T8 : Connexité par arcs dans les espaces vectoriels normés

I Une relation d'équivalence

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Si $(a,b) \in A^2$, on appelle « chemin continu » joignant a à b dans A toute application

$$\phi : [0,1] \mapsto E$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :
• ϕ est continue
• $\forall t \in [0,1] \quad \phi(t) \in A$
• $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$

On définit sur A une relation binaire $\mathscr{R}$:

Définition Soit $(a,b) \in A^2$. On dit que $a\mathscr{R}b$ lorsqu'il existe un chemin continu joignant a à b dans A.

Proposition $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

II Composantes connexes par arcs, connexité par arcs

Définition Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. On appelle composantes connexes par arcs de A les classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ définie précédemment. On dit que A est connexe par arcs lorsqu'il y a une unique composante connexe par arcs : A.

Rappel Les composantes connexes par arcs de A forment une partition de A.

Exemples Une partie convexe, une partie étoilée d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs.

On dit que la partie $\mathscr{A}$ est étoilée lorsqu'il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que

$$\forall M \in \mathscr{A} \quad [AM] \subset \mathscr{A}$$

III Parties de R connexes par arcs

Proposition Les parties de **R** connexes par arcs sont les intervalles

Démonstration Deux ingrédients : le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que les intervalles sont les parties convexes de **R**.

Dans **R**, donc, « connexe par arcs », « convexe » ou « intervalle », c'est la même chose.

Dans **R**, *la connexité par arcs équivaut donc à la convexité. Il n'est pas difficile de se convaincre que ce n'est pas du tout vrai, par exemple, dans* $\mathbf{R}^2$.

IV Image d'une partie connexe par arcs par une application continue

Proposition Soit E, F deux espaces vectoriels normés. Si

$$\phi\ :\ A \subset E \to F$$

est continue et si A est connexe par arcs, alors $\phi(A)$ est connexe par arcs.

Rappel

Si $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F$ est continue, l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert « relatif » de A (i.e. l'intersection avec A d'un ouvert de E).

Si $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F$ est continue, l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé « relatif » de A (i.e. l'intersection avec A d'un fermé de E).

Si $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F$ est continue et si A est compact, alors $f(A)$ est compact.

Corollaire Si ϕ est une application continue, définie sur une partie A connexe par arcs, et à valeurs réelles, alors $\phi(A)$ est un intervalle. Autrement dit, ϕ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : s'il existe $a \in A$ tel que $\phi(a) = \alpha$ et $b \in A$ tel que $\phi(b) = \beta$, alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe $c \in A$ tel que $\phi(c) = \gamma$.

Remarque Si pour résoudre une question on a envie d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, mais si on a une application (continue) qui n'est pas définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$, on peut penser à se demander si l'application ne serait pas, par hasard, définie sur une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé.

V Ouverts et fermés dans un connexe par arcs (supplément h.p.)

Proposition, hp Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. Les seuls ouverts et fermés relatifs de A (i.e. les seules parties à la fois ouvertes et fermées pour la topologie induite sur A) sont $\emptyset$ et A.

Corollaire Une application continue localement constante sur une partie connexe par arcs est constante.

Démonstration de la proposition : Soit B une partie ouverte et fermée relative de A. Supposons $B \neq \emptyset$, montrons $B = A$. On fixe un élément $a \in B$. Soit $b \in A$ quelconque, il s'agit donc de montrer que $b \in B$.
Soit $\phi : [0,1] \to A$ continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. Définissons

$$D = \{t \in [0,1] \; ; \; \phi(t) \in B\} = \phi^{-1}(B)$$

Comme B est ouvert et fermé relatif A, D est ouvert et fermé relatif dans $[0,1]$ (*Explication : par définition de la topologie induite,* $B = \Omega \cap A$ *où* Ω *est ouvert. Comme* ϕ *est à valeurs dans* A, $\phi^{-1}(B) = \phi^{-1}(\Omega)$ *est ouvert dans* $[0,1]$*. Idem pour « fermé »*).
Comme $D \neq \emptyset$ $(0 \in D)$, D admet une borne supérieure d. Fermé (relatif) d'un fermé, D est fermé, donc $d \in D$.

Comme D est ouvert (relatif) dans $[0,1]$, D est voisinage (relatif) de chacun de ses points dans $[0,1]$, il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$]d-\eta, d+\eta[\cap[0,1] \subset D$$

ce qui contredit la définition de d sauf si $d = 1$. Donc $1 \in D$, donc $b \in B$, et conclut la démonstration.

Autre possibilité : La fonction caractéristique χ de B est définie sur A et à valeurs dans $\mathbf{R}$, et si L est une partie de $\mathbf{R}$, $\chi^{-1}(L)$ ne peut être que l'une des parties suivantes : $\emptyset$, A, B, $A \setminus B$, toutes ouvertes et fermées dans A. Donc l'image réciproque par χ de tout ouvert est un ouvert. Donc χ est continue (*et c'est là le problème : ceci est la réciproque hors-programme d'un résultat du programme ! Pas très difficile à montrer, cela dit. Et c'est même la définition de la continuité, quand on travaille en topologie générale.*). Donc $\chi(A)$ est connexe par arcs. Les deux seules parties de $\{0,1\}$ connexes par arcs sont $\{0\}$ et $\{1\}$, on en déduit que $\chi(A) = \{1\}$ (et alors $B = A$) ou $\chi(A) = \{0\}$ (et alors $B = \emptyset$).

VI Un résultat sur les fonctions de plusieurs variables

Théorème On désigne par E, F, deux espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Soit $f : \mathcal{U} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^1. Si $\mathcal{U}$ est connexe par arcs, alors f est constante sur $\mathcal{U}$ si et seulement si sa différentielle est nulle sur $\mathcal{U}$ (ce qui équivaut à dire que toutes ses dérivées partielles sont nulles sur $\mathcal{U}$, ou, si $F = \mathbf{R}$, que son gradient est nul sur $\mathcal{U}$).

Démonstration Si une application est constante, sa différentielle est nulle. C'est la réciproque qui est intéressante.
Supposons, donc, la différentielle de f nulle sur $\mathcal{U}$.
Sur toute boule ouverte $B(x,r)$ $(r > 0)$ incluse dans $\mathcal{U}$, f est constante, car une boule ouverte est convexe et on a déjà résolu le problème pour les ouverts convexes (C12, p30).
Donc, si $a \in \mathcal{U}$, $\{b\ ;\ f(b) = f(a)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{U}$. Ce qui précède conclut donc.

Table des matières