S10 : Compléments sur les séries numériques et l'intégration

I Sommation des relations de comparaison

I.1 Cas de convergence (résultats sur les restes)

Proposition Soit (z_n) une suite de nombres complexes, (b_n) une suite de nombres **réels positifs**.

1. On suppose que $z_n = O(b_n)$, et que $\sum b_n$ converge. Alors $\sum z_n$ converge (absolument). Et, si on note $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} z_p$ et $\rho_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} b_p$, on a
$$r_n = O(\rho_n)$$
2. On suppose que $z_n = \mathrm{o}(b_n)$, et que $\sum b_n$ converge. Alors $\sum z_n$ converge (absolument). Et, avec les mêmes notations que précédemment,
$$r_n = \mathrm{o}(\rho_n)$$

Proposition Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $a_n \sim b_n$, et que $\sum b_n$ converge. Alors $\sum a_n$ converge.

Et, notant $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p$ et $\rho_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} b_p$, on a
$$r_n \sim \rho_n$$

Démonstrations :

1. (avec O) On sait déjà que, par comparaison à une série à termes réels positifs, $\sum z_n$ converge absolument.

Il existe n_0 et M tels que

$$\forall n \geq n_0 \qquad |z_n| \leq M b_n$$

Alors, si $n \geq n_0 - 1$, on a par inégalité trinagulaire :

$$\forall p \geq n+1 \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{p} z_k\right| \leq M \sum_{k=n+1}^{p} b_k$$

et donc, prenant les limites quand $p \to +\infty$,

$$|r_n| \leq M\rho_n$$

On conclut bien que $r_n = O(\rho_n)$.

2. (avec o) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \qquad |z_n| \leq \epsilon b_n$$

On a alors, avec les mêmes calculs que ci-dessus,

$$\forall n \geq n_0 \qquad |r_n| \leq \epsilon \rho_n$$

ce qui conclut...

3. (avec ∼) On a $a_n - b_n = \mathrm{o}(b_n)$, donc $|a_n - b_n| = o(b_n)$. On en déduit, par le **2.**,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\rho_n)$$

et donc a fortiori

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - b_k) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\rho_n)$$

d'où $r_n - \rho_n = \mathrm{o}(\rho_n)$ ce qui signifie bien que $r_n \sim \rho_n$.

I.2 Cas de divergence (résultat sur les sommes partielles)

Proposition Soit (z_n) une suite de nombres complexes, (b_n) une suite de nombres **réels positifs**.

1. On suppose que $z_n = O\,(b_n)$, et que $\sum b_n$ diverge. Alors, si on note $s_n = \sum_{p=0}^{n} z_p$ et $\sigma_n = \sum_{p=0}^{n} b_p$, on a
$$s_n = O\,(\sigma_n)$$
2. On suppose que $z_n = \mathrm{o}(b_n)$, et que $\sum b_n$ diverge. Alors, si on note $s_n = \sum_{p=0}^{n} z_p$ et $\sigma_n = \sum_{p=0}^{n} b_p$, on a
$$s_n = \mathrm{o}(\sigma_n)$$

Proposition : Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs. On note $s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$, $\sigma_n = \sum_{p=0}^{n} b_p$. On suppose que $a_n \sim b_n$, et que $\sum b_n$ diverge. Alors $s_n \sim \sigma_n$

Démonstrations

On remarque que dans la première proposition, on ne peut pas dire si $\sum z_n$ converge ou diverge. Mais si $\sum z_n$ converge, le résultat est peu intéressant. Dans la deuxième proposition, en revanche, on a nécessairement divergence de $\sum a_n$.

1. (avec O) Soit n_0 et M tels que
$$\forall n \geq n_0 \qquad |z_n| \leq M b_n$$
Si on suppose $n \geq n_0$, on a donc
$$\begin{aligned}
|s_n| &= |s_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} z_k| \\
&\leq |s_{n_0-1}| + M \sum_{k=n_0}^{n} b_k \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&= |s_{n_0-1}| + M(\sigma_n - \sigma_{n_0-1}) \\
&= M\sigma_n + |s_{n_0-1}| - M\sigma_{n_0-1}
\end{aligned}$$

et il faut alors remarquer, pour conclure, que l'hypothèse implique

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Et donc il existe n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1 \qquad s_{n_0-1} - M\sigma_{n_0-1} \leq \sigma_n$$

ce qui permet d'écrire

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1) \qquad s_n \leq (M+1)\sigma_n$$

et donc de conclure.

2. Soit $\epsilon > 0$; il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \qquad |z_n| \leq \frac{\epsilon}{2} b_n$$

On reprend le calcul ci-dessus, on montre alors de manière tout-à-fait analogue qu'il existe un rang n_1 tel que

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1) \qquad |s_n| \leq (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2})\sigma_n$$

ce qui conclut.

3. On passe par $a_n - b_n = \mathrm{o}(b_n)$, donc $|a_n - b_n| = \mathrm{o}(b_n)$, etc...

I.3 Remarque sur le théorème de Césaro

1. Soit (u_n) une suite à termes réels positifs qui converge vers une limite ℓ. On suppose $\ell > 0$. On peut alors écrire $u_n \sim \ell$. Quel résultat peut-on appliquer sur les sommations de relations de comparaison ? qu'en déduit-on sur la suite (v_n) définie par
$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \quad ?$$
2. Soit (u_n) une suite à termes réels positifs qui converge vers 0. On peut alors écrire $u_n = \mathrm{o}(1)$. Quel résultat peut-on appliquer sur les sommations de relations de comparaison ? qu'en déduit-on sur la suite (v_n) définie par
$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \quad ?$$

3. Soit (u_n) une suite à termes dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, convergeant vers ℓ. Utiliser le résultat précédent pour montrer que la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ.

II Intégration des relations de comparaison : cas particulier

On fera attention à bien remarquer l'analogie avec les résultats sur les séries, de manière à mémoriser ces résultats facilement. Ce cas particulier (intégrales posant problème en $+\infty$) est celui qui est rencontré le plus fréquemment.

II.1 Cas d'intégrabilité

Proposition Soit f, ϕ continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ ($a \in \mathbf{R}$) ; on suppose f à valeurs complexes, et ϕ à valeurs **réelles positives**, intégrable sur $[a,+\infty[$. Alors

1. si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\int_x^{+\infty}\phi(t)dt\right)$.
2. si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\int_x^{+\infty}\phi(t)dt\right)$.
3. On suppose ici f à valeurs réelles positives ; si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \phi(x)$, alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty}\phi(t)dt$.

Remarquons que les trois hypothèses impliquent bien l'intégrabilité de f par comparaison à une fonction (ϕ) positive intégrable.

Démonstration : Montrons le **2.**, pas plus difficile que le **1.** :
Soit $\epsilon > 0$. Il existe, et on fixe, $A > a$ tel que

$$\forall t \geq A \qquad |f(t)| \leq \epsilon\phi(t)$$

Soit $x \geq A$; on a

$$\forall y \geq x \qquad \left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t \leq \epsilon\int_x^y \phi(t)\mathrm{d}t$$

Comme f et ϕ sont intégrables, on peut prendre les limites quand $y \to +\infty$ et obtenir

$$\left|\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \epsilon\int_x^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t$$

On a donc montré

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbf{R} \qquad x \geq A \Longrightarrow \left|\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \epsilon\int_x^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t$$

ce qui exprime bien que $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty}\phi(t)dt\right)$.
Le **2.** implique le **3.** par l'écriture

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x) \iff g(x)-h(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(h(x))$$

II.2 Cas de non intégrabilité

Proposition Soit f, ϕ continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ ($a\in\mathbf{R}$) ; on suppose f à valeurs complexes, et ϕ à valeurs **réelles positives**, non intégrable sur $[a,+\infty[$. Alors

1. si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\phi(x)\right)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\int_a^x \phi(t)dt\right)$.
2. si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\phi(x)\right)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x \phi(t)dt\right)$.
3. On suppose ici f à valeurs réelles positives ; si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \phi(x)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^x \phi(t)dt$.

Remarquons que la troisième hypothèse implique la non intégrabilité de f par comparaison à une fonction (ϕ) positive non intégrable. Sous les deux premières hypothèses, on ne peut rien dire, mais si f est intégrable le résultat est peu intéressant.

Démonstration : Montrons encore le **2.**, c'est le plus technique :
Soit $\epsilon>0$. Il existe, et on fixe, $A>a$ tel que

$$\forall t\geq A \qquad |f(t)|\leq \frac{\epsilon}{2}\phi(t)$$

Soit $x\geq A$; on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_a^A |f(t)|\mathrm{d}t + \int_A^x |f(t)|\mathrm{d}t\\ &\leq \int_a^A |f(t)|\mathrm{d}t + \frac{\epsilon}{2}\int_A^x \phi(t)\mathrm{d}t\\ &\leq k+\frac{\epsilon}{2}\int_a^x\phi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où k est une constante, $k=\displaystyle\int_a^A|f(t)|\mathrm{d}t-\frac{\epsilon}{2}\int_a^A\phi(t)\mathrm{d}t$. Mais comme ϕ est positive et non intégrable, on a

$$\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc il existe B tel que

$$\forall x \geq B \qquad k \leq \frac{\epsilon}{2}\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t$$

et par conséquent

$$\forall x \geq \max(A,B) \qquad \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \epsilon\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t$$

ce qui conclut bien.

III Intégration des relations de comparaison (résultats généraux)

Si on a bien compris le résultat précédent, on doit pouvoir trouver assez naturel ce qui suit : en quelque sorte, on remplace $+\infty$ par n'importe quel réel ou $-\infty$.

III.1 Cas d'intégrabilité (intégrales absolument convergentes)

Proposition Soit f, ϕ continues par morceaux sur $]a,b[$; $a<b$, $a\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$; on suppose ϕ à valeurs réelles positives, intégrable sur $]a,b[$, et f à valeurs réelles ou complexes, intégrable sur $]a,b[$.

1. si $f(x) = \underset{x\to b}{O}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)dt = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b \phi(t)dt\right)$.
2. si $f(x) = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)dt = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_x^b \phi(t)dt\right)$.
3. si f est à valeurs réelles positives et si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} \phi(x)$, alors $\displaystyle\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b \phi(t)dt$.

Mais aussi bien :

1. si $f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \underset{x\to a}{O}\left(\int_a^x \phi(t)dt\right)$.
2. si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x \phi(t)dt\right)$.
3. si f est à valeurs réelles positives et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \phi(x)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \underset{x\to a}{\sim} \int_a^x \phi(t)dt$.

III.2 Cas de non intégrabilité

Proposition On suppose f et ϕ continues par morceaux sur $[a,b[$ $a<b$, $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, ϕ à valeurs réelles positives, ϕ non intégrable sur $[a,b[$ (attention ! ici, c'est en b qu'est le problème, pas en a). Alors :

1. si $f(x)=\underset{x\to b}{O}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=\underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x \phi(t)dt\right)$.
2. si $f(x)=\underset{x\to b}{\mathrm{o}}\big(\phi(x)\big)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=\underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x \phi(t)dt\right)$.
3. si f est à valeurs réelles positives et si $f(x)\underset{x\to b}{\sim}\phi(x)$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)dt\underset{x\to b}{\sim}\int_a^x \phi(t)dt$.

Proposition bis On suppose f et ϕ continues par morceaux sur $]a,b]$ $a<b$, $a\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbf{R}$, ϕ à valeurs réelles positives, ϕ non intégrable sur $]a,b]$. Alors on a des résultats analogues en remplaçant $\int_a^x$ au voisinage de b par $\int_x^b$ au voisinage de a.

Table des matières