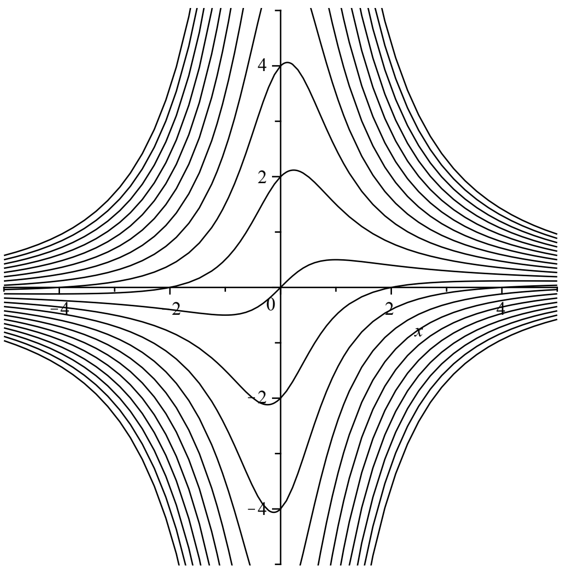
C14 : Equations différentielles linéaires scalaires (techniques de résolution)

I Equations linéaires scalaires d'ordre 1



Courbes intégrales de $(1+x^2)\,y' + 2x\,y = 1$

Soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x) \qquad (E)$$

c'est-à-dire les applications ϕ dérivables sur des intervalles à préciser (au maximum, I) et vérifiant sur ces intervalles :

$$a(x)\phi'(x) + b(x)\phi(x) = c(x)$$

I.1 Rappels : structure de l'ensemble des solutions

Voir C13

Définition : On appelle équation homogène associée à (E) l'équation

$$a(x)y' + b(x)y = 0\,. \tag{H}$$

Théorème : L'ensemble des solutions de (E) sur un intervalle J inclus dans I, s'il est non vide, est un sous-espace affine dont la direction est le sous-espace vectoriel des solutions de (H). Si a et b sont continues sur J et si a ne s'annule pas sur J, l'espace des solutions de (E) sur J est une droite affine, de direction la droite vectorielle des solutions de (H) sur J.

…plus simplement exprimé, si l'on connaît une solution de (E) sur J, toutes les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à cette solution (souvent appelée solution particulière même si elle n'a rien de particulier !) les solutions de (H).

I.2 Résolution formelle d'une équation homogène

On cherche des solutions sur un intervalle J **sur lequel** a **ne s'annule pas**. On écrit alors parfois la suite de calculs suivante :

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

$$\ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx \,+\, C$$

$$y = K\exp\Big(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\Big)$$

I.3 Résolution effective rigoureuse d'une équation homogène

a. Les cacluls détaillés

La présentation précédente laisse à désirer : d'abord, elle ne s'applique pas aux fonctions à valeurs complexes. Et, même si les fonctions sont à valeurs réelles, on suppose dans ce calcul que y ne s'annule pas, et donc qu'elle garde un signe constant sur J. C'est assez restrictif. Pour éviter cet inconvénient, on procèdera de la manière suivante : soit J un intervalle **sur lequel** a **ne s'annule pas**. On commence par diviser par a :
$\left(\forall x \in J \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in J \quad y'(x) + \dfrac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0\right)$.
Soit alors μ une primitive de b/a sur J ; il en existe car b/a est continue. On multiplie tout par $\exp(\mu(x))$; on obtient une équation équivalente, car une exponentielle n'est jamais nulle :
$\left(\ldots\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in J \quad \exp\big(\mu(x)\big)y'(x) + \dfrac{b(x)}{a(x)}\exp\big(\mu(x)\big)y(x) = 0\right)$.
On reconnaît alors au premier membre la dérivée du produit $\exp\big(\mu(x)\big)y(x)$. On obtient donc :
$\left(\ldots\right) \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbf{K} \quad \forall x \in J \quad \exp\big(\mu(x)\big)y(x) = C$.
On retrouve ainsi le résultat du calcul formel précédent : les solutions de (H) sur un intervalle J sur lequel a ne s'annule pas sont les fonctions

$$x \longmapsto C\exp\left(\int \frac{-b(x)}{a(x)}dx\right) \quad (C \in \mathbf{K})$$

où $\displaystyle\int \frac{-b(x)}{a(x)}dx$ désigne une primitive de $-b/a$ sur J. Cet ensemble de solutions est donc un espace vectoriel de dimension 1.
Remarque : en multipliant par $exp(\mu(x))$, on dit que l'on a multiplié par un facteur intégrant.

b. Sur une copie d'écrit

On a le droit de donner la solution directement. Il est fortement conseillé de vérifier, si ce n'est pas trop long. De même qu'il est conseillé de vérifier un calcul de primitive. D'ailleurs, un calcul de primitive, c'est une résolution d'équation différentielle particulière.

I.4 Résolution de l'équation (E)

On résout sur un intervalle J sur lequel a ne s'annule pas. On a su, sur un tel intervalle, résoudre (H) (ce qui ne signifie pas que l'on sache expliciter les primitives de b/a à l'aide des fonctions usuelles). On a trouvé ces solutions sous la forme

$$x \longmapsto \lambda \exp\big(-\mu(x)\big) \qquad (\lambda \in \mathbf{K}).$$

Il ne reste plus qu'à trouver une solution de (E). On va chercher une telle solution sous la forme

$$\phi \ : \ x \longmapsto \lambda(x) \exp\big(-\mu(x)\big)\ .$$

(méthode de variation de la constante). ϕ est solution de (E) sur J si et seulement si, pour tout x dans J :

$$\lambda'(x) \exp\big(-\mu(x)\big) - \mu'(x)\lambda(x) \exp\big(-\mu(x)\big) + \frac{b(x)}{a(x)}\lambda(x) \exp\big(-\mu(x)\big) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

ce qui se réduit à

$$\lambda'(x) \exp\big(-\mu(x)\big) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

ou, de manière équivalente, à

$$\lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} \exp\big(\mu(x)\big)\ .$$

Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir la solution générale (ou une solution particulière, au choix) de l'équation (E). En particulier, dans le cas des équations linéaires scalaires d'ordre 1, on retrouve :

Théorème : Soit J un intervalle **sur lequel a ne s'annule pas**. L'ensemble des solutions de (E) sur J est une droite affine.

Remarque 1 : on peut résoudre directement (E) en multipliant par le facteur intégrant $\exp\Big(\displaystyle\int (b(x)/a(x))\ dx\Big)$. Ceci revient à résoudre **3.** et **4.** en même temps.

Remarque 2 : la résolution effective fait appel à deux primitivations. Celles-ci ne peuvent pas souvent être calculées à l'aide des fonctions usuelles. On utilisera alors le symbole $\int$ ou "soit μ une primitive de", "soit F une primitive de"...Ainsi, on a montré que les solutions de (E) sur un intervalle sur lequel a ne s'annule pas étaient les

$$x \longmapsto \exp\Big(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\Big)\Big(C+\int\Big(\frac{c(x)}{a(x)}\exp\big(\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\big)\Big)dx\Big).$$

Exemple 1 : Résoudre sur $\mathbf{R}$ $(1+x^2)y'+2xy=1$.

Exemple 2 : Résoudre $xy'-y=x^3$ sur $\mathbf{R}_*^+$, puis sur $\mathbf{R}$.

Exemple 3 : Soit f continue bornée sur $]0,+\infty[$. On considère l'équation différentielle

$$xy'-y+f(x)=0$$

Démontrer qu'elle admet une unique solution y_0 telle que y_0' ait une limite nulle en $+\infty$.

I.5 Résolution d'un problème de Cauchy

Déterminer l'unique solution sur $]0,+\infty[$ de

$$xy'-y+f(x)=0$$

prenant en 1 la valeur α.

I.6 Résolution sur un intervalle sur lequel a s'annule

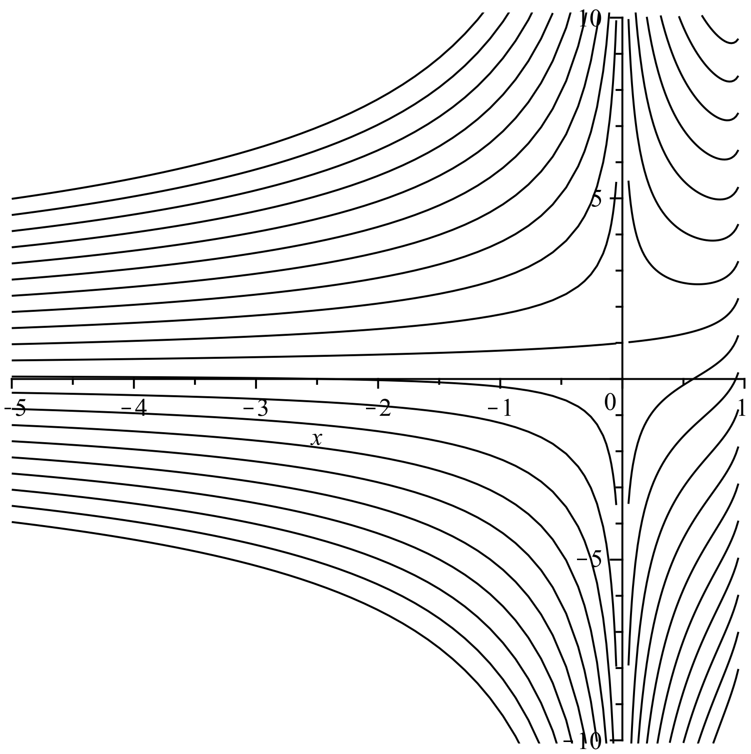
Soit J un intervalle sur lequel a malheureusement s'annule. On partage J en sous-intervalles sur lesquels a ne s'annule pas. On résout sur chacun de ces intervalles, puis on essaie de recoller les solutions. On peut parfois pour cela utiliser le théorème de classe C^1 par prolongement. Il est important de remarquer que les théorèmes généraux ne s'appliquent plus dans ce cas (dimension de l'espace des solutions, existence et unicité de la solution prenant en un point donné une valeur donnée). Dans ce genre de problème, la recherche de solutions développables en série entière est parfois utile.

a. Un exemple simple

Déterminer les solutions sur **R** de chacune des équations différentielles suivantes :
$xy' - y = 0 \qquad xy' - 2y = 0 \qquad xy' - \frac{1}{2}y = 0.$

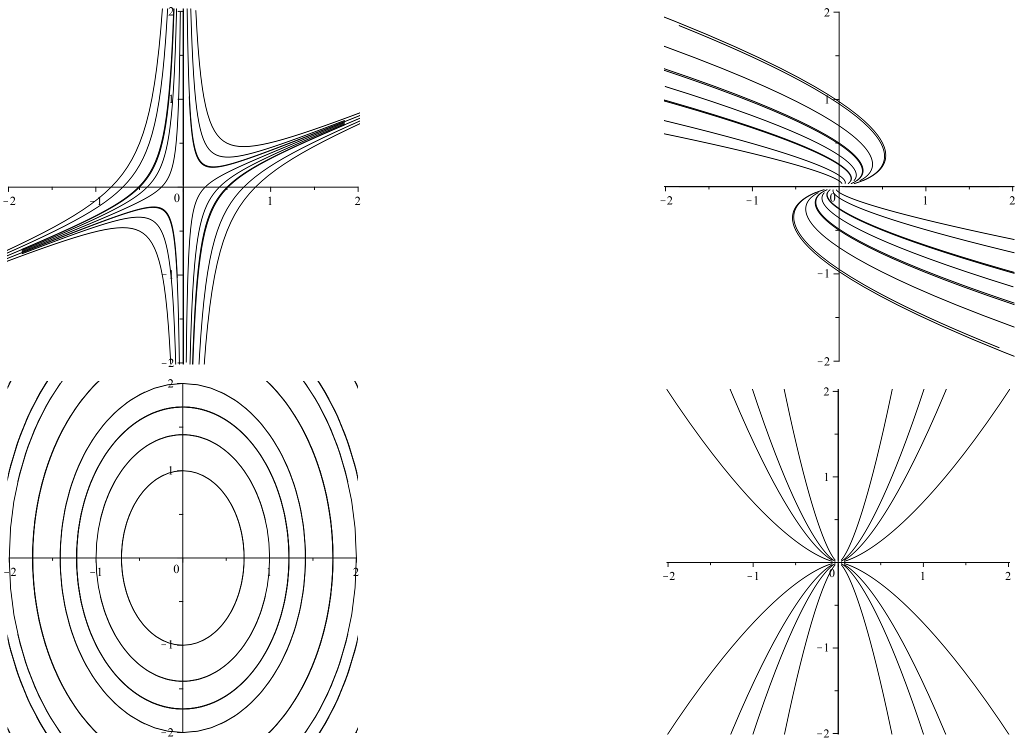
b. Un peu plus de calculs...

Exemple : Résoudre $2xy' + y = 1/(1-x)$ sur $]-\infty, 1[$



Courbes intégrales de $2xy' + y = 1/(1-x)$ *sur* $]-\infty, 1[$

II Systèmes différentiels à coefficients constants



Quelques courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$, le vecteur colonne (x, y) étant solution d'un système $X' = AX$

II.1 Position du problème

Il s'agit ici de résoudre un système du type

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x_1' & = & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & + & b_1(t) \\ x_2' & = & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & + & b_n(t) \end{array}\right.$$

c'est-à-dire de trouver des fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_n$ dérivables sur un intervalle I telles que, pour tout t dans I,

$$\begin{cases} \phi_1'(t) & = & a_{1,1}\phi_1(t) + a_{1,2}\phi_2(t) + \cdots + a_{1,n}\phi_n(t) & + & b_1(t) \\ \phi_2'(t) & = & a_{2,1}\phi_1(t) + a_{2,2}\phi_2(t) + \cdots + a_{2,n}\phi_n(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \phi_n'(t) & = & a_{n,1}\phi_1(t) + a_{n,2}\phi_2(t) + \cdots + a_{n,n}\phi_n(t) & + & b_n(t) \end{cases}$$

Les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbf{K}$ (des constantes), les b_i des fonctions que l'on supposera au moins continues sur un intervalle J, à valeurs dans $\mathbf{K}$. On ne pourra alors chercher des solutions que sur un intervalle inclus dans J.

a. Ecriture matricielle

Le système s'écrit

$$X' = AX \; + \; B(t)$$

où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice des $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0\big(J, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\big)$. La fonction inconnue est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

b. Ecriture vectorielle

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, a un endomorphisme de E. Pour tout élément y de E, on notera $a.y$ au lieu de $a(y)$. Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, et b une application continue sur J à valeurs dans E. On appelle solution de l'équation différentielle

$$x' = a.x + b(t) \qquad (E)$$

toute application ϕ dérivable sur un intervalle I inclus dans J, à valeurs dans E, et telle que

$$\forall t \in I \quad \phi'(t) = a.\phi(t) + b(t)$$

Le lien avec l'écriture matricielle est assez clair.

II.2 Résolution à l'aide de l'exponentielle de matrice ou d'endomorphisme

On va retrouver ici les résultats vus dans le cadre général des systèmes linéaires. Mais dans le cas des coefficients constants, l'exponentielle de matrice ou d'endomorphisme donne un procédé de résolution effectif, et les démonstrations des théorèmes sont « constructives ».

Reste l'obstacle du calcul d'une exponentielle de matrice ou d'endomorphisme, pas facile en général. Le programme se limite donc cas de diagonalisabilité, où tout se passe simplement.

On rappelle que l'application $t \mapsto \exp(ta)$, si a est une matrice ou un endomorphisme en dimension finie, est indéfiniment dérivable, et que sa dérivée est l'application $t \mapsto a\exp(ta) = \exp(ta)a$ (si a est un endomorphisme, on omet fréquemment le $\circ$).

On rappelle également que l'exponentielle d'un endomorphisme est un automorphisme, l'exponentielle d'une matrice est une matrice inversible :

$$\left(\exp(a)\right)^{-1} = \exp(-a)$$

L'aspect vectoriel est limité à X-ens. On peut se concentrer que l'aspect matriciel.

a. Exponentielle d'une somme de matrices qui commutent

Proposition Si $ab = ba$, alors $\exp(a+b) = (\exp a)\,(\exp b) = (\exp b)\,(\exp a)$

(a et b sont des endomorphismes ou des matrices ; dans le cas des endomorphismes, quelques $\circ$ peuvent ajouter à la lisibilité...)

Démonstration 1 : Faire un produit de Cauchy...mais on sort du cadre du programme (on utilise un produit de Cauchy de séries absolument convergentes, mais dans un evn de dimension finie, or le programme se contente de faire des produits de Cauchy réels ou complexes).

Démonstration 2 : C13...

b. Aspect matriciel : équation homogène

On introduit l'équation homogène

$$X' = AX \tag{H}$$

et on écrit

$$\begin{aligned}
\forall t\in I\quad X'(t) = A\,X(t) \Leftrightarrow\ & \forall t\in I\quad X'(t) - A\,X(t) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \forall t\in I\quad \exp(-tA)X'(t) - \big(\exp(-tA)A\big)X(t) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \forall t\in I\quad \frac{d}{dt}\big(\exp(-tA)X(t)\big) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \exists C\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\ \forall t\in I\quad \exp(-tA)X(t) = C
\end{aligned}$$

On a donc démontré que :

Proposition Les solutions de l'équation homogène

$$X' = AX$$

sont les applications

$$t\mapsto \exp(tA)C\,,\qquad C\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

Remarque Elles forment bien un espace vectoriel de dimension n.

En effet, l'application $C\longmapsto (t\mapsto \exp(tA)C)$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sur S_H, ensemble des solutions de (H) sur $\mathbf{R}$.

Remarque Les solutions du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants $X' = AX$ sont donc faciles à retrouver : leur expression ne diffère pas vraiment de celle des solutions de l'équation scalaire $x' = ax$...mais on fera bien attention à ne pas écrire $C\exp(tA)$ à la place de $\exp(tA)C$, car cela n'aurait aucun sens.

c. Aspect matriciel : équation complète

Résolvons maintenant l'équation $(E)\ :\ X' = AX + B(t)$ par une méthode de variation de la constante : on cherche les solutions de (E) sur un intervalle J (sur lequel B est supposée continue) sous la forme $\Phi\ :\ t \mapsto \exp(tA)C(t)$, où $t \mapsto C(t)$ est une fonction inconnue, dérivable sur J, à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Il n'est pas restrictif de chercher les solutions sous cette forme : toute fonction ϕ dérivable sur J s'écrit sous la forme $\Phi(t) = \exp(tA)\big(\exp(-tA)\Phi(t)\big)$; on a donc le droit de poser $C(t) = \exp(-tA)\Phi(t)$.

$\forall t \in J \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) + B(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in J \quad (A\exp(tA))C(t) + \exp(tA)C'(t) = A(\exp(tA)C(t)) + B(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in J \quad C'(t) = \exp(-tA)B(t)$

En conclusion, si F est une primitive sur J de $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$, les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \exp(tA)F(t) + \exp(tA)C \qquad , C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

et on retrouve bien le

Théorème : Les solutions de (E) sur J forment un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, de dimension n.

d. Aspect vectoriel

On introduit l'équation homogène

$$x' = a.x \qquad (H)$$

et on écrit

$$\begin{aligned}
\forall t \in I \quad x'(t) = a.x(t) &\Leftrightarrow \forall t \in I \quad x'(t) - a.x(t) = 0_E \\
&\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \exp(-ta).x'(t) - \big(\exp(-ta) \circ a\big).x(t) = 0_E \\
&\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \frac{d}{dt}\big(\exp(-ta).x(t)\big) = 0_E \\
&\Leftrightarrow \exists c \in E \ \forall t \in I \quad \exp(-ta).x(t) = c
\end{aligned}$$

On a donc démontré que :

Proposition : Les solutions de l'équation (H) sur un intervalle I sont les applications $t \mapsto \exp(ta).c$, $c \in E$. Elles forment un espace vectoriel de dimension n.

En effet, l'application $c \mapsto (t \mapsto \exp(ta).c)$ est un isomorphisme de E sur S_H, ensemble des solutions de (H) sur I.

Résolvons maintenant l'équation (E) par une méthode de variation de la constante : on cherche les solutions de (E) sur un intervalle I (inclus dans J) sous la forme $\phi\ :\ t \mapsto \exp(ta).c(t)$, où $t \mapsto c(t)$ est une fonction inconnue, dérivable sur I, à valeurs dans E. Il n'est pas restrictif de chercher les solutions sous cette forme : toute fonction ϕ dérivable sur I s'écrit sous la forme $\phi(t) = \exp(ta).(\exp(-ta).\phi(t))$; on pose donc $c(t) = \exp(-ta).\phi(t)$.

$\forall t \in I \quad \phi'(t) = a.\phi(t) + b(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad (a \circ \exp(ta)).c(t) + \exp(ta).c'(t) = a.(\exp(ta).c(t)) + b(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad c'(t) = \exp(-ta).b(t)$

En conclusion, si f est une primitive sur I de $t \mapsto \exp(-ta).b(t)$, les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \exp(ta).f(t) + \exp(ta).c \qquad , c \in E$$

Théorème : Les solutions de (E) sur un intervalle I inclus dans J forment un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, E)$, de dimension n.

II.3 Problème de Cauchy

a. Version matricielle

Problème Soit t_0 un élément de J, X_0 un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On cherche s'il existe une (ou plusieurs) solution(s) de (E), Φ, vérifiant de plus la "condition initiale" $\Phi(t_0) = x_0$.

$\forall t \in I \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) + B(t)$
$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \exp(-tA)\Phi'(t) - \exp(-tA)(A\Phi(t)) = \exp(-tA)B(t)$
$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \dfrac{d}{dt}\big(\exp(-tA)\Phi(t)\big) = \exp(-tA)B(t)$
$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \exp(-tA)\Phi(t) = \exp(-t_0A)\Phi(t_0) \ + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp(-uA)B(u)\ du$
Et donc Φ est solution du problème de Cauchy posé si et seulement si

$$\forall t \in I \quad \Phi(t) = \exp\big((t-t_0)A\big)X_0 \ + \int_{t_0}^{t} \exp\big((t-u)A\big)B(u)\ du$$

On a donc démontré le

Théorème d'existence et d'unicité : Soit t_0 un élément de J, X_0 un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Il existe une solution unique de (E), Φ, définie sur J et prenant en t_0 la valeur X_0.

b. Version vectorielle

Soit t_0 un élément de J, x_0 un élément de E. On cherche s'il existe une (ou plusieurs) solution(s) de (E), ϕ, vérifiant de plus la "condition initiale" $\phi(t_0) = x_0$.

Reprenons la résolution vue plus haut, tenant compte du rôle particulier joué ici par t_0.
$\forall t \in I \quad \phi'(t) = a.\phi(t) + b(t)$
$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \exp(-ta).\phi'(t) - \exp(-ta).(a.\phi(t)) = \exp(-ta).b(t)$
$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \dfrac{d}{dt}\big(\exp(-ta).\phi(t)\big) = \exp(-ta).b(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in I \quad \exp(-ta).\phi(t) = \exp(-t_0 a).\phi(t_0) \;+\; \int_{t_0}^{t} \exp(-ua).b(u)\;du$
Et donc ϕ est solution du problème de Cauchy posé si et seulement si

$$\forall t \in I \quad \phi(t) = \exp\big((t-t_0)a\big).x_0 \;+\; \int_{t_0}^{t} \exp\big((t-u)a\big).b(u)\;du$$

On a donc démontré le

> **Théorème d'existence et d'unicité :** Soit t_0 un élément de J, x_0 un élément de E. Il existe une solution unique de (E), ϕ, définie sur J et prenant en t_0 la valeur x_0.

II.4 Résolution effective dans le cas de diagonalisabilité

On se place dans le cas où A est diagonalisable. On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$, D étant diagonale et P étant la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de A.
Plus explicitement, nommant $(V_1, \dots, V_n)$ la famille des vecteurs colonnes de P, on a, pour tout i, $AV_i = \lambda_i V_i$, les λ_i sont les coefficients diagonaux de D, c'est-à-dire les valeurs propres de A.

a. Résolution de l'équation homogène

Considérons d'abord l'équation (H) :

$$X' = AX \Longleftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Longleftrightarrow (Y' = DY \text{ et } X = PY)$$

La résolution de $Y' = DY$ ne pose aucune difficulté : elle donne :
$\forall i \in [1,n] \quad \exists c_i \in \mathbf{K} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad y_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t)$
Et on obtient donc
$X' = AX \Longleftrightarrow \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{K}^n$

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad X(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) V_2 + \cdots + c_n \exp(\lambda_n t) V_n$$

On constate que la famille de fonctions $\left(t \mapsto \exp(\lambda_i t) V_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (H), donc un système fondamental de solutions de (H).

b. Résolution de l'équation complète

La méthode de variation de la constante consiste en la recherche d'une solution Φ sous la forme $\Phi \ : \ t \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \exp(\lambda_i t) V_i$ les c_i étant des fonctions inconnues à valeurs dans $\mathbf{K}$. On a alors
$\Phi' \ : \ t \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) \exp(\lambda_i t) V_i \ + \ \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \lambda_i \exp(\lambda_i t) V_i$
et
$A\Phi \ : \ t \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \exp(\lambda_i t) \lambda_i V_i$
(car $AV_i = \lambda_i V_i$).
Φ vérifie (E) si et seulement si, pour tout t,
$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) \exp(\lambda_i t) V_i = B(t)$
Or, pour tout t, $B(t)$ se décompose dans la base $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$: $B(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) V_i$. On aboutit alors au système suivant : pour tout i, $c_i'(t) = \exp(-\lambda_i t) \beta_i(t)$ qui donne les c_i chacune à une constante près.

c. Aspect vectoriel

On se place dans le cas où a est diagonalisable. Soit alors $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de a. On a, pour tout i, $a.v_i = \lambda_i v_i$.

Résolution de l'équation homogène

On sait que les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \exp(ta).c$ où $c \in E$. Pour tout i, $\phi_i \ : \ t \mapsto \exp(ta).v_i$ est donc solution. Mais cette solution peut s'écrire $\phi_i \ : \ t \mapsto \exp(\lambda_i t) v_i$. Les n solutions ainsi trouvées sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (H). Et donc les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto c_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) v_2 + \cdots + c_n \exp(\lambda_n t) v_n$$

La famille de fonctions $\Big(t \mapsto \exp(\lambda_i t) v_i\Big)_{1\leq i\leq n}$ est un **système fondamental de solutions** de (H).

Résolution de l'équation complète
On cherche une solution ϕ sous la forme $\phi\ :\ t \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \exp(\lambda_i t) v_i$ les c_i étant des fonctions inconnues à valeurs dans $\mathbf{K}$. Alors ϕ vérifie (E) si et seulement si, pour tout t,
$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) \exp(\lambda_i t) v_i = b(t)$
Or, pour tout t, $b(t)$ se décompose dans la base $(v_i)_{1\leq i\leq n}$: $b(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) v_i$. On aboutit alors au système suivant : pour tout i, $c_i'(t) = \exp(-\lambda_i t)\beta_i(t)$ qui donne les c_i chacune à une constante près.

et si a n'est pas diagonalisable? Faute de pouvoir trouver une base formée de vecteurs propres, on essaiera de déterminer une base (w_i) pour laquelle les $\exp(ta).w_i$ soient facilement calculables. C'est le cas si on prend les w_i dans les sous-espaces caractéristiques (hors programme), ce qui donne des calculs faisables si le polynôme caractéristique est scindé.

II.5 En dimension 2

Exemples : Résoudre le système $X' = AX$ dans les cas suivants :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$
Résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) + t \\ y'(t) &= 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

II.6 Quelques résultats

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisable. Donner une cns sur $\mathrm{Sp}(A)$ pour que les solutions de $X' = AX$
   (a) Soient bornées sur $[0, +\infty[$.
   (b) Aient pour limite 0 en $+\infty$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable. Donner une cns sur $\mathrm{Sp}(A)$ pour que les solutions de $X' = AX$
   (a) Soient bornées sur $[0, +\infty[$.
   (b) Aient pour limite 0 en $+\infty$.
3. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On note $(.|.)$ le produit scalaire, $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
   (a) Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$, on suppose $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}^+$. Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, $t \longmapsto \|X(t)\|$ est croissante.
   (b) Soit $A \in A_n(\mathbf{R})$. Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, $t \longmapsto \|X(t)\|$ est constante.

III Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

III.1 Equation homogène

Commençons par une équation homogène à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = 0\,. \tag{H}$$

où $(a,b,c) \in \mathbf{K}^3$, $a \neq 0$. Par analogie avec la détermination des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on peut écrire (H) sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

ou encore

$$Y' = AY$$

avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de la matrice A est

On retrouve donc naturellement l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle (H) : c'est l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0\,.$$

- **Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes :** Soit r_1 et r_2 ces deux racines. On peut alors diagonaliser A : $A = PDP^{-1}$ où P est inversible et $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$. On a alors

$$Y' = AY \Longleftrightarrow Y' = PDP^{-1}Y \Longleftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$$

ce qui nous ramène, en définissant $Z = P^{-1}Y$, au système différentiel

$$Z' = DZ$$

système qui s'explicite en

$$\begin{cases} z_1' &= r_1 z_1 \\ z_2' &= r_2 z_2 \end{cases}$$

et qui se résout facilement en

$$\begin{cases} z_1(x) &= \\ z_2(x) &= \end{cases}$$

On en déduit (avec $Y = PZ$) que y est de la forme

$$x \longmapsto \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x} .$$

Comme on connaît la dimension de S_H, on conclut :

Théorème L'ensemble des solutions de (H) est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les deux solutions $x \mapsto \exp(r_1 x)$ et $x \mapsto \exp(r_2 x)$:

$$S_H = \{x \longmapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \ ; \ (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2\}$$

- **Si l'équation caractéristique a une racine double :** Soit r_0 cette racine. A n'est pas diagonalisable (sinon, ce serait une matrice d'homothétie), mais elle est trigonalisable : $A = PTP^{-1}$ où P est inversible et $T = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ (on peut en effet supposer le coefficient en haut à droite égal à 1, quitte à multiplier le premier vecteur de la base de diagonalisation de l'endomorphisme associé par un scalaire bien choisi). On a alors

$$Y' = AY \Longleftrightarrow Y' = PTP^{-1}Y \Longleftrightarrow P^{-1}Y' = TP^{-1}Y$$

ce qui nous ramène, en définissant $Z = P^{-1}Y$, au système différentiel

$$Z' = TZ$$

système qui s'écrit

$$\begin{cases} z_1' &= r_0 z_1 + z_2 \\ z_2' &= r_0 z_2 \end{cases}$$

et qui se résout en

$$\begin{cases} z_1(x) &= \\ z_2(x) &= C_2 e^{r_0 x} \end{cases}$$

On en déduit (avec $Y = PZ$) que y est de la forme

$$x \longmapsto (\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{r_0 x} .$$

Donc :

Théorème : L'ensemble des solutions de (H) (sur n'importe quel intervalle) l'espace vectoriel de dimension 2, engendré par les deux solutions
$x \mapsto \exp(r_0 x)$ et $x \mapsto x \exp(r_0 x)$.

$$S_H = \{x \longmapsto (\alpha x + \beta) e^{r_0 x} \ ; \ (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2\}$$

- **Si l'équation caractéristique n'a pas de racine (sur R)**

On est dans le cas où a, b, c sont réels, on cherche les solutions réelles de (H), et l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle. Elle a alors deux racines complexes conjuguées distinctes $r + i\omega$ et $r - i\omega$, et on sait résoudre (H) sur **C**. On remarque alors que les solutions réelles de (H) sont les parties réelles des solutions complexes (ce sont aussi les parties imaginaires de ces solutions, ce sont aussi celles de ces solutions qui prennent uniquement des valeurs réelles). On en déduit que

Théorème : L'ensemble des solutions de (H) (sur n'importe quel intervalle) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les deux solutions $x \mapsto \exp(rx)\cos(\omega x)$ et $x \mapsto \exp(rx)\sin(\omega x)$.

Les solutions sont donc les fonctions

$$x \longmapsto e^{rx}\big(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)\big)$$

où α et β décrivent $\mathbf{R}$, ou les fonctions

$$x \longmapsto Ae^{rx}\cos(\omega x + \phi)$$

où A et ω décrivent $\mathbf{R}$.

Attention au risque de confusion entre les formules de résolution vues ci-dessus et celles qui concernent les suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

On peut aussi continuer à faire de la réduction, et remarquer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ qui n'a pas de valeur propre réelle est semblable à une matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\beta \neq 0$, et calculer l'exponentielle de B. Ces deux points font un exercice intéressant d'algèbre linéaire.

III.2 Résolution de l'équation avec certains seconds membres

On considère toujours l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{1}$$

On suppose ici que f est une fonction du type

$$f\ :\ x \longmapsto A\exp(\alpha x)$$

où α et A sont des nombres complexes. Le changement de fonction inconnue

$$z(x) = \exp(-\alpha x)\, y(x)$$

ou

$$y(x) = \exp(\alpha x) z(x)$$

(le but de l'opération étant de faire disparaître les exponentielles) permet de se débarasser des exponentielles ; on calcule en effet

$y'(x) = \exp(\alpha x)\big(z'(x) + \alpha z(x)\big)$
$y''(x) = \exp(\alpha x)\big(z''(x) + 2\alpha z'(x) + \alpha^2 z(x)\big)$
et donc l'équation équivaut à (on simplifie par $\exp(\alpha x)$, qui n'est jamais nul)

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)z(x) + (2a\alpha + b)z'(x) + az''(x) = A \tag{2}$$

On examine alors plusieurs cas :

- **Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique :** Alors l'équation (2) a une solution constante. Autrement dit, on peut chercher directement une solution de (1) sous la forme

$$x \longmapsto Ke^{\alpha x}$$

  on trouvera K, unique.
- **Si α est racine simple de l'équation caractéristique :** Alors l'équation (2) s'écrit

$$(2a\alpha + b)z'(x) + az''(x) = A \tag{2'}$$

  et a donc une unique solution de la forme $x \mapsto Kx$. Autrement dit, on peut chercher directement une solution de (1) sous la forme

$$x \longmapsto Kxe^{\alpha x}$$

  et on trouvera un unique K.
- **Si α est racine double de l'équation caractéristique :** (2) s'écrit $az''(x) = A$, l'équation (1) a donc une unique solution de la forme

$$x \longmapsto Kx^2e^{\alpha x}$$

III.3 Principe de superposition

Ce "principe" n'est autre que la conséquence de la linéarité de l'équation, et dit que, si y_1 est solution sur I de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) \tag{E1}$$

et si y_2 est solution sur I de

$$ay'' + by' + cy = f_2(x) \tag{E2}$$

alors $y_1 + y_2$ est solution sur I de l'équation

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)\ .$$

On peut par exemple de trouver une solution de

$$ay'' + by' + cy = \exp(\alpha x)\cos(\omega x)$$

en ajoutant une solution de

$$ay'' + by' + cy = \exp((\alpha + i\omega)x)$$

et une solution de

$$ay'' + by' + cy = \exp((\alpha - i\omega)x)$$

et en divisant par 2.

Si on cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = B\cos(\omega x)$$

ou

$$ay'' + by' + cy = B\sin(\omega x)$$

où $(a, b, c, B, \omega) \in \mathbf{R}^4$, on regardera si $i\omega$ est ou n'est pas racine (simple, double) de l'équation $ar^2 + br + c = 0$. On cherche alors une solution complexe de

$$ay'' + by' + cy = Be^{i\omega x}$$

puis on en prend la partie réelle ou la partie imaginaire.

IV Equations linéaires scalaires d'ordre 2 « générales »

IV.1 Position du problème

Ici, a, b, c, d désignent quatre applications continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$. On cherche des solutions de l'équation

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{E}$$

On sait que si on est sous les

Hypothèses

I est un intervalle

a, b, c, d sont continues sur I

a ne s'annule pas sur I

alors ces solutions forment un espace affine de dimension 2, de direction l'espace vectoriel des solutions de

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \tag{H}$$

IV.2 Recherche de solutions de l'équation homogène : rappels

Pour résoudre (H), on cherche deux solutions linéairement indépendantes de (H). Cette indépendance linéaire peut se vérifier par la non nullité (en un point, ou partout, c'est équivalent) du wronskien.
On fera attention à ne pas calculer l'équation caractéristique d'une équation qui n'est pas à coefficients constants, erreur assez courante...
Remarquons qu'il n'y a pas de méthode générale de résolution de (H) quand a, b, c ne sont pas constants.

IV.3 Recherche d'une solution dse

a. Généralités

Cette méthode donne des résultats intéressants dans bon nombre d'équations classiques. Elle n'est d'ailleurs pas réservée aux équations homogènes, quelquefois on s'en sert pour une équation complète. On cherche une solution $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, en supposant le rayon de convergence r de cette série entière strictement positif. On obtient des conditions sur les a_n (si tout va bien). On n'oublie pas de vérifier réciproquement que les séries obtenues ont bien un rayon de convergence non nul.

Il importe, pour les concours, de savoir rédiger correctement une recherche de solution développable en série entière pour une équation linéaire scalaire d'ordre 2. A l'écrit, la recherche d'une telle solution sera demandée, mais à l'oral elle peut être laissée à l'initiative du candidat. Il faut donc y penser soi-même, surtout dans le cas où les coefficients de l'équation sont de « petits » polynômes.

b. Un exemple : oral CCP

Analyse 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont développables en série entière à l'origine?

c. Un exemple : oral Mines

On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 x' - 4tx' + (t^2 - 6)x = 0 \qquad (E)$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle qui sont somme d'une série entière autour de 0.
2. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions qui sont solutions de l'équation sur $\mathbf{R}$.

IV.4 Recherche d'une deuxième solution de (H), une étant connue

a. La méthode

On suppose connue une solution ϕ de (H). Les $t \mapsto \lambda\phi(t)$, $\lambda \in \mathbf{K}$ sont donc solutions de (H).
On peut en chercher une autre sous la forme $\psi : t \mapsto \lambda(t)\phi(t)\ldots$méthode facile à mémoriser, car il s'agit d'une variation de la constante.
Si ϕ ne s'annule pas, ce procédé est infaillible. Si ce n'est pas le cas, il peut quand même aboutir. Voyons ce qui se passe :
Calculs
La fonction $t \longmapsto \lambda(t)\phi(t)$ est solution de (H) sur I si et seulement si

$$\forall t \in I \qquad a(t)\left[\lambda''(t)\phi(t) + 2\lambda'(t)\phi'(t) + \lambda(t)\phi''(t)\right] + \\ b(t)\left[\lambda'(t)\phi(t) + \lambda(t)\phi'(t)\right] + c(t)\lambda(t)\phi(t) = 0$$

ce qui, compte tenu du fait que ϕ est solution, se résume à

$$\forall t \in I \qquad a(t)\left[\lambda''(t)\phi(t) + 2\lambda'(t)\phi'(t)\right] + b(t)\lambda'(t)\phi(t) = 0$$

Or ceci est une équation du premier ordre en λ', que l'on sait donc résoudre, et qui après primitivation nous donnera λ.

b. Un exemple classique : les fonctions de Bessel

Si la « fonction spéciale » la plus importante des mathématiques est à notre niveau la fonction Γ, pour les applications à la Physique les fonctions de Bessel

sont plus importantes.
On considère l'équation

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

où ν est un réel positif. On résout sur $\mathbf{R}_*^+$.

1. Démontrer qu'il y a une unique solution de la forme $J_\nu = t^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ où $a_0 = 1$. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?
2. Dans le cas $\nu = 1/2$, exprimer toutes les solutions de l'équation au moyen des fonctions usuelles.

IV.5 Résolution de l'équation complète

a. La théorie (à connaître...)

On suppose connu un système fondamental (ϕ, ψ) de solutions de (H) ; la méthode de variation de la constante consiste en la recherche d'une solution f de (E) sous la forme

$$f \ : \ t \longmapsto \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

avec la condition additionnelle

$$\forall t \in I \quad \lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0$$

Les calculs mènent alors à un système de Cramer puis à une recherche de primitive.

Il faut parfaitement connaître cette condition additionnelle. Elle peut paraître artificielle a priori, la théorie des systèmes linéaires montre qu'il n'en est rien. C'est la seule « variation des constantes » qui demande un réel effort d'apprentissage

b. Un exemple

Un exercice d'oral assez classique demande :

Exercice : Montrer que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, et si

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f''(t) + f(t) \geq 0$$

Alors

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f(t) + f(t+\pi) \geq 0$$

1. A l'oral, si on ne sait pas comment faire, on peut toujours examiner des cas particuliers. Que penser, par exemple, du cas où il y aurait égalité dans l'inégalité de départ ?
2. On n'a jamais vu d'inéquation différentielle. L'examinateur risque alors d'être obligé de donner l'idée simple et utile de traduire l'hypothèse de la manière suivante :
   f est solution d'une équation différentielle $x'' + x = g(t)$ où g est une fonction continue ≥ 0. Résoudre
   $$x'' + x = g(t)$$
   par la méthode de variation de la constante, et déterminer une fonction k telle que les solutions s'expriment sous la forme
   $$t \longmapsto \int_0^t k(t-u)g(u)du + \alpha \cos t + \beta \sin t$$
3. Conclure

c. Le lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall est très présent dans les études d'équations différentielles. On le rencontre donc dans des problèmes. La plupart du temps il est résolu par des méthodes très artificielles (l'énoncé donne l'astuce et c'est facile, ou l'énoncé ne donne pas l'astuce et on ne peut pas trouver si on ne l'a pas *fait avant. Voici une présentation basée sur le principe de l'exercice précédent, avec des « inéquations différentielles ».*

Soit k une fonction continue positive sur $\mathbf{R}^+$, f une fonction continue sur $\mathbf{R}^+$ telle que, pour tout t positif :

$$f(t) \leq a + \int_0^t k(u) f(u) du$$

On veut démontrer qu'alors, pour tout réel positif t :

$$f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t k(u) du\right)$$

(« lemme de Gronwall »). Pour cela, on pose

$$g \ : \ t \longmapsto a + \int_0^t k(u) f(u) \mathrm{d}u$$

1. Montrer que g vérifie l'« inéquation différentielle »

$$\forall t \geq 0 \qquad g'(t) \leq k(t) \ g(t)$$

2. On réécrit l'inéquation précédente sous la forme d'une équation

$$g'(t) = k(t) g(t) + u(t)$$

où $u \leq 0$ (voir idée de l'exercice précédent !). Résoudre

$$y' = k(t) y + u(t)$$

et conclure.

Table des matières