimension au moins 2, donc son image est un intervalle. D'autre part on connaît les bornes de cet intervalle (qui est un segment car ces bornes sont atteintes) : ce sont la plus petite et la plus grande valeur propre de u. Si E est de dimension 1, la question est facile, l'application est constante donc le résultat reste vrai.

[Oral ens] Soit f une application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ telle que, pour toute partie A compacte (resp. connexe par arcs), $f(A)$ est compact (resp. connexe par arcs). Montrer que f est continue.

Typiquement un exercice d'oral d'ens. Difficile, mais sur lequel on peut faire des essais, avancer...

Commencer par le cas $q = 1$, voire $p = q = 1$, n'est absolument pas stupide. Il me semble que ce cas n'est pas évident du tout, bien que la connexité par arcs dans $\mathbf{R}$ soit un peu « suspecte » car elle équivaut à la convexité.

En cherchant cet exercice, j'avais en tête un classique qui sert parfois dans des exercices de topologie : si (u_n) est une suite d'éléments d'un evn qui converge vers ℓ, alors $\{u_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact. En dimension finie, c'est intéressant à écrire, on montre que c'est fermé (en montrant que son complémentaire est ouvert) et borné. Ce peut être demandé par l'examinateur. En dimension quelconque (non intéressant ici) c'est plus difficile, mais ça se fait. Facilement avec Borel-Lebesgue (mais Borel-Lebesgue est hors-programme), un peu plus techniquement sans.

J'ai aussi pensé à la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin(1/x)$ avec $f(0) = 0$. Il y a discontinuité en 0. L'image d'un connexe par arcs est toujours un connexe par arcs (pas complètement évident : soit I un intervalle, a-t-on $f(I)$ intervalle aussi ? on distingue les cas $0 \in I$ et $0 \notin I$). Donc sûrement il y a des K compacts tels que $f(K)$ non compact. En écrivant un tel compact, on peut avoir des idées pour la suite.

Soit donc f une application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ qui transforme tout compact en compact et tout connexe par arcs en connexe par arcs. Supposons f non continue en a. Il y a alors un $\epsilon_0 > 0$ et une suite (u_n) tels que (u_n) converge vers a et telle que, pour tout n,

$$\|f(u_n) - f(a)\| \geq \epsilon_0$$

Il y a une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ telle que $\left(f\left(u_{\phi(n)}\right)\right)$ converge. En effet, la partie

$$f\left(\{u_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{a\}\right) = \{f(u_n)\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{f(a)\}$$

est compacte. Définissons $v_n = u_{\phi(n)}$. (v_n) converge vers a, $(f(v_n))$ converge et, pour tout n,

$$\|f(v_n) - f(a)\| \geq \epsilon_0$$

Donc la suite $(f(v_n))$ converge. Ce n'est pas vers $f(a)$. C'est donc vers ℓ. Mais $\ell \in \{f(v_n)\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ (car $\ell \in \{f(v_n)\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{f(a)\}$, un compact étant fermé). Soit $\ell = f(v_{n_0})$. Mais $\ell \in \{f(v_n)\ ;\ n \geq n_0 + 1\} \cup \{f(a)\}$ est compact aussi, donc la suite $(f(v_n))_{n \geq 1+n_0}$ converge vers un certain $f(v_{n_1})$ avec $n_1 > n_0$. Et nécessairement $f(v_{n_0}) = f(v_{n_1})$. On construit ainsi une suite extraite $(v_{\psi(n)})$, que l'on renommera (w_n), ayant des propriétés de plus en plus remarquables : (w_n) converge vers a, $(f(w_n))$ est constante et a une valeur $f(b)$ autre que $f(a)$

(on se rapproche d'une propriété de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$). La fonction $x \longmapsto \|f(x) - f(b)\|$ transforme connexe par arcs en intervalle (composée de f qui a cette propriété par hypothèse par $y \mapsto \|y - f(b)\|$ qui est continue). Il existe donc pour tout $n \geq 1$ $z_n \in [w_n, a]$ tel que $\|f(z_n) - f(b)\| = \dfrac{1}{n}\|f(a) - f(b)\|$. La suite (z_n) converge vers a, donc $\{z_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\} \cup \{a\}$ est compact. Et son image par f n'est pas fermée, puisque $(f(z_n)$ converge vers $f(b)$ qui n'est ni $f(a)$ ni un $f(z_n)$.

Exercice 9 (Oral ens). Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbf{R})$, de $GL_n(\mathbf{C})$.

Pour $\mathbf{R}$, c'est assez difficile. On voit grâce au déterminant qu'il y a au moins deux composantes connexes par arcs. On note

$$GL_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\ ;\ \det(A) > 0\}$$

La décomposition polaire (exercice classique, mais quand même pas si évident !) montre l'existence d'une surjection (bijection, même, mais ce n'est pas important)

$$(Q, S) \longmapsto QS$$

de $\mathcal{SO}(n) \times S_n^{++}(\mathbf{R})$ sur $GL_n^+(\mathbf{R})$. Or un produit de connexes par arcs est connexe par arcs (assez facile), et S_n^{++} est convexe...voir aussi le premier exercice.
On y arrive mieux avec la décomposition QR, étroitement liée à la méthode de Schmidt.
On peut aussi se pencher sur les transvections et les opérations élémentaires sur lignes et colonnes.

Exercice 10 (Oral ens). Soit r, n dans $\mathbf{N}_*$, $f_1, \ldots, f_r$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ formant une famille libre. Quel est le nombre de composantes connexes par arcs de $\mathbf{R}^n \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} f_i$? Même question en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$.

Pour la première question, on voit assez bien le problème, l'examinateur sera ravi de nous voir dessiner un plan en dimension 3, une droite en dimension 2, deux droites en dimension 2, deux plans en dimension 3, etc...On pense que la réponse est 2^r. On considère, pour $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \{-1, 1\}^r$, l'ensemble C_ϵ des x tels que, pour tout k, $\epsilon_k f_k(x) > 0$. C_k est convexe, il est impossible par théorème des valeurs intermédiaires (les f_k sont continues) d'aller d'un C_k à un C_ℓ avec $\ell \neq k$ par un arc. La difficulté, finalement, c'est de voir où intervient le fait que la famille est libre...simplement par la non vacuité de chaque C_k. En effet, il est facile de voir par exemple que trois droites distinctes d'un plan délimitent 6 composantes connexes, pas 8...C'est qu'ici les C_k sont pour certains vides. Dans le cas de l'énoncé, on peut compléter la famille $(f_1, \ldots, f_r)$ en une base de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Puis (exercice vu en dualité) il existe une base de $\mathbf{R}^n$ $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$, on montre facilement avec cette base que les C_k ne sont pas vides.
Pour $\mathbf{C}$, il faut commencer par quelque chose de simple : contrairement à $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. N'en serait-il pas encore ainsi de l'ensemble proposé ? On considère x tel que, pour tout i, $f_i(x) \neq 0$. Et y tel que, pour tout i, $f_i(y) \neq 0$. Essayons de joindre x à y par un segment. On pourrait avoir un problème si

$$f_i(tx + (1-t)y) = 0$$

mais cela signifierait (développer) que $f_i(x)$ et $f_i(y)$ ont même argument. Ce ne serait pas de chance. Si ça arrive, on choisit un z tel que les $f_i(z)$ n'ont aucun argument en commun avec les $f_i(x)$ et les $f_i(y)$. Ce qui est possible en vertu de $f(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}f(z)$.

Exercice 11 (Théorème du relèvement, niveau ens)**.** Soit $f\ :\ I \to \mathbf{R}$ continue, I désignant un intervalle de $\mathbf{R}$. On suppose

$$\forall t \in I \qquad |f(t)| = 1$$

On veut démontrer qu'alors il existe une application $\phi :\ I \to \mathbf{R}$ continue, telle que pour tout t dans I on ait

$$f(t) = \exp\bigl(i\phi(t)\bigr)\ .$$

Une telle application sera appelée « relèvement » de f, et le résultat est appelé théorème du relèvement.
On commence dans le **1.** par des formules qui permettent d'obtenir un relèvement local. Dans les questions **2.** et **3.**, on passe du local au global en supposant que I est un segment, par deux méthodes : connexité puis compacité. Enfin, dans **4.** et **5.**, on en déduit le théorème pour un intervalle quelconque.

1. Montrer que, si $|x + iy| = 1$ et $x \neq -1$ (x, y réels), si on pose

$$\theta(x, y) = 2\,\mathrm{Arctan}\bigl(\frac{y}{1 + x}\bigr)$$

alors $\theta(x, y)$ est l'unique argument de $x + iy$ dans $]-\pi, \pi[$ (argument parfois appelé « principal »). Donner une formule exprimant, si $|x+iy| = 1$ et $x \neq 1$ (x, y réels), l'unique argument $\phi(x, y)$ de $x + iy$ dans $]0, 2\pi[$ (on se ramènera au cas précédent, en évitant de refaire trop de calculs !).

On sait qu'il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$. Il suffit alors de penser aux formules

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$$

et au fait que $\theta/2$, élément de $]-\pi/2, \pi/2[$, est l'arctangente de sa tangente.
Prenons maintenant $x+iy \in \mathbf{U}\setminus\{1\}$, et soit θ l'unique élément de $]0, 2\pi[$ tel que $x + iy = e^{i\theta}$. Alors, multipliant par -1,

$$-x - iy = e^{i(\theta-\pi)}$$

où $-x - iy \neq -1$ et $\theta - \pi \in]-\pi, \pi[$. D'où la formule, déduite du calcul précédent,

$$\theta = \pi + 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x - 1}\right)$$

---

2. On suppose que I est un segment $[\alpha, \beta]$. On désigne par θ_0 un réel tel que tel que $f(\alpha) = \exp(i\theta_0)$. Soit A l'ensemble des réels $a \in I$ tels qu'il existe une application $\phi_a : [\alpha, a] \to \mathbf{R}$ continue, vérifiant $\phi_a(\alpha) = \theta_0$ et, pour tout t dans $[\alpha, a]$:

$$f(t) = \exp(i\phi_a(t)) \ .$$

Démontrer que A est ouverte et fermée dans I, puis démontrer le théorème du relèvement dans ce cas.

Soit $a \in A$. On peut supposer $\beta \neq A$, sinon $A = I$ est évidemment ouvert et fermé dans lui-même. Il existe un $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]a-\eta, a+\eta[\quad f(t) \neq -1$, ou alors il existe un $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]a-\eta, a+\eta[\quad f(t) \neq 1$. On se place par exemple dans le premier cas, cela ne changera rien au raisonnement. On peut noter, si $t \in]a-\eta, a+\eta[$,

$$\psi(t) = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(f(t))}{1 + \mathrm{Re}(f(t))}\right)$$

Alors ψ est un relèvement de f sur $]a-\eta, a+\eta[$. Si ϕ_a est un relèvement de f sur $[\alpha, a]$, $\phi_a - \psi$ est constante sur $]a-\eta, a]$ et égale sur cet intervalle à un multiple de 2π. On peut donc les supposer égales quitte à ajouter un multiple de 2π convenable à ψ. On peut alors raccorder ψ et ϕ_a, on obtient un relèvement sur $[\alpha, b]$ pour n'importe quel $b < a + \eta$ ce qui permet de conclure que A est ouvert dans I.
Soit maintenant une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $\ell \in I$. On considère un relèvement local sur un certain $]\ell-\eta, \ell+\eta[$ de même que dans le raisonnement précédent. Il y a un a_{n_0} dans $]\ell-\eta, \ell+\eta[\in A$, on recolle alors un relèvement sur $[\alpha, a_{n_0}]$ et un relèvement sur $]\ell-\eta, \ell+\eta[$ auquel on a ajouté un nombre convenable de multiples de 2π. On en déduit un relèvement sur $[\alpha, \ell]$ et même un peu plus, ce qui montre bien que A est fermé. Comme $A \neq \emptyset$, on conclut $A = I$.

---

3. On suppose ici aussi que I est un segment : $I = [\alpha, \beta]$. Démontrer que, pour tout t dans I, il existe un voisinage ouvert V_t de t dans I tel que $f(V_t) \subset \mathcal{U} \setminus \{-1\}$ ou $f(V_t) \subset \mathcal{U} \setminus \{1\}$ ($\mathcal{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1). Démontrer alors le théorème du relèvement en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue : si une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ recouvre un compact K (i.e. $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$), on peut en extraire un recouvrement fini : il existe un entier naturel $p \geq 1$ et des éléments $i_1, \ldots, i_p$ de I tels que $K \subset \mathcal{O}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{i_p}$.
4. Soit f continue sur un segment I, à valeurs dans $\mathbf{U}$. Soit ϕ un relèvement de f sur I, et ψ un relèvement de f sur un segment $J \subset I$. Montrer qu'il existe un entier k tel que

$$\forall t \in J \qquad \psi(t) = \phi(t) + 2k\pi$$

5. En déduire le théorème du relèvement pour une fonction f continue sur un intervalle I quelconque (on pourra par exemple utiliser une suite exhaustive, i.e. une suite de segments dont la réunion soit I.)