C13 : Equations différentielles linéaires (théorie)

On désigne par **K** le corps **R** ou le corps **C**.

I Le théorème d'existence et d'unicité

I.1 Position du problème

On s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ x_2' & = & a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t) \end{cases}$$

(Les $a_{i,j}$ et les b_i sont des fonctions données). On cherche les solutions d'un tel système, c'est-à-dire les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_n$ dérivables sur un certain intervalle I telles que, pour tout t dans I,

$$\begin{cases} \phi_1'(t) & = & a_{1,1}(t)\phi_1(t) + a_{1,2}(t)\phi_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)\phi_n(t) & + & b_1(t) \\ \phi_2'(t) & = & a_{2,1}(t)\phi_1(t) + a_{2,2}(t)\phi_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)\phi_n(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \phi_n'(t) & = & a_{n,1}(t)\phi_1(t) + a_{n,2}(t)\phi_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)\phi_n(t) & + & b_n(t) \end{cases}$$

I.2 Ecriture matricielle

Le système précédent s'écrit, de manière plus synthétique,

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{E}$$

où A est la fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les fonctions composantes dans la base canonique sont les $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, autrement dit
$A : t \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(J, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$

et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0\left(J, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\right)$ (J est un intervalle de $\mathbf{R}$).

La fonction inconnue est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(J, \mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$.

Une solution de (E), c'est une application $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$ au moins dérivable sur un intervalle $I \subset J$ et vérifiant

$$\forall t \in I \qquad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + B(t)$$

I.3 Résolution effective ?

On ne sait pas faire, en général, sauf si $n = 1$ (cas « scalaire ») ou si A est constant. Voir chapitre C14.

I.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème

(dit d'existence et d'unicité, ou de Cauchy-Lipschitz, ou de Cauchy-Lipschitz linéaire) :

Hypothèses : Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, A et B deux applications continues sur J, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ respectivement.

Conclusion : Si $t_0 \in J$, $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Il existe une solution unique Φ de l'équation $X' = A(t)X + B(t)$, définie sur J et prenant en t_0 la valeur X_0.

Reformulation Si $A : J \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B : J \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont continues sur l'intervalle J, alors le « problème de Cauchy »

$$\begin{cases} \forall t \in J \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

a, pour tout $t_0 \in J$ et tout $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, une solution X unique.

Remarque Comme tous les théorèmes qui ont peu d'hypothèses, il ne faut surtout pas en oublier. Ne pas oublier donc les hypothèses A et B continues, et J intervalle.

Démonstration On commence par transformer le problème de Cauchy en « équation intégrale » : Φ est une solution du problème de Cauchy énoncé ci-dessus si et seulement si Φ est continue sur J et vérifie

$$\forall t \in J \qquad \Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] du$$

On définit alors l'application T, qui à une application Φ continue de J dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, associe

$$T(\Phi) : t \longmapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] du$$

Il est assez clair que T est une application de $\mathscr{C}\big(J, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\big)$ dans lui-même. On cherche un point fixe de T... *On ne dispose pas des outils adaptés pour aller commodément plus loin...hors-programme.*

I.5 Quelques applications

Le théorème d'existence et d'unicité est assez souvent utilisé. D'ailleurs assez souvent pour l'existence ou pour l'unicité, pas forcément les deux à la fois. Donnons deux ou trois exemples pour commencer.

a. Un lemme utile (« jamais nulle ou toujours nulle »)

Soit $\Phi : J \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

où $A : J \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est continue sur l'intervalle J. Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$).

b. Une propriété importante

On considère deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $AB = BA$. On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, etc...On définit, sur $\mathbf{R}$,

$$\Phi_1(t) = \exp\left(t(A+B)\right) E_1$$

1. Calculer $\Phi_1(0)$. Trouver un système différentiel vérifié par Φ_1.
2. On note $\Psi_1(t) = \exp(tA)\ \exp(tB)\ E_1$. Calculer $\Psi_1(0)$ et montrer que Ψ_1 vérifie le même système que Ψ_1.
3. Que peut-on conclure ? Peut-on en déduire $\forall t \in \mathbf{R} \quad \exp\left(t(A+B)\right) = \exp(tA)\ \exp(tB)$?

c. Un problème de périodicité

Soit T un réel > 0, $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $B : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ continues et T-périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur $\mathbf{R}$ de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$ [Indication : on remarquera que Φ est T-périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi : t \mapsto \Phi(t+T)$].

II Structure de l'espace des solutions

II.1 Equation homogène

On nomme (E) l'équation « complète » $X' = A(t)X + B(t)$ et
(H) l'équation « homogène associée » : $X' = A(t)X$.
On évitera d'appeler « sans second membre » l'équation homogène, cette appellation traditionnelle ayant l'inconvénient d'être absurde.
On note S_E l'ensemble des solutions de (E), S_H l'ensemble des solutions de (H).

II.2 Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène

Théorème

Si $A : J \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B : J \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont continues sur l'intervalle J, alors S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(J, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, et $\dim(S_H) = n$.

Démonstration Commençons par remarquer que si Φ est une solution de (H) sur J, elle est au moins dérivable par définition, a fortiori continue. Mais alors, comme

$$\forall t \in J \qquad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

la dérivée Φ' est continue (A et Φ le sont), donc Φ est C^1.

Si Φ et Ψ sont solutions de (H), si $\lambda \in \mathbf{K}$, alors de

$\forall t \in J \quad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \qquad$ et $\qquad \forall t \in J \quad \Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$

on déduit $\forall t \in J \quad (\Phi + \lambda\Psi)'(t) = A(t)(\Phi + \lambda\Psi)(t)$.

De plus $\widetilde{(0)}$ est clairement dans S_H, qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(J, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Reste à montrer qu'il est de dimension n, mais c'est facile :

Théorème : Pour tout $t_0 \in J$, et tout $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, l'application $\Phi \longmapsto \Phi(t_0)$ est un isomorphisme de S_H sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

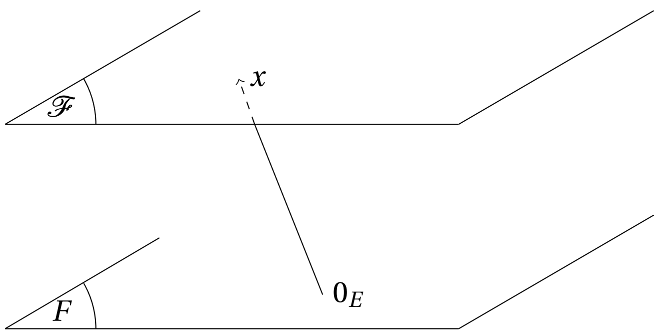
Démonstration : La linéarité est simple. Le théorème d'existence et d'unicité donne la bijectivité. On a donc beaucoup d'isomorphismes entre S_H et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$

II.3 Solutions de l'équation complète :

Définition On dit que la partie $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E est un sous-espace affine de E lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel F de E et un $x \in E$ tels que

$$\mathscr{F} = x + F = \{x + u\ ;\ u \in F\}$$

F est alors unique, et est appelé direction de $\mathscr{F}$. En revanche, pour n'importe quel $x \in \mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} = x + F$.



Théorème : L'ensemble S_E des solutions de l'équation « complète » (E) est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(J, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, de direction S_H, donc de dimension n.

II.4 Système fondamental de solutions

Définition : On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène toute base $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ de S_H.

Le problème est que l'on ne sait en général pas en déterminer un! Dans le cas général, cela reste donc un outil assez théorique.

Exemple : Trouver un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) & = tx(t) - y(t) \\ y'(t) & = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

(on pourra chercher un système dont sont solutions les fonctions $u\ :\ t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v\ :\ t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$

II.5 Méthode de résolution de l'équation complète (si. . .)

On suppose connu un système fondamental $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ de solutions de (H) sur J ; l'espace des solutions de (H) est alors

$$\{\lambda_1\Phi_1 + \cdots + \lambda_n\Phi_n\ ;\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\}$$

On cherchera alors une solution de (E) sous la forme

$$\Psi\ :\ t \longmapsto \lambda_1(t)\Phi_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)\Phi_n(t)$$

où les λ_i sont des fonctions inconnues, dérivables sur J, à valeurs dans $\mathbf{K}$.
On peut alors dériver :

$$\forall t \in J \qquad \Psi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i'(t)\Phi_i(t) + \lambda_i(t)\Phi_i'(t)\right)$$

Ψ vérifie (E) si et seulement si

$$\forall t \in J \qquad \Psi'(t) = A(t)\Psi(t) + B(t)$$

Mais pour tout k on a $\Phi'_k(t) = A(t)\Phi_k(t)$. Donc après simplification, Ψ vérifie (E) si et seulement si

$$\forall t \in J \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i(t)\Phi_i(t) \ = \ B(t)$$

Or, pour tout $t \in J$, la famille $(\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t))$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Ce n'est pas a priori évident, mais c'est une conséquence du lemme « jamais nulle ou toujours nulle » appliqué à une combinaison linéaire des Φ_k. On peut donc, pour tout t, décomposer $B(t)$ sur cette base : $B(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\Phi_i(t)$.
Ψ vérifie donc (E) si et seulement si, pour tout i, $\lambda_i(t) = \int \beta_i(t)\, dt$.
En conclusion, si on sait résoudre (H), on sait résoudre (E). La méthode que l'on vient de voir s'appelle méthode de variation des constantes : les constantes λ_i ont été remplacées par des fonctions inconnues $t \mapsto \lambda_i(t)$.
Là s'arrête le cours ! on ne va dorénavant faire que décliner les deux résultats essentiels, théorème d'existence et d'unicité, dans différents contextes.

III Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

III.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème

(dit d'existence et d'unicité, ou de Cauchy-Lipschitz, ou de C-L linéaire) :

Hypothèses : Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, a et b deux applications continues sur J, à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Conclusion : Si $t_0 \in J$ et $x_0 \in \mathbf{K}$, il existe une solution unique ϕ de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$, définie sur J et prenant en t_0 la valeur x_0.

Reformulation Si $a : J \longrightarrow \mathbf{K}$ et $b : J \longrightarrow \mathbf{K}$ sont continues sur l'intervalle J, alors le « problème de Cauchy »

$$\begin{cases} \forall t \in J \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a, pour tout $t_0 \in J$ et tout $x_0 \in \mathbf{K}$, une solution x unique.

En fait, on utilise plutôt les écritures suivantes, pour les équations scalaires d'ordre 1 :

Théorème

Hypothèses : Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, a, b et c trois applications continues sur J, à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On suppose que $\forall x \in J \quad a(x) \neq 0$.

Conclusion : Si $x_0 \in J$ et $y_0 \in \mathbf{K}$, il existe une solution unique ϕ de l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, définie sur J et prenant en x_0 la valeur y_0.

Reformulation Si $a, b, c : J \longrightarrow \mathbf{K}$ sont continues sur l'intervalle J et si a ne s'annule pas sur J, alors le « problème de Cauchy »

$$\begin{cases} \forall x \in J \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a, pour tout $x_0 \in J$ et tout $y_0 \in \mathbf{K}$, une solution y unique.

Ne pas oublier, sous cette forme, la condition de non annulation de a!

III.2 Structure

On nomme (E) l'équation « complète » $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et
(H) l'équation « homogène associée » : $a(x)y' + b(x)y = 0$.
On note S_E l'ensemble des solutions de (E), S_H l'ensemble des solutions de (H).

Théorème

Si $a, b, c : J \longrightarrow \mathbf{K}$ sont continues sur l'intervalle J, et si a ne s'annule pas sur J, alors S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathscr{C}^1(J, \mathbf{K})$ (i.e. une droite vectorielle).

Théorème : L'ensemble S_E des solutions de l'équation « complète » (E) est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(J, \mathbf{K})$, de direction S_H, donc de dimension 1 (i.e. une droite affine).

III.3 Méthode de variation de la constante

Si ϕ est une solution de l'équation (H), non nulle (donc ne s'annulant pas! car une solution de (H) qui prend en un point la valeur 0 est nécessairement nulle), on a

$$S_H = \{x \mapsto \alpha\phi(x)\ ;\ \alpha \in \mathbf{K}\} = \mathrm{Vect}(\phi)$$

On cherche alors une solution de (E) sous la forme

$$x \longmapsto \alpha(x)\phi(x)$$

(variation de la constante). La fonction $\psi\ :\ x \mapsto \alpha(x)\phi(x)$ est solution de (E) si et seulement si
$\forall x \in J \qquad \phi(x)\ \alpha'(x) = c(x)$ ce qui ramène la détermination de α à un calcul de primitive.

IV Equations linéaires scalaires d'ordre 2

IV.1 Position du problème, système associé

Ici, a, b, c, d désignent quatre applications continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$. On s'intéresse à l'équation différentielle, dite linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \tag{E}$$

(parfois écrite $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, tout dépend du nom que l'on veut donner à la variable et à la fonction inconnue)
et on suppose « comme d'habitude » que a ne s'annule pas sur I (très important).
On peut alors écrire (E) sous la forme équivalente

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\dfrac{b(t)}{a(t)}y - \dfrac{c(t)}{a(t)}x + \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{cases}$$

ou encore

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{$EMat$}$$

avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c(t)}{a(t)} & -\dfrac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

L'essentiel est de remarquer que ϕ vérifie (E) si et seulement si $\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}$ vérifie $(EMat)$.

IV.2 Existence et unicité

On peut alors appliquer les résultats vus pour les systèmes linéaires :

Théorème d'existence et d'unicité (alias de Cauchy-Lipschitz, alias de C.L. linéaire) :

Hypothèses : a, b, c, d sont continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, a ne s'annule pas sur I.
Conclusion : Soit t_0 un élément de I, (x_0, x_0') un couple d'éléments de $\mathbf{K}$. Il existe une solution unique de l'équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$, ϕ, définie sur I et vérifiant $\phi(t_0) = x_0$ et $\phi'(t_0) = x_0'$.

(Rappel : a ne s'annule pas sur I)

On constate en effet que la condition initiale $\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ s'écrit
$\phi(t_0) = x_0$, $\phi'(t_0) = x_0'$.

Insistons : le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in J \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \\ \qquad\qquad x(t_0) = x_0 \ , \ x'(t_0) = x_0' \end{cases}$$

où a, b, c, d sont continues sur J, a ne s'annulant pas, a une solution unique, pour tout $t_0 \in J$, pour tous x_0 et x_0' dans $\mathbf{K}$.
L'erreur (assez fréquente) consistant à penser que la condition $x(t_0) = x_0$ suffit pour assurer l'unicité, en oubliant la condition sur $x'(t_0)$, est particulièrement incompréhensible quand on a fait un peu de Physique...
On rencontre une autre erreur, plus compréhensible : penser que le problème

$$\begin{cases} \forall t \in J \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \\ \qquad\qquad x(t_0) = x_0 \ , \ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

a une solution unique. Résultat faux, problème intéressant !

IV.3 Structure

Théorème On note (H) l'équation

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$$

et S_H l'ensemble de ses solutions sur I. Si on suppose que a, b, c sont continues sur I et que a ne s'annule pas, alors S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$.

Supplément Pour tout élément t_0 de I, l'application $\phi \mapsto \big(\phi(t_0), \phi'(t_0)\big)$ est un isomorphisme de S_H sur $\mathbf{K}^2$.

Théorème : Si on suppose que a, b, c, d sont continues sur I et que a ne s'annule pas sur I, l'ensemble S_E des solutions de l'équation $(E)\ :\ a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$ de dimension 2, de direction S_H.

(Insistons encore sur le fait que tous ces résultats ne sont valables que si a ne s'annule pas sur I).

IV.4 Wronskien de deux solutions de (H)

a. Définition

Le couple (ϕ, ψ) est un système fondamental de solutions de (H) (i.e. une base de S_H) si et seulement si $\left(\begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}\right)$ est un système fondamental de solutions de

$$X' = A(t)X \qquad (HMat)$$

ce qui conduit à définir le wronskien de ϕ et ψ :

Définition Si ϕ, ψ sont deux solutions de (H) sur I, on définit sur I leur wronskien :

$$w(\phi,\psi)\ :\ t \longmapsto \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)$$

b. Utilisation

Proposition Soit ϕ, ψ deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0 \qquad (H)$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I. On note $w = w(\phi,\psi)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (ϕ,ψ) est une base de S_H.

(ii) $\forall\, t \in I \quad w(t) \neq 0$.

(iii) $\exists\, t \in I \quad w(t) \neq 0$.

Pour la démonstration, il peut être intéressant de calculer w' et d'écrire une équation homogène dont w est solution.

IV.5 Existence et unicité, wronskien : quelques questions

a. Un principe

Le théorème d'unicité dit que si deux fonctions vérifient la même équation différentielle avec mêmes conditions initiales, si les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont réalisées, alors les deux fonctions sont égales.
Pour une fonction ϕ solution d'une équation différentielle, on aura donc intérêt à traduire…

• « ϕ est paire » par $\phi = \psi$, où $\psi \ : \ t \mapsto$

• « ϕ est T-périodique » par $\phi = \psi$, où $\psi \ : \ t \mapsto$

b. Dans un problème d'Ecrit

Soit a une fonction continue sur $\mathbf{R}$, paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution de l'équation

$$y'' + a(x)y = 0$$

est impaire si et seulement si elle vérifie $y(0) = 0$.

c. Dans un problème d'Ecrit

Soit a, b deux fonctions T-périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution de l'équation

$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$

est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$.

d. Un wronskien particulièrement simple

Calculer $w\,(t \mapsto \cos(\omega t), t \mapsto \sin(\omega t))$ $(\omega > 0)$. On en déduit que ces deux fonctions forment un système fondamental de solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$.

e. Remarque

Soit (ϕ, ψ) un couple de solutions d'une équation homogène

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \tag{H}$$

où a, b, c sont continues sur un intervalle I, a ne s'annulant pas sur I. Rappel : si, en un point t_0, $\phi(t_0) = \psi(t_0)$, cela n'implique pas du tout $\phi = \psi$. On peut même avoir ϕ et ψ linéairement indépendantes avec pourtant $\phi(t_0) = \psi(t_0)$. Exemple :

Montrer néanmoins que deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent pas s'annuler en un même point t_0.

f. Un cas particulier intéressant

Le wronskien de deux solutions de l'équation (dite newtonienne)

$$x'' + q(t)x = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple. Déterminer cette équation.

g. Dans un problème d'écrit

On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soit (ϕ, ψ) une base de l'espace des solutions de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Montrer que ϕ et ψ ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).

h. Un exercice d'oral

Exercice (Oral Mines) Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbf{Z}$.

IV.6 Méthode de variation des constantes

Méthode Supposons connu un système fondamental (ϕ, ψ) de solutions de (H) (i.e. une base de S_H, i.e. deux solutions ϕ et ψ de (H) telles que $w(\phi, \psi) \neq 0)$; la méthode de variation de la constante consiste en la recherche d'une solution f de (E) sous la forme

$$f \; : \; t \longmapsto \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

(où λ et μ sont deux fonctions inconnues, supposées au moins deux fois dérivables) avec la condition additionnelle

$$\forall t \in I \quad \lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0$$

Calculs On a alors, successivement :

$\forall t \in I \quad f'(t) = \lambda(t)\phi'(t) + \mu(t)\psi'(t)$

$\forall t \in I \quad f''(t) = \lambda'(t)\phi'(t) + \lambda(t)\phi''(t) + \mu'(t)\psi'(t) + \mu(t)\psi''(t)$

Et donc f vérifie (E) si et seulement si

$$\forall t \in I \quad a(t)\left[\lambda'(t)\phi'(t) + \lambda(t)\phi''(t) + \mu'(t)\psi'(t) + \mu(t)\psi''(t)\right] + b(t)\left[\lambda(t)\phi'(t) + \mu(t)\psi'(t)\right]$$
$$+ c(t)\left[\lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)\right] = d(t)$$

Mais ϕ et ψ vérifiant (H), la conditiion ci-dessus se réduit à

$$\forall t \in I \quad a(t)\left[\lambda'(t)\phi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) + \right] = d(t)$$

En se souvenant de la condition additionnelle, cela donne

$$\forall t \in I \qquad \begin{cases} \phi'(t)\lambda'(t) + \psi'(t)\mu'(t) & = & \dfrac{d(t)}{a(t)} \\ \phi(t)\lambda'(t) + \psi(t)\mu'(t) & = & 0 \end{cases}$$

Les inconnues sont $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, on obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont le déterminant, qui vaut $w(\phi,\psi)(t)$ au signe près, est non nul. On trouve donc (solution unique) $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, il n'y a plus qu'à primitiver.

A propos de la condition additionnelle Il est recommandé de savoir écrire cette condition additionnelle directement, on la retrouve en disant qu'on cherche une solution de $(EMat)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \lambda(t)\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}$$

On aboutit à un système linéaire de deux équations à deux inconnues μ' et λ', dont le déterminant est. . .le wronskien. Donc un système de Cramer, qu'on peut résoudre, et qui donne μ' et λ', par suite μ et λ par primitivation.

V Equations différentielles linéaires d'ordre ≥ 2

Bien entendu, rien n'empêche d'écrire l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$$

sous la forme

$$Y' = A(x)Y + B(x)$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}$$

$A(x) =$ $B(x) =$

ce qui permet de transcrire les résultats sur les systèmes différentiels en termes d'équations différentielles linéaires scalaires :

Proposition Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, si $x_0 \in I$, si $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, il existe une unique solution ϕ sur I de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x) \qquad (E)$$

telle que $\phi(x_0) = y_0$, $\phi'(x_0) = y_1, \ldots, \phi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Les solutions de (E) forment un espace affine de dimension n, de direction l'espace des solutions de

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x) \qquad (H)$$

.

VI Le langage vectoriel

X-ens, et encore, récemment, à un problème ens, les systèmes étaient écrits sous forme matricielle. Si la lecture de ce qui suit est recommandée à toutes et tous, on n'est pas obligé de s'en préoccuper longuement.

VI.1 Une notation

Il arrive, pour éviter de surcharger en parenthèses les expressions, que l'on note $f.x$ au lieu de $f(x)$, f étant une application et x un élément de sa « source ». Cette notation est par exemple fréquemment utilisée pour la différentielle.

VI.2 Ecriture vectorielle

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $t \mapsto a(t)$ une application continue sur J à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$. b est une application continue sur J à valeurs dans E. On appelle solution de l'équation différentielle

$$x' = a(t).x + b(t) \tag{E_V}$$

toute application ϕ dérivable sur un intervalle I inclus dans J, à valeurs dans E, et telle que

$$\forall t \in I \quad \phi'(t) = a(t).\phi(t) + b(t)$$

ce qui est une écriture, donc, de

$$\forall t \in I \quad \phi'(t) = a(t)\big(\phi(t)\big) + b(t)$$

VI.3 Théorème d'existence et d'unicité, version vectorielle

Théorème : Soit t_0 un élément de J, x_0 un élément de E. Il existe une solution unique de (E_V), ϕ, définie sur J et prenant en t_0 la valeur x_0.

On continue à appeler ce résultat **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**, ou **théorème d'existence et d'unicité**.

VI.4 Structure de l'espace des solutions

Solutions de l'équation homogène :

On note (H_V) l'équation

$$x' = a(t).x$$

et S_H l'ensemble de ses solutions. Il est clair que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(J,E)$.

Théorème : Pour tout élément t_0 de J, et tout élément x_0 de E, notons ϕ_{t_0,x_0} l'unique solution de (H_V) définie sur J et prenant en t_0 la valeur x_0. Pour tout $t_0 \in J$, l'application $\phi \longmapsto \phi(t_0)$ est un isomorphisme de S_H sur E. L'isomorphisme réciproque est $x_0 \longmapsto \Phi_{t_0,x_0}$.

S_H est un espace vectoriel de dimension n ($\dim E = n$).

Solutions de l'équation complète :

Théorème : L'ensemble S_E des solutions de l'équation E_V est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(J,E)$ de dimension n.

VI.5 Système fondamental de solutions

a. Système fondamental de solutions

Définition : On appelle système fondamental de solutions de l'équation **homogène** toute base $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de S_H.

On ne sait pas davantage en déterminer un que sous la forme matricielle

VI.6 Résolution de l'équation complète dans le cas vectoriel

Supposons connu un système fondamental $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de solutions de (H) ; l'espace des solutions de (H) est $\{\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_n\phi_n \ ; \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\}$. On cherchera alors une solution de (E) sous la forme

$$\psi \ : \ t \longmapsto \lambda_1(t)\phi_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)\phi_n(t)$$

où les λ_i sont des fonctions inconnues à valeurs dans $\mathbf{K}$.
ψ vérifie (E) si et seulement si, pour tout t dans J, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\phi_i(t) \ = \ b(t)$.
Or, pour tout $t \in J$, la famille $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ est une base de E (même justification que pour le cas matriciel). On peut donc, pour tout t, décomposer $b(t)$ sur cette base : $b(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\phi_i(t)$.
ψ vérifie donc (E) si et seulement si, pour tout i, $\lambda_i(t) = \displaystyle\int \beta_i(t)\,dt$.

Table des matières