S10 Quelques corrigés

Exercice 1 (**Utilisation des sommations de relations de comparaison pour obtenir des développements asymptotiques).** On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Démontrer que (u_n) converge vers 0.
2. En utilisant le développement du sinus à un ordre convenable au voisinage de 0, établir le développement asymptotique suivant :
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + \underset{n\to\infty}{o}\ (1)$$
En déduire l'équivalent suivant :
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$
3. De manière analogue, démontrer
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{15}$$
Utiliser la sommation des relations de comparaison pour aboutir à
$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n^{3/2}} + \underset{n\to\infty}{o}\ \left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)$$

---

1. On commence par remarquer que le segment $[0, 1]$ est stable par la fonction sin (car $1 \leq \pi$), donc la suite (u_n) est bien définie à valeurs dans $[0, 1]$. L'inégalité classique
$$\forall x \geq 0 \qquad \sin x \leq x$$

(obtenue par étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$, ou par concavité de sin sur $[0, \pi]$, l'inégalité étant évidente au-delà de π) permet alors de dire

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} \geq u_n$$

et la suite (u_n), décroissante et minorée par 0, converge vers une limite ℓ qui vérifie, par continuité de sin,

$$\sin \ell = \ell$$

d'où $\ell = 0$ (l'étude de la fonction $x \mapsto \sin x - x$ montre en effet qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$, donc injective : 0 est le seul point fixe de sin).

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$$

---

2. Et on peut donc écrire

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(u_n^3\right)$$

(on a même un $o\left(u_n^4\right)$, mais ce n'est pas utile comme on le verra dans la suite des calculs). Développons comme indiqué dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-2} &= u_n^{-2}\Big(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\Big)^{-2} \\ &= u_n^{-2}\Big(1 - 2(-\frac{u_n^2}{6}) + o\left(u_n^2\right)\Big) \end{aligned}$$

(on peut utiliser le développement limité de $(1+y)^{-2}$ au voisinage de 0, car u_n^2 a une limite nulle). On obtient bien

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + o(1)}$$

qui peut s'écrire sous forme d'équivalent :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{3}$$

On utilise alors la sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence (on pourrait ici utiliser le théorème de Césaro, mais il est hors-programme) ; on est bien dans le cadre d'application de ce résultat, car $\frac{1}{3}$ est le terme général strictement positif d'une série divergente (grossièrement), ce qui implique qu'à partir d'un certain rang au moins $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} > 0$, c'est d'ailleurs vrai dès le rang 0 par strictes décroissance et positivité de la suite (u_n), mais peu importe, « à partir d'un certain rang » nous suffit. On peut donc écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3}$$

(Dans le cours, on somme de 0 à n, mais ici, on préfère sommer de 0 à $n-1$ pour tomber directement sur le résultat sans avoir à faire un décalage d'indice. Bien évidemment, $S_n \sim \Sigma_n$ ou $S_{n-1} \sim \Sigma_{n-1}$, c'est la même chose) On réécrit cela :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$$

Mais $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{1}{u_n^2}$ (car $\frac{1}{u_n^2} \to +\infty$), et donc

$$\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$$

On peut inverser un équivalent, diviser par n, prendre les racines carrées si les deux membres sont positifs (si on en doute, on revient à la définition d'un équivalent, et on note que l'inverse ou la racine carrée d'une suite qui converge vers 0 converge aussi vers 0) ; on aboutit à

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

3. On pousse le développement un cran plus loin :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-2} &= u_n^{-2}\big(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o\left(u_n^4\right)\big)^{-2} \\
&= u_n^{-2}\big(1 - 2(-\frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120}) + \frac{(-2)\times(-3)}{2}(\frac{u_n^4}{36}) + o\left(u_n^4\right)\big) \\
&= u_n^{-2}\big(1 + \frac{u_n^2}{3} - \frac{u_n^4}{60} + \frac{u_n^4}{12} + o\left(u_n^4\right)\big) \\
&= u_n^{-2} + \frac{1}{3} + \frac{u_n^2}{15} + o\left(u_n^2\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{15}}$$

...et donc, reprenant l'équivalent précédent :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5n}$$

On peut encore ici utiliser la sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence ($\sum 1/n$ diverge, est à termes réels positifs, et donc le premier membre est à termes positifs à partir d'un certain rang). On obtient

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2} - \frac{(n-1)}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5k}$$

et donc, en utilisant l'équivalent connu des sommes partielles de la série harmonique (que l'on peut retrouver par comparaisons sommes-intégrales),

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2} - \frac{(n-1)}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5}\ln(n-1)$$

Mais $\ln(n-1) = \ln n + \ln(1-1/n) \sim \ln n$. Et donc :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2} - \frac{(n-1)}{3} = \frac{1}{5}\ln n + o\left(\ln n\right)$$

ou encore, en éliminant les termes négligeables devant $\ln n$,

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{5}\ln n + o\left(\ln n\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}
u_n &= \Big(\frac{n}{3} + \frac{1}{5}\ln n + o\left(\ln n\right)\Big)^{-1/2} \\
&= \Big(\frac{n}{3}\Big)^{-1/2}\Big(1 + \frac{3}{5}\frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\Big)^{-1/2} \\
&= \sqrt{\frac{3}{n}}\Big(1 - \frac{3}{10}\frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\Big) \\
&\boxed{u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n^{3/2}} + o\Big(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\Big)}
\end{aligned}$$

Aller plus loin pose des problèmes intéressants. . .et pas seulement techniques !

Exercice 2 (Constante d'Euler, formule de Stirling).

1. On définit, pour tout entier naturel non nul n,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \ln n\ .$$
Trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) converge. On appelle γ sa limite.
2. En comparant les restes des séries $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum -\frac{1}{2n^2}$, démontrer que
$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
3. On note
$$v_n = S_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}\ .$$
Trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$, en déduire un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ de S_n. *On pourrait théoriquement continuer, mais alors il est plus rapide d'utiliser une formule dite d'Euler-McLaurin qui approfondit la comparaison série-intégrale.*

4. On note
$$u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$$
et $v_n = \ln u_n$. Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$, et appliquer les méthodes des premières questions. Qu'obtient-on ?

On calcule :
$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{n}\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr)^{-1} - \ln\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr) + \frac{1}{2n}\Bigl(1 - (1+\frac{1}{n}\bigr)^{-1}\Bigr) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\,\bigl(\frac{1}{n^3}\bigr) \\
&= \frac{1}{6n^3} + o\,\bigl(\frac{1}{n^3}\bigr)
\end{aligned}$$
Il n'y a plus qu'à comparer les restes, et à encadrer ceux de $\sum 1/n^3$ par des intégrales qu'on calcule, comme dans la question précédente. On obtient
$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \underset{n\to\infty}{o}\bigl(\frac{1}{n^2}\bigr)$$

Exercice 3 (Oral Mines). Montrer que $\displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\ dt \sim \frac{\exp(x^2)}{2x}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 4 (utilisant l'intégration des relations de comparaison). On définit sur $\mathbf{R}^+$ la fonction
$$f\ :\ x \longmapsto e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$
Trouver un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$; généraliser la méthode utilisée pour obtenir un développement asymptotique de f (on calculera au moins les deux premiers termes non nuls de ce développement).

Exercice 5 (Fonction de Dawson). Soit f l'unique solution de l'équation différentielle

$$y' + 2xy = 1$$

prenant en 0 la valeur 0.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.
2. Donner un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Supposons

$$\forall x \in]-r, r[\qquad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $r > 0$; le rayon de convergence de la série entière est donc supposé $\geq r$. Alors y est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

soit si et seulement si

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

ce qui équivaut à $a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_{n-1}$$

La conditionnelle $y(0) = 0$ donne $a_0 = 0$ et, donc, par récurrence, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $a_{2p} = 0$. On obtient donc une unique suite (a_n) solution, définie par récurrence par

$$a_1 = 1 \quad , \quad \forall p \geq 1 \quad a_{2p+1} = \frac{-2}{2p+1} a_{2p-1} \quad , \quad \forall p \geq 0 \quad a_{2p} = 0$$

qui réciproquement donne bien une série entière de rayon de convergence infini (utiliser par exemple la règle de d'Alembert).

Pour un développement asymptotique, pas besoin de série entière. On résout en multipliant par $\exp(x^2)$. On trouve

$$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$$

L'astuce est alors d'intégrer par parties :

$$\int_0^x \frac{1}{t} t e^{t^2}\mathrm{d}t$$

Mais ça ne marche pas...car on introduit un problème en 0. Qu'à cela ne tienne : on met de côté l'intégrale entre 0 et 1 :

$$\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{t^2}\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t} t e^{t^2}\mathrm{d}t$$

On intègre alors par parties, et on utilise l'intégration des relations o dans le cas de non intégrabilité sur $[1, +\infty[$.

Exercice 6 (Oral Mines). Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. Trouver un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$: intégration par parties et utilisation de l'intégration des o, cas d'intégrabilité.
En détail : si $x > 0$, l'intégration par parties suivante est facile à justifier :

$$f(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$$

(l'idée est d'intégrer par parties pour faire apparaître dans l'intégrale un terme négligeable devant e^{-t}/t).
Mais

$$\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$$

Les hypothèses sont réunies pour utiliser l'intégration des relations de comparaison, cas d'intégrabilité. On obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$$

et donc

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}(f(x))$$

ce qui donne l'équivalent

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$$

Au voisinage de 0 : on coupe en $\int_x^1$ et $\int_1^{+\infty}$. La deuxième est une constante, et va être négligeble devant la première car $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est non intégrale au voisinage de 0 (équivalent et Riemann), donc

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to 0, x > 0]{} +\infty$$

On applique alors l'intégration des $\sim$, cas de non intégrabilité, à

$$\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t}$$

(vérifier que les hypothèses sont bien vérifiées) pour obtenir

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \underset{t \to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

et finalement,

$$f(x) \underset{x \to 0,\ x > 0}{\sim} -\ln x$$

Exercice 7. Trouver un équivalent simple quand $x \to +\infty$, de

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan} t}{t^2} dt$$

(au moins deux méthodes possibles !)

Une méthode laborieuse est l'intégration par parties (on dérive l'arc tangente). Un méthode plus élégante est l'utilisation de l'équivalent

$$\frac{\mathrm{Arctan} t}{t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^2}$$

On est sous les hypothèses de l'intégration des relations de comparaison, cas d'intégrabilité, on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\text{Arctan} t}{t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{\pi}{2t^2} \text{d}t = \frac{\pi}{2x}$$

Exercice 8. Trouver un équivalent simple, quand $x \to 0^+$, de $\displaystyle\int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t} dt$ puis de $\displaystyle\int_x^{2\pi} \frac{\cos t}{t} dt$

On part de l'équivalent

$$\frac{\cos t}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t}$$

On est sous les hypothèses de l'intégration des relations de comparaison, cas de non intégrabilité sur $]0, \pi/2]$ (Riemann), on peut donc écrire

$$\int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t} dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_x^{\pi/2} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln x \underset{x \to 0}{\sim} - \ln x$$

Si l'intégrale va jusqu'à 2π, le même équivalent fonctionne. Certes la fonction n'est pas positive, mais on l'écrit comme l'intégrale précédente (jusqu'à $\pi/2$) avec, en plus, une constante qui est négligeable devant n'importe quel terme tendant vers l'infini.

Exercice 9. Trouver un équivalent, quand $x \to +\infty$, de

$$\int_x^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

On part de

$$\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{2 \ln t}{t^2}$$

On peut alors appliquer l'intégration des relations de comparaison, cas d'intégrabilité (car $\dfrac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{-3/2}\right)$). On obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\int_x^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

Or cette dernière intégrale se calcule assez simplement par parties, on obtient l'équivalent $2\dfrac{\ln x}{x}$

Exercice 10. Trouver un équivalent, quand $x \to +\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$$

Le changement de variable $u = t + x$, $t = u - x$ permet de faire sortir x de l'intégrale, on est ramené à

$$e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}u$$

Puis on fait une intégration par parties, et intégration des o au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11. Trouver un développement asymptotique à deux termes, quand $y \to 0^+$, de

$$\int_0^y \frac{du}{\ln u}$$

L'intégrale ne pose pas de problème d'existence, car la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 (il faut bien sûr supposer $y < 1$). Il faut être ici un peu astucieux. On peut avoir l'idée du changement de variable $t = -\ln u$, $u = e^{-t}$ qui ramène à

$$-\int_{-\ln y}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$$

et on est ramené à un type d'exercice déjà rencontré. Ou alors on fait directement l'intégration par parties, en dérivant $1/\ln u$:

$$\int_a^y \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} = \left[\frac{u}{\ln u}\right]_a^y + \int_a^y \frac{1}{(\ln u)^2}\mathrm{d}u$$

On peut prendre la limite quand $a \to 0$ (pas de croissance comparée à utiliser).

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} = \frac{y}{\ln y} + \int_0^y \frac{1}{(\ln u)^2}\mathrm{d}u$$

On utilise alors l'intégration des relations o, cas d'intégrabilité, les fonctions sont négatives donc ça marche aussi bien qu'avec des fonctions positives.

Exercice 12. On définit une suite u par $u_0 = c > 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Etudier la convergence de la suite (u_n). Trouver un réel strictement positif α tel que la suite de terme général

$$v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$

converge vers un réel non nul ; en déduire un équivalent simple de u_n. Il n'y a plus qu'à recommencer !