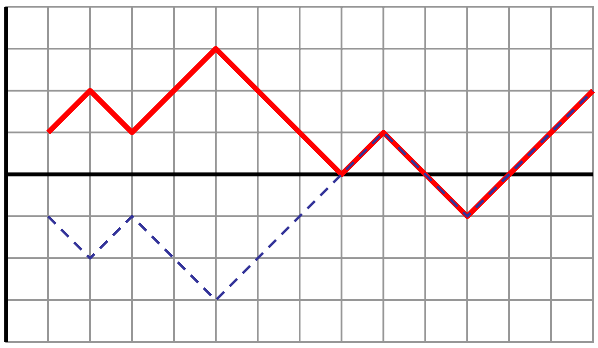
P0 : Dénombrement



Le principe de symétrie, ou principe de réflexion, permet par exemple le dénombrement de certains « chemins » dans le problème du scrutin (problème de Désiré André)

I Ensembles finis, cardinaux

I.1 Une définition

On dit qu'un ensemble X est fini lorsque
X est vide
ou
il existe $n \in \mathbf{N}_*$ tel que X soit en bijection avec $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dans le premier cas, on définit $\mathrm{Card}(X) = 0$. Dans le deuxième cas, n est unique, on définit $\mathrm{Card}(X) = n$.

Les informaticiens préfèreraient sans doute l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$.

I.2 Notations

Les trois notations $\mathrm{Card}(X)$, $|X|$, $\sharp(X)$ sont au programme.

I.3 Quelques propriétés

Proposition Deux ensembles finis ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces deux ensembles (on dit alors qu'ils sont équipotents).

Proposition Une partie Y d'un ensemble fini X est finie et vérifie $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X)$; de plus, si $Y \subset X$,

$$Y = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Card}(Y) = \mathrm{Card}(X)$$

Proposition Si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal, si φ est une application de A dans B, alors

$$\big(\varphi \text{ bijective}\big) \Longleftrightarrow \big(\varphi \text{ injective}\big) \Longleftrightarrow \big(\varphi \text{ surjective}\big)$$

I.4 Quelques cardinaux

Ces cardinaux sont à connaître.

a Produit fini d'ensembles finis

En numérotant $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ par colonne, de bas en haut et de gauche à droite (faire un dessin !), on peut conjecturer que

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,np]\!] \\ & (a,b) & \longmapsto & (a-1)p+b \end{array}$$

est une bijection, et ce n'est pas très difficile à vérifier. On en déduit :

Proposition : Si X et Y sont des ensembles finis, $X \times Y$ l'est aussi, et

$$\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X)\ \mathrm{Card}(Y)$$

Corollaire : Si $X_1, \dots, X_m$ sont des ensembles finis, $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ l'est aussi, et

$$\mathrm{Card}\big(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m\big) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Card}(X_i)$$

b Réunion de deux ensembles finis

Proposition : Si X et Y sont des ensembles finis, $X \cup Y$ l'est aussi, et

$$\mathrm{Card}(X \cup Y) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y) - \mathrm{Card}(X \cap Y)$$

La formule pour une réunion de n ensembles finis, $n \geq 3$, est appelée formule du crible, ou formule de Poincaré, un peu lourde à écrire, hors-programme mais qu'il faut avoir vue. . . voir exercices.

c Réunion d'ensembles finis disjoints

Proposition : Si $X_1, \dots, X_p$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints,

$$\sharp\left(\bigcup_{i=1}^{p} X_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \sharp(X_i)$$

Dénombrer, c'est classer. . . cette formule est donc très utile, on peut même dire qu'on s'en sert tout le temps pour les dénombrements. Par exemple, si on « classe » les parties d'un ensemble à n éléments suivant leur nombre d'éléments, cette formule donne

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

ce qui ne surprend guère quand on est habitué à la formule du binôme. Plus intéressant est de montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$$

en commençant par remarquer que

$$\binom{n}{p}^2 = \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$$

II Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

II.1 Nombre d'applications

Proposition : Si $|X| = n$ et $|Y| = p$, si $\mathscr{A}(X,Y) = \mathscr{F}(X,Y) = Y^X$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y, alors

$$|\mathscr{A}(X,Y)| = p^n$$

Démonstration

On remarque que, notant $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, l'application

$$\varphi \longmapsto \big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\big)$$

est une bijection de $\mathscr{A}(X,Y)$ sur $Y \times Y \times \cdots \times Y = Y^n$. Mais plus que la démonstration, il faut que le résultat soit « évident ». C'est d'ailleurs l'occasion de montrer une démonstration « parfaite », celle qui vient d'être vue, qui établit une bijection entre l'ensemble qu'on cherche à dénombres et un ensemble de cardinal déjà connu, et une démonstration moins satisfaisante mathématiquement mais plus parlante : « il y a p possibilités pour l'image de x_1 ; à chacun de ces choix on peut associer p choix possibles pour l'image de x_2, etc »...

II.2 Nombre de parties d'un ensemble

Proposition : Si $|X| = n$, alors

$$|\mathscr{P}(X)| = 2^n$$

(on désigne par $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X)

Pour relier ce dénombrement au précédent, on utilise une définition importante :

Définition : Soit E un ensemble, A une partie de E; la fonction indicatrice (parfois appelée fonction caractéristique) de A est l'application $\mathbf{1}_A$ de E dans $\{0,1\}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A \end{array} \right.$$

Proposition L'application $A \longmapsto \mathbf{1}_A$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{A}(E,\{0,1\})$

Remarquons que cette dernière proposition est vraie même si E n'est pas un ensemble fini.
Profitons-en pour rappeler l'importance des fonctions indicatrices en probabilités : la fonction indicatrice d'un événement est une variable aléatoire qui suit une loi de

III Listes

Définition Si X est un ensemble, on appelle p-liste d'éléments distincts de X tout p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ d'éléments de X deux à deux distincts.

Dénombrement Si $|X| = n$, il y a $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes d'éléments distincts de X.

Ce qui se montre par exemple par récurrence sur p, en classant les listes suivant la valeur de leur premier terme.

Proposition Soit E un ensemble à p éléments, F un ensemble à n éléments. Le nombre d'applications injectives de E dans F est égal au nombre de p-listes d'éléments de F.

Corollaire : Si $|X| = n$, alors

$$|\mathfrak{S}(X)| = n!$$

(on note $\mathfrak{S}(X)$ l'ensemble des bijections de X sur lui-même, appelées aussi permutations de X).

IV Combinaisons

Définition : Si n et p sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. On a $\binom{0}{0} = 1$.

Formule : Si $0 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Sinon, on a $\binom{n}{p} = 0$

Remarque : Il est maladroit de vouloir, dès qu'il est question des coefficients binomiaux, les remplacer par la formule précédente. D'abord, cette formule n'est vraie que pour certaines valeurs de n et de p, au contraire de la définition par dénombrement. Et beaucoup de propriétés des coefficients binomiaux se montrent par dénombrement (ou par utilisation de la formule du binôme) plutôt qu'en utilisant la formule. On remarquera d'ailleurs qu'il n'est pas si évident a priori que $p!(n-p)!$ divise $n!$.

Propriétés : formules à connaître :

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ (formule du triangle de Pascal)

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

et aussi, pas spécifiquement au programme mais bien utile (si $n \geq 1$ et $p \geq 1$) :

$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Table des matières