P7 : Loi de Poisson

I Une modélisation probabiliste

Un centre d'assistance téléphonique est susceptible d'être appelé par m clients. On souhaite modéliser par une loi de probabilité le nombre N d'appels que ce centre reçoit pendant un intervalle de temps donné T (par exemple, $T = 1$ heure).
On appelle X_i $(1 \leq i \leq m)$ le nombre d'appels du client i pendant cet intervalle de temps. On suppose que $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ (pour que cette hypothèse soit acceptable, il ne faut pas que T soit trop grand : X_i ne doit pas prendre de valeur ≥ 2).
On suppose que les X_i sont indépendantes (autre hypothèse plus ou moins acceptable suivant les cas).
Comme

$$N = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

on sait que

$$N \sim \mathscr{B}(m, p)$$

Et donc

$$\mathrm{E}(N) = mp$$

On suppose connaître cette espérance : on sait qu'il y a en moyenne λ appels pendant un intervalle de temps T. Autrement dit

$$\mathrm{E}(N) = \lambda$$

En conclusion, il est plausible de dire

$$N \sim \mathscr{B}\left(m, \frac{\lambda}{m}\right)$$

avec m « grand ». Ce qui signifie, pour tout $n \in [\![0, m]\!]$,

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \\ &= \binom{m}{n} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-n} \end{aligned}$$

Fixons n, et examinons le comportement asymptotique de cette expression quand $m \to +\infty$:

$$\binom{m}{n} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \left(\frac{\frac{\lambda}{m}}{1 - \frac{\lambda}{m}}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^m$$

$$\underset{m\to+\infty}{\sim}$$

Ceci ne prouve pas qu'il soit légitime de remplacer $P(N = n)$ par cet équivalent quand $m \to +\infty$. Mais des tests numériques montrent que si m est suffisamment grand l'approximation est plutôt bonne. Et, surtout, on obtient une nouvelle loi de probabilité bien plus commode que la loi binomiale pour modéliser ce genre de situation.

II Loi de Poisson

II.1 Définition

Soit λ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ lorsque

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

On note

$$X \sim \mathscr{P}(\lambda)$$

II.2 Espérance, variance

Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors X a des moments de tous ordres ; et on calcule :

$$\mathrm{E}(X) =$$

$$\mathrm{V}(X) =$$

II.3 Fonction génératrice

La fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathscr{P}(\lambda)$ se calcule facilement :

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad g_X(z) =$$

III Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Proposition Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que

(i) Pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$

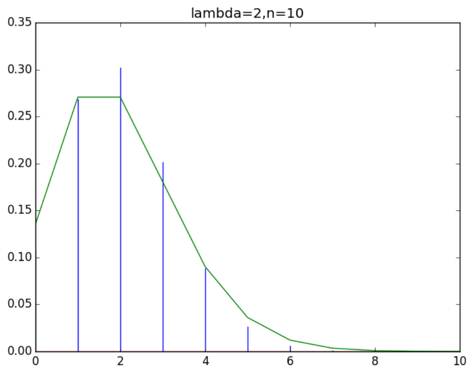
(ii) $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$

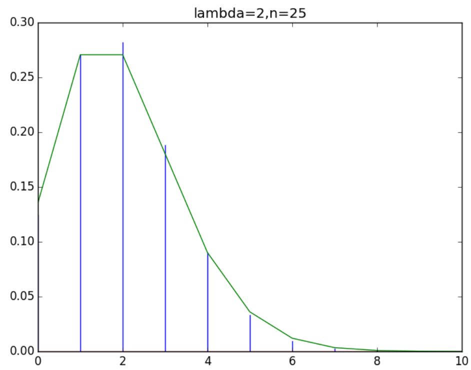
Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

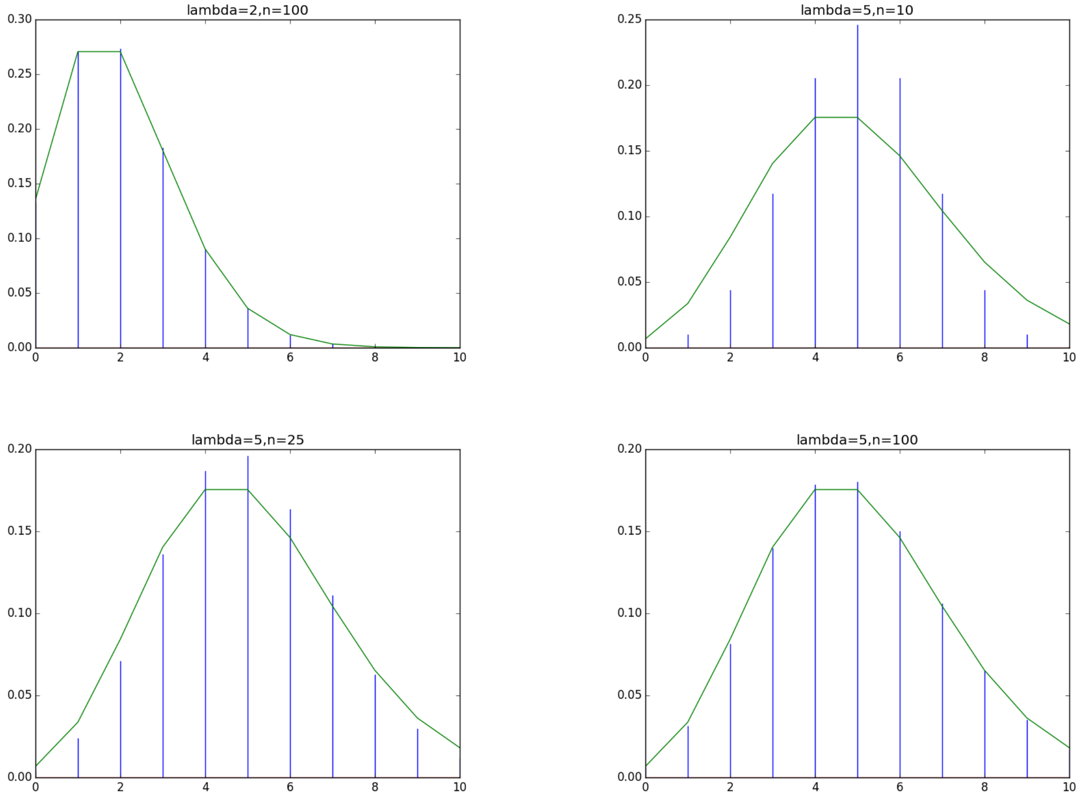
$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

III.1 Qualité de l'approximation : quelques illustrations

Comparaison graphique de quelques lois $\mathscr{P}(\lambda)$ (graphe en lignes polygonales) et $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ (diagrammes en bâtons).






lambda=2,n=100
lambda=5,n=10
lambda=5,n=25
lambda=5,n=100

III.2 Quelques nombres

Comparaison de quelques lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$:

$N \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{B}\left(10, \dfrac{\lambda}{10}\right)$, $Y \sim \mathscr{B}\left(25, \dfrac{\lambda}{25}\right)$, $Z \sim \mathscr{B}\left(100, \dfrac{\lambda}{100}\right)$

Pour $\lambda = 2,1$:

k	P(N=k)	P(X=k)	P(Y=k)	P(Z=k)
0	0,122456	0,094683	0,111529	0,119748
1	0,257158	0,251688	0,255688	0,256866
2	0,270016	0,301070	0,281369	0,272739
3	0,189011	0,213417	0,197818	0,191112
4	0,099231	0,099279	0,099773	0,099412
5	0,041677	0,031669	0,038428	0,040943
6	0,014587	0,007015	0,011746	0,013905
7	0,004376	0,001066	0,002924	0,004005
8	0,001149	0,000106	0,000603	0,000999
9	0,000268	0,000006	0,000104	0,000219
10	0,000056	0,000000	0,000015	0,000043

Pour $\lambda = 5,1$:

k	P(N=k)	P(X=k)	P(Y=k)	P(Z=k)
0	0,006097	0,000798	0,003333	0,005329
1	0,031093	0,008305	0,021354	0,028637
2	0,079288	0,038897	0,065672	0,076179
3	0,134790	0,107960	0,129034	0,133734
4	0,171857	0,196642	0,181880	0,174285
5	0,175294	0,245602	0,195773	0,179831
6	0,149000	0,213022	0,167243	0,153017
7	0,108557	0,126695	0,116338	0,110427
8	0,069205	0,049450	0,067084	0,068988
9	0,039216	0,011437	0,032475	0,037898
10	0,020000	0,001190	0,013316	0,018534
11	0,009273	0,000000	0,004654	0,008149
12	0,003941	0,000000	0,001391	0,003248
13	0,001546	0,000000	0,000357	0,001182
14	0,000563	0,000000	0,000078	0,000395
15	0,000191	0,000000	0,000015	0,000122