c9 : équations différentielles linéaires scalaires

I Exercices ccp 2015

Analyse 31

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Analyse 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont développables en série entière à l'origine ?

Analyse 42

On considère les deux équations suivantes :

$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$

$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

II Autres exercices

Ici, le résutat fondamental est le théorème d'existence et d'unicité (Cauchy-Lipschitz « linéaire ») et ses conséquences sur la structure de l'espace des solutions. Il importe donc de connaître tous ces résultats parfaitement, ils servent très fréquemment.

— En particulier, pour démontrer l'égalité de deux expressions, une technique possible est de montrer qu'elles vérifient une même équation (ou système) différentiel linéaire, et qu'elles coïncident en un point.

— De nombreux énoncés s'intéressent à des équations $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. La difficulté est d'obtenir deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée. On peut parfois chercher une solution développable en série entière, il faut alors rédiger avec précision (en n'oubliant pas le problème du rayon de convergence). Une fois une solution de l'équation homogène connue, lorsqu'elle ne s'annule pas (et même parfois lorsqu'elle s'annule !) on finit par variation de la constante la résolution de l'équation homogène, puis celle de l'équation complète.

— Les théorèmes ne s'appliquent que sur des intervalles sur lesquels le "coefficient de x' " pour une équation scalaire d'ordre 1, ou le "coefficient de x'' " pour une équation scalaire d'ordre 2 ne s'annule pas (ce coefficient est une fonction de la variable). On est parfois amené à faire des recollements de solutions, l'outil le plus souvent utilisé est alors le théorème « limite de la dérivée » ou « classe C^1 par prolongement.

Exercice 1 (*Ancien exercice ccp 8pts*)**.** Résoudre sur l'intervalle $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = 2x$.

Exercice 2 (*Ancien exercice ccp 8pts*)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos x$ en utilisant la méthode de variations des constantes.

Exercice 3. Soit a un nombre réel ou complexe. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Ecrire (avec des intégrales) l'expression de l'unique solution de l'équation

$$y' + ay = f$$

qui prend au point x_0 de I la valeur y_0.

Exercice 4 (**Oral Mines**)**.** Résoudre l'équation $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique solution sur $]-\infty, 1[$, montrer qu'elle est de classe C^∞ et l'étudier.

Exercice 5 (**Oral Centrale**)**.** Résoudre sur $]-\infty, 1[$ l'équation différentielle

$$2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$$

Exercice 6 (**Oral Centrale**)**.** Soit f continue bornée sur $]0, +\infty[$. On considère l'équation différentielle

$$xy' - y + f(x) = 0 \ .$$

1. Démontrer que l'équation admet une unique solution y_0 telle que y_0' ait une limite nulle en $+\infty$.
2. On suppose de plus que f a une limite en $+\infty$. Démontrer que y_0 a une limite en $+\infty$.

Exercice 7 (Oral Centrale). Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $f+f'$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et telle que $f+2f'+f''$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 (Equations de Bernoulli, de Riccati).

1. Soit α un réel différent de 1. On appelle équation de Bernoulli une équation du type
$$y' + p(t)y = q(t)y^\alpha$$
où p et q sont des fonction continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.
   (a) On recherche des solutions à valeurs strictement positives. Diviser l'équation par y^α, et montrer que l'on se ramène à une équation linéaire du premier ordre.
   (b) On se place dorénavant dans le cas où α est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On admet que le théorème d'existence et d'unicité d'une solution prenant en un point donné une valeur donnée s'applique alors aux équations de Bernoulli. On en déduit que si une solution est nulle en un point, elle est nulle partout. En utilisant cette remarque, résoudre les équations suivantes (pour la première, on cherchera des solutions sur $\mathbf{R}_*^+$) :
   $t^2y' + 2ty - y^3 = 0$
   $y' = (r - ky)y \quad (r > 0\ ,\ k > 0)$
   (c'est la loi logistique d'évolution de population. Tracer l'allure des courbes intégrales).
2. On appelle équation de Riccati une équation différentielle du type
$$y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2$$
où a, b, c sont trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.
   (a) Supposons connue une solution y_0 de cette équation. Démontrer que le changement de fonction inconnue $z = y - y_0$ ramène à une équation de Bernoulli.
   (b) Utiliser ce résultat pour résoudre l'équation différentielle
$$(1 - x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$$
   (on cherchera d'abord une solution polynomiale de faible degré).

Exercice 9 (Fonctions de Bessel). On considère l'équation

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

où ν est un réel positif. On résout sur $\mathbf{R}_*^+$.

1. Démontrer qu'elle admet une unique solution de la forme $J_\nu = t^\nu \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ où $a_0 = 1$. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?
2. Dans le cas $\nu = 1/2$, exprimer toutes les solutions de l'équation au moyen des fonctions usuelles.
3. On se place dans le cas $\nu = 0$. On admet (voir exercice suivant) que J_0 a une infinité de racines distinctes sur $\mathbf{R}_*^+$, que l'on peut supposer rangées en une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   Montrer que l'application $\phi_n \ : \ x \longmapsto J_0(\lambda_n x)$ vérifie l'équation différentielle
   $$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_n^2 y = 0$$
   Soit E l'espace engendré par la famille $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Vérifier que l'application
   $$(f,g) \longmapsto \int_0^1 tf(t)g(t)dt$$
   est un produit scalaire sur E.
   Démontrer que l'application
   $$f \longmapsto f'' + \frac{1}{t}f'$$
   est un endomorphisme de E, autoadjoint pour le produit scalaire défini ci-dessus.
   En déduire que, si $i \neq j$,
   $$\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)dx \ = \ 0.$$

On considère l'équation

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

où ν est un réel positif. On résout sur $\mathbf{R}_*^+$.

1. **Démontrer qu'elle admet une unique solution de la forme** $J_\nu = t^\nu \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ où $a_0 = 1$. **Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?**

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R supposé non nul. On définit sur $]0, R[$

$$J_\nu(t) = t^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence, on a, pour tout $t \in]0, R[$,

$$J'_\nu(t) = \nu t^{\nu-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + t^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$J''_\nu(t) = \nu(\nu-1)t^{\nu-2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + 2\nu t^{\nu-1} \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + t^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Et donc J_ν vérifie l'équation de Bessel si et seulement si (en simplifiant directement par t^ν), pour tout $t \in]0, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\nu(\nu-1) + 2n\nu + n(n-1) + \nu + n - \nu^2] a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2} = 0$$

ce qui équivaut à, pour tout $t \in]0, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(2\nu + n) a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n = 0$$

On peut (bien que l'égalité ne soit vérifiée que sur $]0, R[$) utiliser l'unicité du développement en série entière (si $\sum b_n t^n$ a un rayon de convergence R non nul, si sa somme f, qui est C^∞ sur $]-R, R[$, est nulle sur $]0, R[$, toutes ses dérivées sont nulles sur $]0, R[$ et donc, par continuité, en 0, or $n!\ b_n = f^{(n)}(0)$, tous les b_n sont donc nuls). On obtient donc que J_ν vérifie l'équation de Bessel sur $]0, R[$ si et seulement si $a_1 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{-1}{n(2\nu + n)} a_{n-2}$$

(on rappelle que $\nu \geq 0$). Si on rajoute la condition $a_0 = 1$, cela donne une solution unique, mais il reste à vérifier que la suite (a_n) obtenue donne une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence non nul.

On constate que cette série entière est de la forme

$$\sum_{p \geq 0} a_{2p} t^{2p}$$

avec, pour tout p, $a_{2p} \neq 0$ (récurrence) ; si $x \neq 0$, $u_p = |a_{2p} x^{2p}|$ est toujours > 0, ce qui permet de calculer

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{t^2}{(2p+2)(2p+2+2\nu)}$$

qui converge vers 0, ce qui montre, par la règle de d'Alembert, que la série $\sum u_p$ converge toujours ; le rayon de convergence est donc $+\infty$, on a bien trouvé une solution sur $\mathbf{R}_*^+$.

2. **Dans le cas $\nu = 1/2$, exprimer toutes les solutions de l'équation au moyen des fonctions usuelles.**

La relation de récurrence devient

$$\forall p \geq 1 \qquad a_{2p} = \frac{-1}{2p(2p+1)} a_{2p-2}$$

Et donc, avec $a_0 = 1$, $a_2 = \dfrac{-1}{2 \times 3}$, $a_4 = \dfrac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$ et, par récurrence,

$$\forall p \geq 0 \qquad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

On obtient

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

Sur un intervalle I ne contenant pas de multiple de π, cherchons une autre solution de l'équation de départ sous la forme

$$\phi(t) = \lambda(t) J_{1/2}(t) = \lambda(t) t^{-1/2} \sin t$$

(λ est une fonction inconnue, au moins deux fois dérivable). On calcule

$$\phi'(t) = \lambda'(t) J_{1/2}(t) + \lambda(t) J'_{1/2}(t)$$

$$\phi''(t) = \lambda''(t) J_{1/2}(t) + 2\lambda'(t) J'_{1/2}(t) + \lambda(t) J''_{1/2}(t)$$

ϕ vérifie l'équation de Bessel pour $\nu = 1/2$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$t^2 \left(\lambda''(t) J_{1/2}(t) + 2\lambda'(t) J'_{1/2}(t) \right) + t\lambda'(t) J_{1/2}(t) = 0$$

ou encore si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\sqrt{t} \sin t \lambda''(t) + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + 2t \left(\sin t \times \frac{-1}{2} t^{-3/2} + \cos t \times t^{-1/2} \right) \right) \lambda'(t) = 0$$

ce qui, une fois simplifié, donne

$$\sin t \ \lambda''(t) + 2 \cos t \ \lambda'(t) = 0$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 en λ', on multiplie par l'exponentielle d'une primitive de $2 \sin t \ / \cos t$, après avoir préalablement divisé par $\sin t$. Ce qui revient finalement à multiplier par $\sin t$, pour obtenir

$$\forall t \in I \qquad \sin^2 t \ \lambda'(t) = C$$

Reste à primitiver $1/\sin^2 t$; sans revenir aux règles de Bioche, on se souvient de la dérivée de la tangente : $1/\cos^2 t$. On décide donc de dériver la cotangente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right) = \frac{-1}{\sin^2 t}$$

On aboutit au fait que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$ est une autre solution de l'équation. Elle est assez clairement indépendante de la précédente ; les solutions de l'équation de Bessel dans ce cas $\nu = 1/2$ sont donc les

$$t \mapsto \frac{\alpha \cos t \; + \; \beta \sin t}{\sqrt{t}}$$

3. **On se place dans le cas $\nu = 0$. On admet (voir exercice suivant) que J_0 a une infinité de racines distinctes sur $\mathbf{R}_*^+$, que l'on peut supposer rangées en une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**
   Montrer que l'application $\phi_n \;:\; x \longmapsto J_0(\lambda_n x)$ vérifie l'équation différentielle
   $$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_n^2 y = 0$$
   Soit E l'espace engendré par la famille $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Vérifier que l'application
   $$(f,g) \longmapsto \int_0^1 tf(t)g(t)dt$$
   est un produit scalaire sur E.
   Démontrer que l'application
   $$f \longmapsto f'' + \frac{1}{t}f'$$
   est un endomorphisme de E, autoadjoint pour le produit scalaire défini ci-dessus.
   En déduire que, si $i \neq j$,
   $$\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)dx \;=\; 0.$$

J_0 vérifie l'équation
$$tx'' + x' + tx = 0$$
Comme $\phi_n'(x) = \lambda_n J_0'(\lambda_n x)$ et $\phi_n''(x) = \lambda_n^2 J_0''(\lambda_n x)$, de
$$\forall x > 0 \quad \lambda_n \; x \; J_0''(\lambda_n x) \; + J_0'(\lambda_n x) \; + \; \lambda_n \; x \; J_0(\lambda_n x) = 0$$
on déduit, en multipliant par λ_n et en divisant par x, l'équation voulue.

Les propriétés d'un produit scalaire sont bien facilement vérifiées, une fois que l'on aura dit que les fonctions de E sont développables en série entière sur $\mathbf{R}_*^+$, donc que leur nullité sur $]0,1[$ implique leur nullité sur $\mathbf{R}_*^+$.

L'équation différentielle vérifiée par chaque ϕ_n montre que l'image d'un élément de E (une combinaison linéaire des ϕ_n) par l'application
$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 tf(t)g(t)dt$$
est encore un élément de E. Cette application étant clairement linéaire, elle est bien un endomorphisme de E. Mais de plus, si f et g sont dans

E,

$$\int_0^1 t\left(f''(t)+\frac{1}{t}f'(t)\right)g(t)dt = \int_0^1 \left(tf''(t)+f'(t)\right)g(t)dt$$
$$= \left[tf'(t)g(t)\right]_0^1 - \int_0^1 tf'(t)g'(t)dt$$

Le crochet étant nul (tous les éléments de E sont nuls en 1), on obtient bien

$$\int_0^1 t\left(f''(t)+\frac{1}{t}f'(t)\right)g(t)dt = \int_0^1 t\left(g''(t)+\frac{1}{t}g'(t)\right)f(t)dt$$

qui est bien la propriété pour l'endomorphisme proposé d'être autoadjoint. Et les ϕ_k sont vecteurs propres de cet endomorphisme, associés à des valeurs propres disjointes, donc orthogonaux. On remarquera qu'on abuse un petit peu du programme, en sortant du cadre de la dimension finie, mais ici cela n'est pas gênant.

Exercice 10 (Théorèmes de Sturm). On considère les deux équations différentielles

$$x''+f(t)x=0 \quad (E) \qquad \text{et} \qquad x''+g(t)x=0 \quad (E')$$

où f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, vérifiant $f>g$ sur I.
Soient ϕ et ψ des solutions respectives de (E) et (E') sur I (ψ n'étant pas la solution nulle).

1. Démontrer que deux solutions linéairement indépendantes de (E) ne peuvent pas avoir de zéro commun.
2. Démontrer que les zéros de ψ sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro de ψ a un voisinage sur lequel il est l'unique zéro de ψ.
3. Démontrer qu'entre deux zéros consécutifs de ψ sur I il y a au moins un zéro de ϕ (on pourra étudier les variations de la fonction $\phi'\psi-\psi'\phi$).
4. En effectuant le changement de fonction inconnue $y(t)=\sqrt{t}x(t)$ dans l'équation de Bessel ci-dessus, et en comparant l'équation obtenue à l'équation $y''+y=0$, obtenir des informations sur les zéros de la fonction J_ν.

On considère les deux équations différentielles

$$x'' + f(t)x = 0 \quad (E) \qquad \text{et} \qquad x'' + g(t)x = 0 \quad (E')$$

où f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, vérifiant $f > g$ sur I.
Soient ϕ et ψ des solutions respectives de (E) et (E') sur I (ψ n'étant pas la solution nulle).

1. **Démontrer que deux solutions linéairement indépendantes de (E) ne peuvent pas avoir de zéro commun.**

Evidemment, si on pense au wronskien, ça va très vite...Mais on peut quand même y arriver si on n'y pense pas : supposons que ϕ_1 et ϕ_2 aient un zéro commun : t_0. Si $\phi_1'(t_0) = 0 (= \phi_1(t_0))$, par théorème d'unicité $\phi_1 = \widetilde{0}$, incompatible avec l'indépendance linéaire. Sinon,

$$\phi_2 - \frac{\phi_2'(t_0)}{\phi_1'(t_0)}\phi_1$$

est nulle ainsi que sa dérivée en t_0, or elle est solution de (E), donc par unicité c'est la solution $\widetilde{0}$. Ce qui une fois encore contredit l'indépendance de ϕ_1 et ϕ_2.

Encore une autre méthode : si ϕ_1 et ϕ_2 s'annulent en t_0, toute combinaison linéaire de ϕ_1 et ϕ_2 s'annule en t_0. Or (ϕ_1, ϕ_2) est supposé être une base de l'espace des solutions de (E). Donc toute solution de (E) s'annule en t_0, ce qui est en contradiction avec le théorème d'existence.

2. **Démontrer que les zéros de ψ sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro de ψ a un voisinage sur lequel il est l'unique zéro de ψ.**

Soit a un zéro de ψ. S'il n'est pas isolé, il existe une suite (t_n) de zéros de ψ, différents de a, qui converge vers a (en effet, pour tout $n \geq 1$, l'intervalle $[a - 1/n, a + 1/n]$ contient au moins un zéro de ψ autre que a). Alors, comme

$$\frac{\psi(t_n) - \psi(a)}{t_n - a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \psi'(a)$$

on obtient $\psi'(a) = 0$, en contradiction (théorème d'unicité) avec $\psi \neq \widetilde{0}$.

Autre méthode (qui présente l'inconvénient de ne pas se généraliser immédiatement au cas de fonctions à valeurs complexes) : par unicité, $\psi'(a) > 0$ ou $\psi'(a) < 0$. Par continuité de ψ', on a donc $\psi' > 0$ ou $\psi' < 0$ sur un intervalle $[a - \eta, a + \eta]$ pour un certain $\eta > 0$. Donc ψ est strictement monotone au voisinage de a, donc injective au voisinage de a.

On peut néanmoins étendre cela au cas de fonctions à valeurs complexes (sans rapport avec l'exercice présent), en considérant la partie réelle ou la partie imaginaire.

Autre méthode : utiliser le théorème de Rolle et une preuve par l'absurde. Encore réservé au cas réel.

3. **Démontrer qu'entre deux zéros consécutifs de ψ sur I il y a au moins un zéro de ϕ (on pourra étudier les variations de la fonction** $\phi'\psi - \psi'\phi$).

Soit $h = \phi'\psi - \psi'\phi$ (ce n'est pas vraiment un wronskien : ϕ et ψ ne sont pas solutions de la même équation). Alors $h' = (g - f)\phi\psi$. On considère deux zéros consécutifs $a < b$ de ψ. On suppose que ϕ ne s'annule pas sur $]a, b[$. Par théorème des valeurs intermédiaires, ψ et ϕ gardent chacune un même signe strict sur $]a, b[$. On peut supposer que ce signe est strictement positif (quitte à remplacer ϕ par $-\phi$ et/ou ψ par $-\psi$, elles sont solutions des mêmes équations et ça ne change pas les annulations).
h est alors strictement décroissante sur $]a, b[$. Mais

$$h(a) = -\psi'(a)\ \phi(a) \leq 0$$

et

$$h(b) = -\psi'(b)\ \phi(b) \geq 0$$

(pour étudier le signe de $\psi'(a)$ et $\psi'(b)$, les écrire comme limites de taux d'accroissement). On aboutit à une contradiction.

4. **En effectuant le changement de fonction inconnue $y(t) = \sqrt{t}x(t)$ dans l'équation de Bessel ci-dessus, et en comparant l'équation obtenue à l'équation $y'' + y = 0$, obtenir des informations sur les zéros de la fonction J_ν.**

$x(t) = t^{-1/2}y(t)$, $x'(t) = \dfrac{-1}{2}t^{-3/2}y(t) + t^{-1/2}y'(t)$,
$x''(t) = \dfrac{3}{4}t^{-5/2}y(t) - t^{-3/2}y'(t) + t^{-1/2}y''(t)$.
Reportant dans l'équation de Bessel, on obtient :

$$t^2\left(\frac{3}{4}t^{-5/2}y - t^{-3/2}y' + t^{-1/2}y''\right)+t\left(\frac{-1}{2}t^{-3/2}y + t^{-1/2}y'\right)+(t^2-\nu^2)t^{-1/2}y = 0$$

ou encore

$$t^{3/2}y'' + \left(\frac{3}{4}t^{-1/2} - \frac{1}{2}t^{-1/2} + (t^2 - \nu^2)t^{-1/2}\right)y = 0$$

ou encore

$$y'' + \left(\frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2} + 1\right)y = 0$$

Supposons $0 \leq \nu < 1/2$. On appelle (E) l'équation ci-dessus, (E') l'équation $y'' + y = 0$. Entre deux zéros consécutifs d'une solution quelconque de (E') (i.e. d'une fonction $x \mapsto A\cos(t + \phi)$) il y a une solution de J_ν. Deux zéros consécutifs de J_ν sont donc espacés d'au plus π. Si $\nu > 1/2$, on intervertit les rôles des deux équations. Deux zéros consécutifs de J_ν sont donc espacés d'au moins π.

Exercice 11 (Oral Centrale). Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

puis résoudre cette équation.
Retrouver le résultat à l'aide du changement de variable $y = x^r z$.

Exercice 12 (Oral Centrale). Même question que l'exercice précédent, avec

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0 \ .$$

Exercice 13 (Oral Centrale). Soit f une solution de l'équation

$$x'' + 3x' + 2x = u$$

où u est une fonction continue ayant en $+\infty$ pour limite ℓ. (ℓ est un réel non nul). Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 (Oral X, Centrale). Montrer que l'équation (E) $xy''+y'+xy = 0$ admet des solutions développables en série entière que l'on explicitera.
Montrer que $g \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t) \ dt$ est solution de (E). Montrer qu'elle est développable en série entière : on explicitera ses coefficients.
Si $f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est somme de série entière, montrer que l'équation

$$xy'' + y' + xy = f$$

possède sur $\mathbf{R}$ des solutions sommes de séries entières.

Exercice 15 (Oral Mines). Soit f une fonction réelle, définie sur $\mathbf{R}$, indéfiniment dérivable. Montrer qu'il existe une fonction réelle g, définie sur $\mathbf{R}$ et continue, telle que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 g(x)$$

Puis résoudre sur $\mathbf{R}$: $xy' - y = f(x)$.

Exercice 16 (Oral X). Soit g continue sur $\mathbf{R}$. Résoudre $t^2x'' + tx' - x = g$.

Exercice 17 (Lemme de Gronwall). Soit k une fonction continue positive sur $\mathbf{R}^+$, f une fonction continue sur $\mathbf{R}^+$ telle que, pour tout t positif :

$$f(t) \leq a + \int_0^t k(u)f(u)du$$

On veut démontrer qu'alors, pour tout réel positif t :

$$f(t) \leq a \exp\Bigl(\int_0^t k(u)du\Bigr)$$

Pour cela, on pose

$$g \ : \ t \longmapsto a + \int_0^t k(u)f(u)\mathrm{d}u$$

1. Montrer que g vérifie l'« inéquation différentielle »

$$\forall t \geq 0 \qquad g'(t) \leq k(t)\ g(t)$$

2. On réécrit l'inéquation précédente sous la forme d'une équation

$$g'(t) = k(t)g(t) + u(t)$$

   où $u \leq 0$. Résoudre

$$y' = k(t)y + u(t)$$

   et conclure.

---

1. ne pose pas de difficulté. Pour **2.**, les solutions de l'équation homogène

$$y' = k(t)y$$

sont les $t \mapsto C \exp\left(\int_0^t k(s)\mathrm{d}s\right)$, on cherche une solution par la variation de la constante. On trouve les solutions :

$$y \ : \ t \mapsto \exp\left(\int_0^t k(s)\mathrm{d}s\right)\left(C + \int_0^t u(s)\exp\left(-\int_0^s k(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\right)$$

Mais g est donc de cette forme, avec $g(0) = a$, ce qui donne $C = a$, et $u \leq 0$, ce qui donne

$$g(t) \leq a \exp\Bigl(\int_0^t k(u)du\Bigr)$$

Or $f \leq g$, on conclut donc.

Exercice 18 (**Oral Centrale**). Résoudre $y'' + y = \sin t$ et $y'' + y = |\sin t|$. Comparer les solutions.

Exercice 19 (**Oral Centrale**). Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Montrer que toutes les solutions de $y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$ sont de classe C^2. Les exprimer.

L'équation homogène ne pose guère de problème. On peut alors envisager une méthode de variation des constantes, mais il y a plus court. Si on trouve une solution de

$$y'' + y = e^{int}$$

et qu'on en prend la partie réelle, ça ira. Mais in est-il solution de l'équation caractéristique ? c'est le cas si et seulement si $n = \pm 1$. On supposera $n \in \mathbf{N}$, donc d'abord, dans le cas $n \neq 1$, on peut chercher une solution sous la forme $t \mapsto ke^{int}$. On trouve $k = \dfrac{1}{1-n^2}$. Dans le cas $n = 1$, i est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $t \mapsto kte^{it}$. Qui vérifie l'équation si et seulement si, pour tout t,

$$2ik - kt + kt = 1$$

ce qui donne $k = -i/2$. On trouve donc la solution particulière $t \mapsto -i\dfrac{t}{2}te^{it}$, dont la partie réelle est $t \mapsto \dfrac{t}{2}\sin t$. Finalement les solutions de l'équation de départ sont les

$$t \longmapsto \alpha\cos t + \beta\sin t + \frac{1}{1-n^2}\cos(nt) \qquad ((\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2)$$

si $n \neq 1$, et les

$$t \longmapsto \alpha\cos t + \beta\sin t + \frac{t}{2}\sin t \qquad ((\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2)$$

si $n = 1$. Il est alors naturel de se demander si, par hasard, la fonction

$$t \longmapsto a_0 + a_1\frac{t}{2}\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$$

ne serait pas solution de l'équation différentielle proposée. Ce qui correspondrait à une sorte de principe de superposition généralisé. Or ça marche facilement si on peut dériver terme à terme sous le signe $\sum$. Ce qui se fait bien avec le théorème sur les séries de fonctions de classe C^2, car si $\phi_n \ : \ t \mapsto \dfrac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$, $\sum \phi_n''$ est normalement convergente, donc uniformément. Evidemment $\sum \phi_n$ et $\sum \phi_n'$

convergent elles aussi normalement, la convergence simple suffirait. On a une solution C^2 de l'équation différentielle, comme on les obtient toutes en ajoutant $\alpha\cos+\beta\sin$ on conclut.

Exercice 20. Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. En résolvant l'équation

$$y''+y=g(x)$$

par la méthode de variation de la constante, déterminer une fonction k telle que les solutions soient de la forme $x\mapsto\displaystyle\int_0^x k(x-u)g(u)du+\alpha\cos x+\beta\sin x$. Montrer alors que, si g est à valeurs réelles positives, alors pour toute solution y et tout réel x :

$$y(x)+y(x+\pi)\geq 0$$

On cherche une solution sous la forme

$$x\longmapsto\alpha(x)\ \cos x\ +\ \beta(x)\sin x$$

avec la condition additionnelle

$$\cos\alpha'+\sin\beta'=0$$

On aboutit à $k=\sin$.

Exercice 21 (Oral ens). Soit $q\ :\ \mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ continue, positive, périodique et non nulle. Montrer que, si ϕ est une solution de $y''+qy=0$, l'ensemble des zéros de ϕ n'est ni majoré ni minoré ; montrer que si ψ est une solution de la même équation non proportionnelle à ϕ, les zéros de ψ séparent ceux de ϕ.

Exercice 22 (Oral Centrale). Soit $q\ :\ \mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ continue, positive. Montrer que, si ϕ est une solution de $y''-qy=0$, ϕ s'annule au plus une fois.
Désormais, $q(t)=e^t$. Montrer que les solutions de l'équation sont dévelop-pables en série entière. Donner les allures des solutions vérifiant $f(0)=0$ $f'(0)=1$ et $g(0)=1$ $g'(0)=0$.

On commence par dessiner, et par voir qu'il s'agit d'un problème de convexité. Si le graphe d'une solution franchit l'axe des abscisses, la convexité l'empêche de franchir de nouveau cet axe. Reste à mettre cela en forme.

Première méthode

Supposons $\phi(t_0) = 0$; comme ϕ n'est pas la solution nulle, le théorème d'unicité donne $\phi(t_0) \neq 0$. Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, on peut supposer $\phi'(t_0) > 0$.

(*raisonnement classique : ϕ est solution si et seulement si $-\phi$ est solution, car l'équation est homogène. Et ϕ s'annule aux mêmes points que $-\phi$*).

L'idée est maintenant de supposer que ϕ ne peut plus franchir l'axe des abscisses. On va voir à cette occasion un type de raisonnement classique, applicable dans d'autres contextes. Le principe est de considérer le premier instant après t_0 où ϕ s'annule. Mais il faut (avec un peu de topologie) montrer que ce « premier instant après t_0 » est bien défini.

Soit $A = \{t > t_0 \ ; \ \phi(t) = 0\}$. Supposons $A \neq \emptyset$. Alors A, non vide et minoré par t_0, a une borne inférieure t_1.

Il faut montrer que $t_1 \in A$, i.e. que t_1 est un plus petit élément, pas seulement une borne inférieure. Et il faut aussi montrer que $t_1 \neq t_0$. On va tout faire à la fois, en utilisant le fait que toute racine de ϕ est isolée. Tout ce qui suit, sans être difficile, demande un peu de technique...et un peu de topologie.

Il existe $\eta > 0$ tel que

$$|t - t_0| \leq \eta \ \Rightarrow \ |\phi'(t) - \phi'(t_0)| \leq \frac{1}{2}\phi'(t_0)$$

et donc

$$|t - t_0| \leq \eta \ \Rightarrow \ \phi'(t) \geq \frac{1}{2}\phi'(t_0) > 0$$

On peut admettre une rédaction du type « par continuité, si $\phi'(t_0) > 0$, ϕ' est strictement positive au voisinage de t_0 ».

On peut donc alors écrire

$$A = \{t \geq t_0 + \eta \ ; \ \phi(t) = 0\}$$

Et donc $A = [t_0 + \eta, +\infty[\cap \phi^{-1}(\{0\})$; A est donc fermé comme intersection de fermés. Et donc $t_1 \in A$, d'une part (la borne inférieure d'un ensemble est dans son adhérence), $t_1 \geq t_0 + \eta$, d'autre part.

Sur $]t_0, t_1[$, ϕ ne s'annule pas, donc garde un signe constant (théorème des valeurs intermédiaires). Comme ϕ croît sur $[t_0, t_0 + \eta]$, ce signe est positif. Donc $\phi'' = q\phi$ est positif sur $[t_0, t_1]$. Donc ϕ', croissante sur $[t_0, t_1]$ et positive en t_0, est positive sur $t_0, t_1]$. Et donc ϕ croît sur $[t_0, t_1]$. Nulle en t_0 et en t_1, il faudrait qu'elle soit constamment nulle sur $[t_0, t_1]$, ce qui est contradictoire.

Un tableau de variations aurait rendu cette dernière partie un peu plus claire.

On peut dire qu'on fait « de même » à gauche de t_0. Mais, plus élégamment, la fonction $\psi \ : \ t \mapsto \phi(-t)$ est solution de l'équation $y'' - q(-t)y = 0$, et $t \mapsto q(-t)$

est positive, donc le raisonnement précédent montre que ψ ne s'annule pas à droite de $-t_0$.

Deuxième méthode
On peut aussi, supposant $\phi'(t_0) > 0$, considérer

$$B = \{t \geq t_0 \ ; \ \forall u \in [t_0, t] \ \phi(u) \geq 0\}$$

et montrer que B n'est pas majorée, ce qui donne la conclusion. Pour cela, on raisonne par l'absurde, on suppose que B est majorée, alors, comme $B \neq \emptyset$, B a une borne supérieure m, et $m > t_0$ (car il existe $\delta > 0$ tel que $\phi' > 0$ sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$). Par continuité et définition de la borne supérieure, on obtient $\phi \geq 0$ sur $[0, \alpha]$. Donc ϕ convexe sur $[0, \alpha]$, donc (courbe au-dessus de sa tangente)

$$\phi(\alpha) \geq (\alpha - t_0)\phi'(t_0) > 0$$

et donc, par continuité, il existe $\eta > 0$ tel que $\phi \geq 0$ sur $[t_0, \alpha + \eta]$ ce qui contredit la définition de α.

Troisième méthode
On peut montrer que ϕ' garde un signe constant strict sur $[t_0, +\infty[$ en montrant qu'elle ne peut pas s'annuler. Si elle s'annule, on considère

$$C = \{t \geq t_0 \ ; \ \phi'(t) = 0\} = [t_0, +\infty[\cap (\phi')^{-1}(\{0\})$$

On voit que C est fermé, si il est non vide, comme il est minoré, il a une borne inférieure qui est aussi un minimum...et si γ est cette borne inférieure, on a $\phi'(\alpha) = 0$, $\alpha > t_0$, $\phi' > 0$ sur $[t_0, \alpha[$. On arrive à une contradiction encore par considération de la convexité de ϕ sur $[0, \alpha]$...

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Par théorème, sa somme est C^∞ sur $]-R, R[$, et est solution de l'équation sur $]-R, R[$ si et seulement si (on utiliser aussi le produit de Cauchy de séries entières)

$$\forall t \in]-R, R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} \right) x^n$$

ce qui équivaut, par unicité du développement en série entière, à

$$\forall n \geq 0 \qquad a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}$$

On utilise alors une **technique classique** pour montrer que réciproquement le rayon de convergence des séries entières ainsi obtenues est $+\infty$: on cherche à établir une inégalité du type $\forall n \geq 0 \quad |a_n \rho^n| \leq M$, avec $\rho > 0$, ce qui impliquera que le rayon de convergence est $\geq \rho$. Ou, notant $\alpha = 1/\rho$, on cherche à obtenir

$$\forall n \geq 0 \quad |a_n| \leq M\alpha^n$$

avec la question : à quelle condition cette inégalité est-elle « récurrente » ? La majoration (si $\alpha > 0$)

$$\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{(n-k)!}\right| \leq \alpha^{n+2}e^{1/\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\alpha^2}\right)$$

montre que pour tout α l'inégalité est récurrente au moins à partir d'un certain rang n_0. On fixe alors M de telle manière qu'elle soit vraie jusqu'à n_0. Et on conclut que le rayon de convergence est $+\infty$, pour toutes les suites, et on a un plan vectoriel de solutions, donc on les a toutes.

Exercice 23 (Oral X). Montrer qu'une solution non nulle de

$$y'' + e^t y = 0$$

a une infinité dénombrable de zéros.

On va montrer que l'ensemble des zéros n'est pas majoré, ce qui implique évidemment qu'il est infini. Supposons donc qu'il existe A tel que

$$x \geq A \ \Rightarrow \phi(x) \neq 0$$

où ϕ est une solution de $y'' + e^t y = 0$. Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'écrire

$$\forall x \geq A \qquad \phi(x) > 0$$

et par conséquent

$$\forall x \geq A \qquad \phi''(x) = -e^t\phi(x) < 0$$

ϕ' décroît donc. Si ϕ' reste positive, ϕ croît, donc $\phi''(t) \leq -\phi(A)e^t$, d'où, en intégrant, $\phi'(t) - \phi'(A) \leq -\phi(A)(e^t - e^A)$, d'où $\lim\limits_{+\infty} \phi' = -\infty$, contradiction. Donc il existe B tel que $\phi'(B) < 0$. Et donc, si $t \geq B$, $\phi'(t) \leq \phi'(B)$. Et donc, si $t \geq B$, $\phi(t) - \phi(B) \leq \phi'(B)(t - B)$. Donc $\lim\limits_{+\infty} \phi = -\infty$, nouvelle contradiction. Pourquoi une infinité dénombrable ? on montre (fait dans d'autres exercices) que tout zéro de ϕ est isolé. Ce qui permet de définir, si t_0 est un zéro, t_1 comme le « zéro suivant » (voir méthode dans l'exercice précédent) et, par récurrence, t_{n+1} comme le « zéro suivant » t_n. On définit ainsi une suite (il y a toujours un « zéro suivant », la suite des zéros n'étant pas majorée) (t_n) strictement croissante de zéros consécutifs. Cette suite tend vers $+\infty$ (sinon elle aurait une limite ℓ, qui serait par continuité un zéro non isolé). Et tout zéro supérieur à t_0 fait partie des éléments de cette suite (si u est un zéro, il existe n tel que $u \in [t_n, t_{n+1}[$, et $u \in]t_n, t_{n+1}[$ est impossible). On ordonne de même les éventuels zéros précédant t_0 en une suite finie ou dénombrable, ce qui conclut.

Exercice 24 (Oral X). Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions de classe C^n sur $\mathbf{R}$ telles que $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$. Si $x_0 \in \mathbf{R}$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que tout élément non nul de $\mathcal{E}$ s'annule au plus $n-1$ fois sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

On peut regarder le cas $n = 2$ pour se donner des idées. Les théorèmes s'appliquent à l'équation différentielle

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Bien sûr, on peut trouver une base de solutions qui ne s'annulent pas trop sur un certain $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, mais ça n'empêchera pas des combinaisons linéaires de ces fonctions de s'annuler. On va procéder par l'absurde. Supposons, pour tout k, une fonction y_k solution de l'équation et s'annulant au moins 2 fois sur $]x_0 - 1/k, x_0 + 1/k[$. On munit l'espace des solutions de n'importe quelle norme, elles sont toutes équivalentes (on est en dimension finie). On peut supposer les y_k unitaires, en les divisant par leur norme. On est en dimension finie, on extrait alors une suite $(y_{\phi(k)})$ qui converge vers une solution z. On prend pour norme $N(y) = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$, les normes ∞ étant prises par exemple sur un certain segment $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$. Si α_k est un zéro de $y_{\phi(k)}$ dans $]x_0 - 1/\phi(k), x_0 + 1/\phi(k)[$, à partir d'un certain rang on a

$$|y_{\phi(k)}(\alpha_k) - z(\alpha_k)| \leq N(y_{\phi(k)} - z)$$

On obtient alors (prendre la limite) $z(x_0) = 0$. Avec le théorème de Rolle, on fait la même chose pour z', et on arrive à une contradiction. Pour n, ce n'est pas trop différent.

Exercice 25 (Résolvante). On considère dans cet exercice un système linéaire homogène

$$x' = A(t)x \qquad (H)$$

où $t \mapsto A(t)$ est une application continue de $\mathbf{R}$ sur l'espace des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Pour tout élément x_0 de $\mathbf{K}^n$ (ou, pour être rigoureux, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$), on note $\phi(t, t_0, x_0)$ la valeur en t de l'unique solution de (H) qui prend en t_0 la valeur x_0.

1. Démontrer qu'il existe, pour tous réels t et t_0, une unique matrice $\Phi(t, t_0)$ de $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout élément x de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$,

$$\phi(t, t_0, x) = \Phi(t, t_0)x$$

L'idée est de montrer que $x \mapsto \phi(t, t_0, x)$ est, à t et à t_0 fixés, linéaire. Et bijective (pour cela, après la linéarité, l'injectivité suffit).

---

2. Lorsque A est constante, que vaut $\Phi(t, t_0)$?
3. Démontrer que, pour tous réels s, t, u :

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, u)\Phi(u, s)$$

   Quelle est la matrice inverse de $\Phi(t, s)$?
4. Démontrer que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, s) = A(t)\Phi(t, s)$$

   Calculer également $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}(t, s)$.
5. Démontrer, pour tous réels t et t_0 :

$$\Phi(t, t_0) = I_n \ + \int_{t_0}^{t} A(s)\Phi(s, t_0)ds$$

6. Soit $\phi_1, \ldots, \phi_n$ un système fondamental de solutions de (H). On note $M(t)$ la matrice dont $(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ est la famille des vecteurs colonnes. Ecrire $\Phi(t, s)$ en fonction de $M(t)$ et $M(s)$.
7. En utilisant par exemple une méthode de variation de la constante, écrire sous forme intégrale à l'aide de Φ la solution de

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{E}$$

   qui prend en t_0 la valeur x_0.
8. Démontrer que si, pour tout réel t, $|||A(t)||| \leq K$, alors, pour tout réel t :

$$||\phi(t, t_0, x_0)|| \leq e^{K|t-t_0|}||x_0||$$

   (utiliser le lemme de Gronwall).