Ag4 : Nombres complexes

```
                                                     *
                                                   ****
                                                  ******
                                                   *****
                                              * *********
                                         *** ****************
                                           ******************** **
                                        *************************
                                       ****************************
                                     *******************************
                                     ******************************
                        * *****     ********************************
                       ***********  ********************************
                      ************* *******************************
                  ** ************** ******************************
****************************************************************
                  ** ************** ******************************
                      ************* *******************************
                       ***********  ********************************
                        * *****     ********************************
                                     ******************************
                                     *******************************
                                       ****************************
                                        *************************
                                           ******************** **
                                         *** ****************
                                              * *********
                                                   *****
                                                  ******
                                                   ****
                                                     *
```

Les nombres complexes ont longtemps été considérés comme un artifice suspect mais utile pour la résolution des équations algébriques. Le moins que l'on puisse dire est que les choses ont évolué…La fonction ζ de Riemann, au centre d'une des conjectures mathématiques les plus célèbres actuellement (la plus célèbre ?), est une fonction d'une variable complexe. Et le décoratif ensemble (dit de Mandelbrot) des nombres complexes c tels que la suite récurrente

$$z_0 = 0 \qquad et \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

ne tende pas vers l'infini est probablement encore plus célèbre. La première représentation obtenue par Robert Brooks et Peter Matelski en 1978, en faisant tourner une machine assez longtemps, montre que les ordinateurs ont progressé…

I Généralités

I.1 Structure

C est l'ensemble $\mathbf{R}^2$ que l'on munit d'une addition :

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

et d'une multiplication :

$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

qui lui confèrent une structure de **corps commutatif** dont **R** est un sous-corps, à condition d'identifier tout réel x au couple $(x,0)$.
C est un **R**-espace vectoriel de dimension 2 (une base en est, par exemple, la base dite canonique $\big((1,0),(0,1)\big)$. C'est aussi une **R-algèbre**.
C est aussi un **C**-espace vectoriel de dimension 1.

Les nombres réels sont des nombres complexes très particuliers. Il faut donc être attentif à ne pas confondre « complexe » et « non réel ».

I.2 Notation

Tout nombre complexe s'écrit de manière unique

$$(a,b)=a.(1,0)+b.(0,1)=a+bi$$

où a et b sont deux réels, appelés parties réelle et imaginaire du nombre complexe. On désigne par i (comme imaginaire) le nombre complexe $(0,1)$.
On retrouve le fait que **C** est un **R**-espace vectoriel de dimension 2.
◊ Il est maladroit, lorsque l'on travaille avec des nombres complexes, d'utiliser systématiquement la forme partie réelle - partie imaginaire. Pour résumer, un nombre complexe, c'est en général z, parfois $\rho e^{i\theta}$, rarement $a+ib$.

I.3 Conjugaison

L'application qui à un nombre complexe z associe le nombre complexe

$$\overline{z}=\mathrm{Re}(z)-i\ \mathrm{Im}(z)$$

est la **conjugaison**. Les propriétés

1. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
2. $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$ si λ est réel
3. $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
4. $\overline{1} = 1$

font de la conjugaison une application **R**-linéaire (c'est-à-dire linéaire, le corps de base étant **R**), mais aussi un morphisme d'anneaux, c'est-à-dire un morphisme pour les lois + et × qui transforme 1 en 1.
La conjugaison est involutive (c'est-à-dire, en la notant σ, $\sigma\circ\sigma = \mathrm{Id}$, ou encore le conjugué du conjugué est le nombre de départ) donc bijective, c'est un automorphisme du corps **C**.
Remarque : En algèbre linéaire, les involutions linéaires sont des symétries. Or ici, si on considère **C** comme **R**-espace vectoriel, la conjugaison est bien une involution linéaire. C'est donc une symétrie, parallèlement à quoi, par rapport à quoi ? c'est assez évident géométriquement.

I.4 Module, inégalité triangulaire

Le module de z est $|z| = \sqrt{(\Re z)^2+(\Im z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. On vérifie que

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

et, surtout,

$$|z+z'| \leq |z|+|z'|$$

Cette dernière inégalité, dite inégalité triangulaire, est très importante.

Proposition : Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $z = 0$ ou il existe un réel positif α tel que $z' = \alpha z$.

Autrement dit, l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si : $z = 0$ ou $z' = 0$ ou z et z' ont même argument.
Encore autrement dit, l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si les points d'affixes z et z' sont situés dans le plan complexe sur une même demi-droite d'origine O (O étant le point d'affixe 0).
On dit parfois que z et z' sont positivement liés.

Ce résultat se généralise à plus de deux complexes : si $z_1,\dots,z_n$ sont n complexes, alors $|z_1+\dots+z_n| \leq |z_1|+\dots+|z_n|$; si les complexes sont tous non nuls, il y a égalité si et seulement s'ils ont tous même argument (ou encore, ce qui est équivalent, si et seulement si leurs images sont sur une même demi-droite d'origine 0). C'est intéressant à montrer à partir du cas de deux complexes.
De l'inégalité triangulaire découle une autre inégalité très utile :

$$\big||z|-|z'|\big| \leq |z \pm z'|$$

II Nombres complexes de module 1

II.1 Structure

L'ensemble **U** des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication, est un groupe. On l'appelle parfois « cercle trigonométrique ».

II.2 Morphisme fondamental

$$\theta \longmapsto e^{i\theta}$$

est un morphisme surjectif du groupe $\big(\mathbf{R},+\big)$ sur le groupe $\big(\mathbf{U},\times\big)$, de noyau $2\pi\mathbf{Z}$, ce qui signifie que

$\forall(\theta,\theta')\in\mathbf{R}^2 \qquad e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\ e^{i\theta'}$
et
$e^{i\theta}=1 \iff \exists k\in\mathbf{Z}\quad \theta=2k\pi$

II.3 Formules d'Euler et de De Moivre

Formules d'Euler :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad,\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\ .$$

Formule de De Moivre :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\ .$$

Une utilisation courante de cette dernière est la définition des polynômes de Tchebychev :

Proposition Pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

Démonstration de l'existence :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\right. \end{aligned}$$

Démonstration de l'unicité :

On peut aussi démontrer l'existence des polynômes T_n par récurrence, avec un petit peu de trigonométrie.

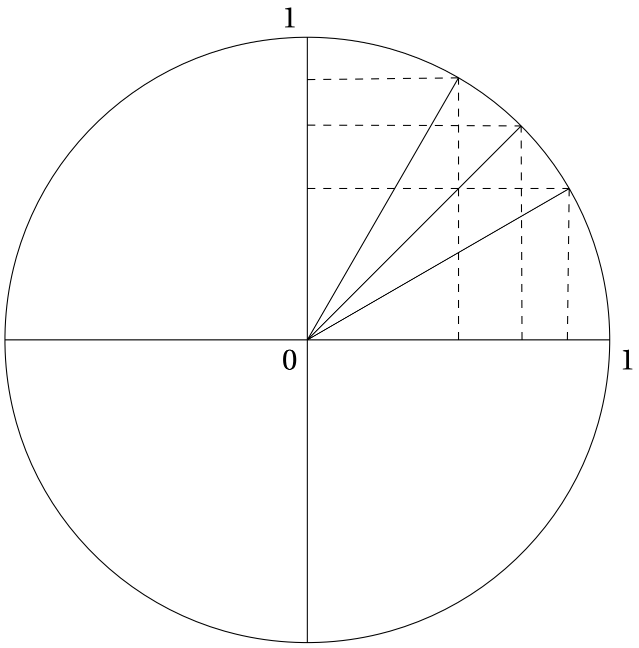
Exercice (polynôme de Tchebychev de « deuxième espèce ») : Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme U_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbf{R} \qquad \sin(n\theta) = \sin\theta \, U_n(\cos\theta)$$

II.4 Calculs trigonométriques

a. Valeurs remarquables

Il faut connaître les sinus, cosinus, tangente de $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$. Un dessin sur le cercle trigonométrique doit permettre d'éviter les confusions.



b. Egalité des cosinus, des sinus, des tangentes

Une bonne lecture du cercle trigonométrique permet de résoudre sans effort ni erreur les équations suivantes (on dessine toujours un « petit angle positif » t ou α, on sait que les formules sont vraies dans le cadre général) :

$\cos t = 0 \iff$

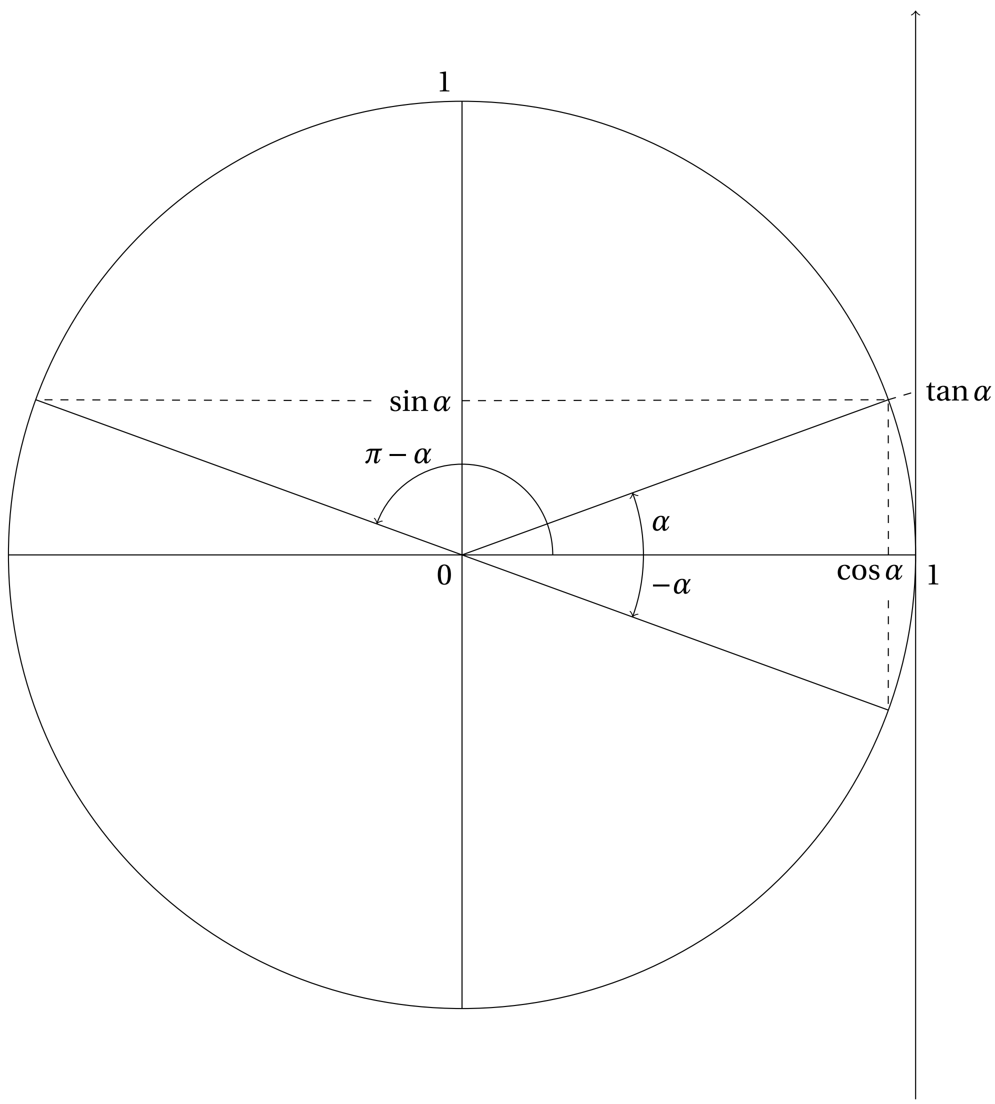
$\sin t = 0 \iff$

et plus généralement

$\cos t = \cos\alpha \iff$

$\sin t = \sin\alpha \iff$

$\tan t = \tan\alpha \iff$



c. Autres lectures sur le cercle

Là aussi, on ne devrait pas avoir besoin d'utiliser sa mémoire, on dessine et ça suffit. Cela dit, la plupart des formules de cette rubrique sont bien connues…

$\cos(-t) =$

$\sin(-t) =$

$\tan(-t) =$

$\cos(\pi - t) =$

$\sin(\pi - t) =$

$\tan(\pi - t) =$

$\cos(\pi + t) =$

$\sin(\pi + t) =$

$\tan(\pi + t) =$

$\cos(\pi/2 - t) =$

$\sin(\pi/2 - t) =$

$\tan(\pi/2 - t) =$

$\cos(\pi/2 + t) =$

$\sin(\pi/2+t) =$

$\tan(\pi/2+t) =$

d. Addition

La propriété de morphisme qui s'écrit

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$$

équivaut aux formules d'addition
$\cos(a+b) = \cos a \cos b \ - \ \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b \ + \ \cos a \sin b$

qu'il faut connaître par coeur, car toute la trigonométrie usuelle peut se retrouver à partir de ces relations.
Avec les propriétés de parité-imparité :

$\cos(a-b) =$

$\sin(a-b) =$

e. Duplication, linéarisation

$\cos(2a) = 2\cos^2 a \ - \ 1 \ = \ 1 \ - \ 2\sin^2 a \ = \ \cos^2 a \ - \ \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2 \ \sin a \ \cos a$

Et donc, en lisant à l'envers ces formules :

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

$\sin a \; \cos a = \frac{1}{2}\sin(2a)$

Ces trois dernières formules sont sûrement les plus utilisées pendant l'année.

f. Linéarisation encore

Assez facilement si on connaît bien les formules d'addition :

$\cos a \; \cos b =$

$\sin a \; \cos b =$

$\sin a \; \sin b =$

Les formules

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

$\sin a \; \cos a = \frac{1}{2}\sin(2a)$

peuvent être vues comme un cas particulier des précédentes ($a = b$).

g. Addition des tangentes

Enfin, à connaître aussi :

$\tan(a+b) =$

$\tan(a-b) =$

h. Formules de factorisation

Ces formules servent par exemple à résoudre des équations, le programme stipule qu'il faut savoir les retrouver ;

$\cos p \ + \ \cos q \ =$

$\cos p \ - \ \cos q \ =$

$\sin p \ + \ \sin q \ =$

$\sin p \ - \ \sin q \ =$

II.5 Factorisation de sommes

Il faut savoir calculer et simplifier l'expression de sommes du type

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$$

(somme de sinus ou de cosinus de réels en progression arithmétique) en se ramenant, par utilisation de l'exponentielle complexe, à des calculs de sommes géométriques :

$S_n = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\Big)$ donc, si $\theta \not\in 2\pi\mathbf{Z}$ (sinon la somme vaut n),

$$\begin{aligned} S_n &= \mathrm{Re}\Big(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\Big) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \quad \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin[\theta/2]}\Big) \\ &= \cos[n\theta/2] \quad \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin[\theta/2]} \end{aligned}$$

La deuxième étape est cruciale, il faut bien en comprendre le mécanisme : on rencontre un nombre complexe de la forme

$$1 \pm e^{ia}$$

dont on transforme l'expression en mettant en facteur $e^{ia/2}$:

$$1 \pm e^{ia} = e^{ia/2}\left(e^{-ia/2} \pm e^{ia/2}\right)$$

et on obtient (à un facteur 2 près) le produit d'une exponentielle par un cosinus ou un sinus.

II.6 Parenthèse sur le calcul des sommes géométriques

On calcule fréquemment des sommes géométriques :

$$S = \sum_{k=m}^{n} aq^k$$

Il faut donc avoir des habitudes suffisamment fiables pour ne pas se tromper. On n'oublie pas le cas particulier $q = 1$. Si par hasard on n'y pense pas a priori, la division par $1-q$ nous le rappellera. Dans les calculs suivants, on suppose $q \neq 1$.

a. Première méthode

On se ramène, en factorisant le premier terme, toujours au même genre de somme ;

$$
\begin{aligned}
S &= aq^m \sum_{k=m}^{n} q^{k-m} \\
&= aq^m \sum_{j=0}^{n-m} q^j \\
&= aq^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \\
&= \frac{aq^m - aq^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

b. Deuxième méthode

On remarque que la multiplication par $1-q$ donne une somme téléscopique. Cela se voit très bien avec les écritures suivantes :

$$S = aq^m + aq^{m+1} + \ldots + aq^n$$

$$qS = aq^{m+1} + aq^{m+2} + \ldots + aq^{n+1}$$

Donc $(1-q)S =$

Rajouter et retrancher les termes qui manquent quand l'indexation ne commence pas à 0 *ne paraît pas être une bonne façon de faire.*

II.7 Argument(s)

La représentation des nombres complexes de module 1 fait que tout nombre complexe non nul s'écrit donc sous la forme, dite trigonométrique,

$$z = \rho e^{i\theta}$$

où ρ, strictement positif, est le module de z. On dit que θ est un argument de z. (Pour $z = 0$, tout réel serait argument…on préfère dire que z n'a pas d'argument).

Arguments Les arguments de z diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Argument d'une somme, d'un quotient Si θ et θ' sont des arguments de z et z', $\theta+\theta'$ et $\theta-\theta'$ sont des arguments respectivement de zz' et z/z'.

II.8 Amplitude et phase

Lorsqu'on résout l'équation

$$\ddot{y}+\omega^2\, y=0$$

(on suppose $\omega>0$) en mathématiques, on écrit souvent les solutions sous la forme

$$t\mapsto a\,\cos\omega t\;+\;b\,\sin\omega t$$

ce qui présente l'avantage de faire apparaître clairement cet ensemble de solutions comme un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les deux fonctions $t\mapsto\cos\omega t$ et $t\mapsto\sin\omega t$. On peut réécrire les choses autrement : le point de coordonnées (a,b) dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ est sur le cercle de centre $(0,0)$, de rayon $A=\sqrt{a^2+b^2}$. Il existe donc ϕ réel tel que

$$a=A\cos\phi \qquad , \qquad b=A\sin\phi$$

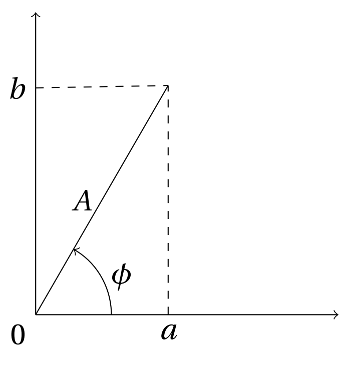
ce qui donne l'expression suivante :

$$a\cos\omega t+b\sin\omega t=A\cos(\omega t-\phi)$$

davantage prisée des physiciens pour son interprétation en termes d'amplitude et de phase.

On pouvait aussi rester sur **C** en définissant A comme le module et ϕ comme un argument de $a+ib$:

$$a+ib=Ae^{i\phi}=A\big(\cos\phi\;+\;i\;\sin\phi\big)$$



II.9 Racines n-ièmes de l'unité

L'ensemble $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe à n éléments de $(\mathbf{U}, \times)$. On peut le décrire :

$$\mathbf{U}_n = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \; ; \; 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

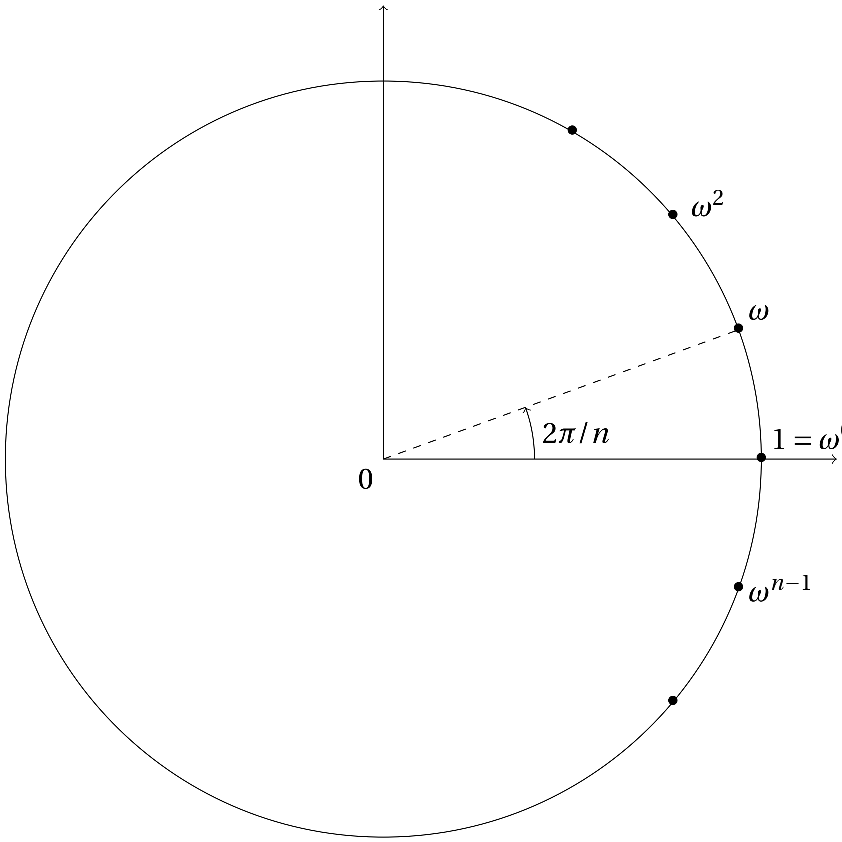
Un nombre complexe de module 1 n'est pas "en général" une racine de l'unité. Mais l'ensemble des racines de l'unité est dense dans **U**.

Proposition : La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Par exemple, si $j = \exp(2i\pi/3)$, $1 + j + j^2 = 0$.

Il est bien souvent conseillé d'utiliser la notation suivante :

$$\mathbf{U}_n = \left\{\omega^k \; ; \; 0 \leq k \leq n-1\right\} \qquad \text{où } \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$



II.10 Recherche des racines n-ièmes d'un nombre complexe :

On suppose $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.
L'équation

$$z^n = a$$

où a est un nombre complexe non nul, se résout en mettant a sous forme trigonométrique : $a = re^{i\alpha}$.
Il faut savoir refaire ce qui suit. Pas la peine d'apprendre par cœur le résultat.

Une solution « évidente » est $z_0 = r^{1/n}e^{i\alpha/n}$.
(on ne part donc pas de rien : la fonction $x \mapsto x^n$ est continue strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, on suppose connue sa fonction réciproque $x \mapsto x^{1/n}$.
On écrit alors

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$

Et on retombe sur une équation connue. Toutes les racines n-ièmes de a se trouvent donc en multipliant z_0 par toutes les racines n-ièmes de l'unité. On peut donc donner l'ensemble des solutions : c'est

$$\left\{z_0\, \omega^k\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

où $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Ou encore, c'est

$$\left\{r^{1/n}e^{i(\alpha+2k\pi)/n}\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

où k décrit par exemple $\{0, \dots, n-1\}$.
Un nombre complexe non nul a donc exactement n racines n-ièmes, avant-goût du théorème de d'Alembert-Gauss qui dira qu'une équation polynomiale de degré n sur $\mathbf{C}$ a exactement n racines, comptées avec leur multiplicité.

Exemple : Trouver les racines cubiques de $1+i$ (on a le droit d'utiliser le nombre complexe j dans l'expression du résultat).

II.11 Racines carrées en cartésiennes

Chercher les racines carrées d'un nombre complexe peut se faire en utilisant les parties réelle et imaginaire. Soit $a = s + it$ un nombre complexe (s, t réels), α et β deux nombres réels. En identifiant parties réelle et imaginaire :

$$(\alpha + i\beta)^2 = s + it \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = & s \\ 2\alpha\beta & = & t \end{cases}$$

On utilise astucieusement le carré du module pour écrire

$$(\alpha + i\beta)^2 = s + it \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = & s \\ 2\alpha\beta & = & t \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & \sqrt{s^2 + t^2} \end{cases}$$

La première et la troisième donnent, par addition et soustraction, α^2 et β^2. D'où a priori deux possibilités pour α, deux pour β. Ce qui donnerait 4 racines carrées, c'est un peu trop. Mais la deuxième équation fixe le signe du produit $\alpha\beta$, ce qui donne bien finalement deux racines carrées.

Exercice : Trouver les racines carrées de $5 + 12i$ sous la forme $a + ib$, a et b réels.

II.12 Application aux équations du second degré

L'inutilité du paragraphe précédent contraste avec l'importance ce celui-ci! en effet, il faut connaître la théorie des équations du second degré, pas seulement les formules avec le discriminant mais aussi la mise sous forme canonique.

Supposons a, b, c complexes, a non nul; commençons par la classique et importante mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Le nombre complexe $b^2 - 4ac$ a deux racines carrées ; soit δ l'une d'elles (l'autre est $-\delta$; elles peuvent être éventuellement égales). On aboutit à

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)$$

Alors

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\delta}{2a}$$

Toute équation du second degré a donc deux solutions (égales si et seulement si le discriminant est nul).

Il faut être attentif à ne pas réduire la théorie des équations de degré 2 à une histoire de formules et de discriminants : la mise sous forme canonique est importante. Les considérations sur somme et produit des racines aussi.

Remarque : On ne doit pas utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour n'importe quel nombre complexe z. Et surtout pas dans une copie de concours...en effet, tout nombre complexe z admet deux racines carrées (distinctes si $z \neq 0$). Il faudrait fixer un critère de choix entre ces deux racines, sinon le symbole $\sqrt{\ }$ reste ambigu. Un tel critère existe pour les réels positifs : on choisit celle des deux racines carrées qui est un réel positif. Pour un nombre complexe non réel positif, on dira : soit δ une racine carrée de z...et on n'essayera pas de contourner le problème en écrivant $z^{1/2}$.

Exercice : Résoudre sur **C** : $z^2 + z - i + 1 = 0$, $z^2 + (3i - 2)z - 6i = 0$.

III L'exponentielle complexe

III.1 Définition

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si $z = x + iy$ (où x et y sont réels), on a

$$e^z = e^x\, e^{iy} = e^x \left(\cos y \;+\; i \sin y\right)$$

Le module et un argument de e^z sont donc respectivement $e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\mathrm{Im}(z)$. On en déduit que e^z n'est jamais nul.

III.2 Propriétés

$$\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2 \qquad e^{a+b} = e^a e^b$$

L'exponentielle complexe est donc un morphisme de $(\mathbf{C},+)$ dans $(\mathbf{C}\setminus\{0\},\times)$. Tout nombre complexe non nul est-il l'exponentielle d'un nombre complexe ? On résout

$$e^z = a$$

où a est un nombre complexe non nul, en écrivant a sous forme trigonométrique : $a = re^{i\alpha}$ ($r > 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$).
On écrit en revanche l'inconnue z sous forme $z = x + iy$, x et y réels. En prenant les modules on obtient nécessairement $x = \ln r$. L'équation équivaut alors à

$$e^{iy} = e^{i\alpha}$$

et on trouve finalement comme solutions les

$$z = \ln r + i(\alpha + 2k\pi) \qquad k \in \mathbf{Z}$$

(on résout très rarement ce genre d'équation, il est donc utile simplement de comprendre pourquoi on écrit le second membre sous forme trigonométrique et l'inconnue sous forme partie réelle/partie imaginaire).

Proposition Le morphisme exp est surjectif de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$, et son noyau est $2i\pi\mathbf{Z}$.

On a donc :

$$(e^z = 1) \Longleftrightarrow (z \in 2i\pi\mathbf{Z})$$

Rappel Si a est un nombre complexe, $t \longmapsto e^{at}$ se dérive en $t \longmapsto ae^{at}$.

…c'est même vrai pour des matrices…
Remarque : On a vu que tout nombre complexe non nul était l'exponentielle d'un (en fait, de beaucoup) de nombres complexes. On s'attend donc à pouvoir définir un logarithme complexe. Cela existe, mais ce n'est pas simple (c'est le même problème que la définition de « l' »argument : il y a beaucoup de logarithmes pour un complexe non nul). On sera donc attentif à ne pas écrire $\ln z$ ni $\log z$ si z est un complexe qui n'est pas un réel positif.

III.3 Transformation d'une expression du type $\dfrac{e^{ia} \pm e^{ib}}{e^{ic} \pm e^{id}}$

Il s'agit d'une manipulation assez simple à savoir faire sans hésiter ; supposons par exemple (cela ne change rien à la méthode) que les deux signes soient $-$; on met en facteur en haut et en bas l'exponentielle de “i fois l'arc médian” : $\dfrac{e^{ia} - e^{ib}}{e^{ic} - e^{id}} = \dfrac{e^{i(a+b)/2}}{e^{i(c+d)/2}} \times \dots$
Un cas particulier est celui des expressions de la forme $\dfrac{e^{ia} - 1}{e^{ib} - 1}$ en mettant en facteur au numérateur et au dénominateur $e^{ia/2}$ et $e^{ib/2}$ respectivement.
On s'en souviendra si on cherche à faire apparaître des sinus ou des cosinus au numérateur et au dénominateur.

Exercice : Soit $x \in \mathbf{R}$. On suppose que $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$. Montrer que

$$\left| \frac{e^{2ix} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \leq 2$$

et indiquer s'il y a des valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est une égalité.

IV Géométrie des complexes

Plus très à la mode...

IV.1 Le « plan complexe »

C, c'est $\mathbf{R}^2$, donc, vu comme **R**-espace vectoriel, un plan. Que l'on peut munir de sa structure euclidienne canonique (pour laquelle $(1, i)$ est une base orthonormale) et de l'orientation canonique elle aussi (la base $(1, i)$ est directe). On parle alors du "plan complexe".

IV.2 Affixes

a. Point

Si M est un point de $\mathbf{R}^2$ de coordonnées (a, b), l'affixe de M est le nombre complexe $z = a + ib$. On dit aussi que M est l'image de z, ou le point associé à z, ou...le point d'affixe z...

b. Vecteur

Si A et B sont deux points d'affixes respectives a et b, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

c. Propriétés

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs d'affixes respectives α et β, si λ est un nombre réel,
$\lambda\overrightarrow{u}$ a pour affixe $\lambda\alpha$,
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour affixe $\alpha + \beta$,
$\|\overrightarrow{u}\| = |\alpha|$.
Et donc, si A et B sont les points d'affixes a et b, la distance AB est égale à $|b - a|$.

IV.3 Equation d'un cercle

Soit Ω le point d'affixe ω, R un réel positif. Soit M un point d'affixe z, et notons $\mathscr{C}(\Omega, R)$ le cercle de centre Ω et de rayon R ;

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(\Omega, R) &\Longleftrightarrow |z-\omega| = R \\ &\Longleftrightarrow |z-\omega|^2 = R^2 \\ &\Longleftrightarrow \end{aligned}$$

IV.4 Alignement et orthogonalité

a. Alignement

Soit A, B deux points distincts, d'affixes a et b. Soit M un point d'affixe z. Alors les points A, B, M sont alignés si et seulement s'il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

Traduite en affixes, cette égalité s'écrit

$$z - a = \lambda(b - a)$$

Donc :

$$\begin{aligned} A, B, M \text{ alignés} &\Longleftrightarrow \frac{z-a}{b-a} \in \mathbf{R} \\ &\Longleftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \overline{\frac{z-a}{b-a}} \\ &\Longleftrightarrow (z-a)\,\overline{b-a} = (b-a)\,\overline{z-a} \end{aligned}$$

En développant, on obtient une condition nécessaire d'alignement de M, A et B, autrement dit une équation de la droite (AB).

b. Orthogonalité

Commençons par un petit calcul : si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ont pour affixes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, cela signifie que $\overrightarrow{u_1}$ a pour composantes (a_1, b_1) et $\overrightarrow{u_2}$ a pour composantes (a_2, b_2) dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$, qui est orthonormale. Donc le produit scalaire s'écrit

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Et on remarque que

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = \ldots\ldots\left(z_1\ \overline{z_2}\right)$$

et que, donc,

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = 0 \Longleftrightarrow z_1\ \overline{z_2} \in i\mathbf{R}$$

Géométriquement, si A et B sont deux points distincts, d'affixes a et b, si M est un point d'affixe z. Alors

$$\begin{aligned}(AB)\perp(AM) &\Longleftrightarrow (z-a)\ \overline{b-a} \in i\mathbf{R} \\ &\Longleftrightarrow (z-a)\ \overline{b-a} = -\overline{z-a}\ (b-a)\end{aligned}$$

A quoi servent ces identités? à remplacer la géométrie qu'on ne sait plus faire (il n'y en a quasiment pas au programme) par des équations.

Exercice : On considère deux points A et B d'affixes a et b. Montrer que l'ensemble des points tels que $(AM)\perp(BM)$ est un cercle, dont on déterminera le centre et le rayon.

Table des matières