P7 (lois de Poisson)

I Exercices ccp 2015

Probabilités 104

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

Probabilités 111

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un mà$^{\text{a}}$me espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

II Autres exercices

Exercice 1. Soit λ un réel strictement positif ; pour $n \geq \lceil \lambda \rceil + 1$, on suppose que la variable aléatoire X_n suit une loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$; on note g_{X_n} la fonction génératrice de X_n.
Montrer que, pour $t \in]0, 1[$, la suite $(g_{X_n}(t))$ converge, déterminer sa limite.

Exercice 2. On fait l'hypothèse que le nombre N de véhicules passant pendant une journée devant une station service suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque véhicule s'arrête à la station indépendamment des autres véhicules, avec une probabilité p. Quelle loi suit le nombre de véhicules s'arrêtant quotidiennement à la station ?

On note Y ce nombre. La loi conditionnelle de Y sachant $(N = n)$ est une loi $B(n, p)$ (si n véhicules passent devant la station, si $X_i = 0$ si le véhicule ne s'arrête pas et $X_i = 1$ si le véhicule s'arrête, $Y = X_1 + \cdots + X_n$).

Par formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k, N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y = k, N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(Y = k) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \lambda^n \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)}
\end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{P}(p\lambda)$.

Exercice 3. Dans Le Livre de William Feller,*An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (accessible via Internet, il est conseillé de lire l'introduction), on parle de loi de Poisson pour décrire le nombre d'anniversaires tombant un jour donné dans une entreprise employant 500 personnes, le nombre de vis défectueuses dans une boîte de 100 (la machine qui fabrique les vis a une « petite » probabilité de produire une vis défectueuses), le nombre de centenaires d'un pays décédant pendant une année, le nombre de coquilles d'impression sur une page d'un livre. Justifier !

Exercice 4. Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, trouver k tel que $\mathbf{P}(X = k)$ soit maximale.