

C11-12 Fonctions de plusieurs variables

I Exercices ccp 2019

Analyse 52

1. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
 - (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien \mathbb{R}^2 .
 - (b) Déterminer α pour que f soit continue sur \mathbb{R}^2 .
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
 - (a) Justifier l'existence et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
 - (b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur
 - (c) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Analyse 57

1. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
 - (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
 - (b) Donner la définition de " f différentiable en $(0, 0)$ ".
2. On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par
$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
 - (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
 - (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Analyse 58

1. Soit E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Donner la définition de " f différentiable en a ".

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On pose : $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On pose : $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

(a) Prouver que $\exists C \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

(b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

II Un ancien exercice ccp 8 pts

Ex-Analyse 50

On pose $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1 Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2 Démontrer que f admet des D.P. en tout point de \mathbb{R}^2 .

Pour la continuité, passer en polaires.

Pour les dérivées partielles, calcul direct en tout point autre que $(0, 0)$; en $(0, 0)$, retour à la définition (dérivées en 0 de $x \mapsto f(x, 0)$ et de $y \mapsto f(0, y)$).

III Différentielle, dérivées partielles

- L'existence des dérivées partielles ou des dérivées suivant tout vecteur ne suffit pas pour affirmer la différentiabilité.
- Pour montrer qu'une application est de classe C^1 , on peut étudier les dérivées partielles et montrer leur continuité.
- On peut aussi (moins souvent) chercher directement la différentielle (en revenant à sa définition); on en déduit les dérivées partielles (ce sont les images des vecteurs de la base par la différentielle) et on montre la continuité.

— On peut aussi, réciproquement, déduire la différentielle du calcul des dérivées partielles (lorsque celles-ci sont continues).

Exercice 1 (Oral Mines). Dans un espace euclidien E , montrer que l'application $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0_E\}$ et calculer sa différentielle.

[On utilisera deux méthodes : calcul direct de la différentielle (retour à la définition), et calcul des dérivées partielles, relatives à une base qu'on a évidemment intérêt à choisir orthonormale]

Soit $x \neq 0_E$. Au voisinage de 0_E (pour h), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x+h\|^2}(x+h) &= \frac{1}{\|x\|^2 + 2(x|h) + \|h\|^2}(x+h) \\ &= \left[\frac{1}{\|x\|^2} \times \frac{1}{1 + 2\frac{(x|h)}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}} \right] (x+h) \\ &= \left[\frac{1}{\|x\|^2} \times \left(1 - 2\frac{(x|h)}{\|x\|^2} + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(h) \right) \right] (x+h) \quad (DL_0 \text{ de } u \mapsto 1/(1+u)) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}x + \frac{1}{\|x\|^2}h - 2\frac{(x|h)}{\|x\|^4}x + \underset{h \rightarrow 0_E}{o}(h) \end{aligned}$$

ce qui conclut... La différentielle étant, en tout $x \neq 0_E$,

$$df(x) : h \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2}h - 2\frac{(x|h)}{\|x\|^4}x$$

bien sûr, à l'oral, on peut avoir des questions sur la justification plus détaillée des o , mais ce n'est pas spécialement difficile.

Avec les dérivées partielles, c'est plus simple. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E , notons $\frac{\partial}{\partial x_i}$ les dérivations partielles associées. Comme

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

on trouve facilement, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{-2x_i}{\|x\|^4}x + \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2}e_i$$

(dérivation par bilinéarité), d'où, toutes les dérivées partielles étant de classe C^1 , la différentiabilité en tout point, avec une différentielle :

$$df(x) : h \mapsto \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

si $h = \sum h_i e_i$. On retrouve bien le même résultat.

Exercice 2. Calculer en tout point la différentielle de $f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M \longmapsto M^2 \end{array} \right.$

puis celle de $g \left| \begin{array}{l} \mathcal{GL}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbf{R}) \\ M \longmapsto M^{-2} \end{array} \right.$

Calculer la dérivée en 0 de l'application $g \left| \begin{array}{l} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbf{R}) \\ s \longmapsto (I_n + sM)^{-1} \end{array} \right.$

où \mathcal{V} est un voisinage convenable de 0.

Exercice 3. Calculer la différentielle de l'application qui, à toute matrice inversible, associe son déterminant : on l'exprimera à l'aide de la trace et en faisant intervenir la comatrice, et pour cela on commencera par calculer les dérivées partielles. En quels points cette différentielle est-elle nulle ?

Exercice 4 (Oral X). Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose

$$f(M) = (\text{tr } M, \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n))$$

1. Montrer que f est différentiable, et calculer $df(M).H$ pour toutes matrices H et M .
2. Montrer que le rang de $df(M)$ est le degré du polynôme minimal de M .
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est ouvert.

Remarquons d'abord que, par distributivité, si $k \geq 2$,

$$(M + H)^k = \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{0,1\}^k} M^{\epsilon_1} H^{1-\epsilon_1} M^{\epsilon_2} H^{1-\epsilon_2} \dots M^{\epsilon_k} H^{1-\epsilon_k}$$

(on pourrait presque se permettre l'écriture

$$(M + H)^k = \underbrace{(M \text{ ou } H) \times (M \text{ ou } H) \times \dots \times (M \text{ ou } H)}_{k \text{ fois}} \quad)$$

Or, s'il y a au moins deux ϵ_i égaux à 0,

$$M^{\epsilon_1} H^{1-\epsilon_1} M^{\epsilon_2} H^{1-\epsilon_2} \dots M^{\epsilon_k} H^{1-\epsilon_k} = \underset{H \rightarrow (0)}{o} (H)$$

(se précise facilement en utilisant une norme sous-multiplicative). Et comme la trace est continue (linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui est de dimension finie), il existe k tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad |\operatorname{tr}(A)| \leq k \|A\|$$

ce qui montre que, si au moins deux ϵ_i sont égaux à 0,

$$\operatorname{tr}(M^{\epsilon_1} H^{1-\epsilon_1} M^{\epsilon_2} H^{1-\epsilon_2} \dots M^{\epsilon_k} H^{1-\epsilon_k}) = \underset{H \rightarrow (0)}{o} (H)$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((M+H)^k) &= \operatorname{tr}(M^k) + \sum_{i=1}^k \operatorname{tr}(M^{i-1} H M^{k-i}) + \underset{H \rightarrow (0)}{o} (H) \\ &= \operatorname{tr}(M^k) + k \operatorname{tr}(M^{k-1} H) + \underset{H \rightarrow (0)}{o} (H) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$df(M).H = (\operatorname{tr}(H), 2\operatorname{tr}(MH), \dots, n\operatorname{tr}(M^{n-1}H))$$

Pour calculer le rang de $df(M)$, on cherche par exemple son noyau. On remarque successivement :

$$H \in \operatorname{Ker}(df(M)) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \operatorname{tr}(M^k H) = 0$$

puis, par combinaison linéaire :

$$H \in \operatorname{Ker}(df(M)) \Leftrightarrow \forall P \in \mathbf{R}_{n-1}[X] \quad \operatorname{tr}(P(M)H) = 0$$

puis, en utilisant la division euclidienne de P par le polynôme minimal de M , voire par son polynôme caractéristique (en tout cas par un polynôme annulateur de degré $\leq n$) :

$$H \in \operatorname{Ker}(df(M)) \Leftrightarrow \forall P \in \mathbf{R}[X] \quad \operatorname{tr}(P(M)H) = 0$$

Ceci signifie que

$$H \in \operatorname{Ker}(df(M)) \iff H^T \in \mathbf{R}[M]^\perp$$

en considérant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On en déduit assez aisément que $\operatorname{rg}(df(M))$ est bien le degré du polynôme minimal de M . Il reste à montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) ; \operatorname{rg}(df(M)) = n\}$ est ouvert. Or c'est l'image réciproque par df , continue (car f est clairement C^1) de $\{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{R}^n) ; \operatorname{rg}(u) = n\}$. Le fait que ce dernier ensemble soit un ouvert est plus facile à voir matriciellement :

$$\{A \in \mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbf{R}) ; \operatorname{rg}(A) = n\}$$

est ouvert. En effet, si A est dans cet ensemble, on peut sélectionner n colonnes de A définissant une matrice extraite inversible. Au voisinage de A , par continuité du déterminant, cette même matrice extraite restera inversible (exercice fait : c'est la semi-continuité inférieure du rang, on montre plus généralement qu'en toutes circonstances,

$$\{A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R}) ; \text{rg}(A) \geq r\}$$

est un ouvert, en s'aidant que d'une matrice de cet ensemble on peut toujours extraire une matrice carrée $r \times r$ inversible, et en utilisant la continuité du déterminant.

Exercice 5 (différentielle d'une forme quadratique).

1. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$; on considère l'application f qui, à tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ associe le nombre réel ${}^t X A X$. Calculer sa différentielle, directement d'une part, en utilisant les dérivées partielles d'autre part. Exprimer $df(X).X$ en fonction de $f(X)$.
2. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique ; quel est le gradient de f en X ?
3. Soit f une application définie sur un e.v.n. E , à valeurs dans un e.v.n., de classe C^1 , vérifiant pour tout réel t : $f(tx) = t^c f(x)$. Calculer $df(x).x$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 6 (différentielle d'un produit scalaire). Vérifier que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définie sur $E \times E$ (où E est un espace euclidien) est différentiable et calculer sa différentielle.

Si f est un endomorphisme de E , même question pour l'application $x \mapsto \langle x, f(x) \rangle$ définie sur E à valeurs dans \mathbf{R} .

Exercice 7 (Gradient en polaires). Soit f une fonction définie sur un espace euclidien de dimension 2 orienté, de classe C^1 , à valeurs réelles. On définit, sur $\mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}$,

$$F : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta \vec{u} + r \sin \theta \vec{v}) .$$

où (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormale directe de E . En un point $x \vec{u} + y \vec{v} = r \cos \theta \vec{u} + r \sin \theta \vec{v}$, exprimer ∇f à l'aide des dérivées partielles de F . On

donnera le résultat décomposé dans la base orthonormale directe $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ où $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}$ et $\vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\pi/2}$

Exercice 8 (Laplacien en polaires). Soit f une fonction de classe C^2 sur un disque ouvert de centre l'origine dans \mathbf{R}^2 . On définit la fonction g par $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Exprimer le laplacien de f en fonction des dérivées partielles premières et secondes de g .

On notera $(.)$ le couple $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Par composition, g est de classe C^2 sur un ouvert $] -r, r[\times \mathbf{R}$, et, sur cet ouvert :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) &= -\rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) + \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) &= \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cdot) \right] + \sin \theta \left[\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) \right] \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cdot) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot)\end{aligned}$$

(en utilisant le théorème de Schwarz). Puis, après simplification et, aussi, utilisation du théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) = -\rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) - \rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot) + \rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) - 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cdot) + \rho^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot)$$

On ne calcule pas la dérivée seconde « croisée » (pas utile). On voit, si $\rho \neq 0$, que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) = \Delta f(\cdot) - \frac{1}{\rho} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot)$$

d'où le résultat :

$$\Delta f(\cdot) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)$$

Exercice 9 (Oral X).

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbf{C} , f une fonction de Ω dans \mathbf{C} . On dit que f est \mathbf{C} -dérivable au point z_0 de \mathbf{C} si $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ tend vers une limite finie quand $z \rightarrow z_0$.

1. Montrer que $z \mapsto z^2$ et \exp sont \mathbf{C} -dérivables en tout point de \mathbf{C} .

2. La conjugaison complexe est-elle \mathbf{C} -dérivable en un point z_0 de \mathbf{C} ?
3. On note $\Omega' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x + iy \in \Omega\}$ et on pose $F(x, y) = f(x + iy)$ pour (x, y) dans Ω' . On écrit $F = U + iV$ où U et V sont deux fonctions de Ω' dans \mathbf{R} . Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ un point de Ω , avec $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que f est \mathbf{C} -dérivable en z_0 si et seulement si U et V sont différentiables en z_0 et si les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0)$ vérifient deux relations que l'on précisera.

1. Pour $z \mapsto z^2$ c'est gentil, pour l'exponentielle ce n'est pas méchant si on pense à utiliser la propriété de morphisme et à écrire

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \frac{e^h - 1}{h}$$

où $h = z - z_0$. Or $h \mapsto \frac{e^h - 1}{h}$ est une fonction développable en série entière sur \mathbf{C} , donc continue en 0 en quoi elle vaut 1. On en déduit

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} e^{z_0}$$

2. Si $z = z_0 + h$, avec h réel, alors

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

Mais si $z = z_0 + ih$, avec h réel, alors

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1$$

Ce qui fait que la réponse est non.

3. Supposons f \mathbf{C} -dérivable en z_0 , écrivons

$$f(x+iy) = f(x_0+iy_0) + (\ell_1 + i\ell_2)((x-x_0) + i(y-y_0)) + \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{o} (\|(x-x_0, y-y_0)\|)$$

qui traduit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\ell + \underset{z \rightarrow z_0}{o} (|z - z_0|)$$

avec évidemment ℓ_1 et ℓ_2 réels.

Prenant la partie réelle :

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) + \ell_1(x-x_0) - \ell_2(y-y_0) + \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{o} (\|(x-x_0, y-y_0)\|)$$

ce qui montre que U est différentiable en (x_0, y_0) , et que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = \ell_1 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = -\ell_2$$

Prenant la partie imaginaire :

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) + \ell_2(x - x_0) + \ell_1(y - y_0) + \underset{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)}{o} (\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

ce qui montre que V est différentiable en (x_0, y_0) , et que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) = \ell_2 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) = \ell_1$$

Supposons réciproquement que U et V soient différentiables en (x_0, y_0) et vérifient

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(on notera ℓ_2 le premier de ces nombres, ℓ_1 le deuxième.

On a alors, en utilisant les calculs précédents, au voisinage de z_0 ,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= U(x, y) + iV(x, y) \\ &= f(z_0) + (\ell_1 + i\ell_2)(z - z_0) + \underset{z \rightarrow z_0}{o} (|z - z_0|) \end{aligned}$$

ce qui conclut.

IV Equations aux dérivées partielles

— On cherche en général à se ramener à l'edp

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

— et on s'y ramène en général par changement de variable ; un tel changement de variable est en général suggéré par l'énoncé, mais on doit être capable de prendre l'initiative d'un changement de variable en polaires.

Exercice 10. Trouver les fonctions de classe C^1 de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} qui vérifient en tout point :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

en utilisant le changement de variables

$$u = x + y \quad , \quad v = x - y$$

Trouver également les solutions générales de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

en utilisant un changement de variable du même type.

Trouver les fonctions de classe C^1 de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} qui vérifient en tout point :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

en utilisant le changement de variables

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

Trouver également les solutions générales de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

en utilisant un changement de variable du même type.

On définit $f(x, y) = g(u, v)$, c'est-à-dire qu'on définit

$$g : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, y) = g(x+y, x-y)$$

L'équation proposée équivaut alors à

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$$

Les solutions sont donc les $(x, y) \mapsto \phi(x+y)$ où ϕ est une fonction de classe C^1 . Pour la deuxième, on fait le changement de variable $u = x + ct$, $v = x - ct$, on note z la nouvelle fonction inconnue, on tombe sur $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$, les solutions sont donc les

$$(x, t) \mapsto \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

avec ϕ et ψ sont deux fonctions de classe C^2 .

Exercice 11. En utilisant la transformation $(x, y) \mapsto (xy, y/x)$, résoudre sur des ouverts à préciser l'équation aux dérivées partielles

$$z = 1 + \frac{1}{2}\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

On parle ci-dessous de jacobien et de C^1 difféomorphismes. Ce n'est plus au programme. Aucune importance : on a des bijections dont il est facile de calculer les bijections réciproques, ce qui nous donne leur classe C^1 .

La question est un peu vague ! on doit comprendre qu'il s'agit d'une transformation que l'on utilisera comme changement de variable pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles. Comme d'habitude, donnons un nom à la transformation étudiée : soit

$$\phi : (x, y) \mapsto (xy, y/x)$$

définie a priori sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$; calculons son jacobien (elle est clairement de classe C^1 sur son ouvert de définition, par opérations). On a

$$j_\phi(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2y/x$$

Le jacobien est non nul sur chacun des quatre « quadrants » ouverts $\mathcal{U}_1 = \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^+$, $\mathcal{U}_2 = \mathbf{R}_*^- \times \mathbf{R}_*^+$, $\mathcal{U}_3 = \mathbf{R}_*^- \times \mathbf{R}_*^-$, $\mathcal{U}_4 = \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^-$. On se pose naturellement la question suivante : ϕ induit-elle un C^1 -difféomorphisme de \mathcal{U}_i sur $\phi(\mathcal{U}_i)$, pour $i = 1, \dots, 4$?

Commençons par \mathcal{U}_1 : on a, assez clairement, $\phi(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_1$. De plus, si (u, v) et (x, y) sont deux couples d'éléments de \mathcal{U}_1 ,

$$\phi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (xy = u, y/x = v) \Leftrightarrow (x = \sqrt{u/v}, y = \sqrt{uv})$$

ce qui montre que ϕ induit une bijection de \mathcal{U}_1 sur lui-même, de classe C^1 , et dont le jacobien ne s'annule jamais. Par caractérisation des C^1 -difféomorphismes, ϕ induit un C^1 -difféomorphisme de \mathcal{U}_1 sur lui-même (mais ici, le théorème du cours n'est pas vraiment utile, on a obtenu des formules explicites pour ϕ^{-1} :

$$\phi^{-1}(u, v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right)$$

qui montrent que ϕ^{-1} est de classe C^1 sur \mathcal{U}_1). On vérifie de même que ϕ induit un difféomorphisme de \mathcal{U}_2 sur \mathcal{U}_3 , de \mathcal{U}_3 sur \mathcal{U}_1 , de \mathcal{U}_4 sur \mathcal{U}_3 .

Abordons maintenant l'équation aux dérivées partielles. Si, comme on peut le penser, on doit utiliser le changement de variable ϕ , on écrira

$$z(x, y) = h(u, v)$$

où $(u, v) = \phi(x, y)$. Ce qui revient à définir

$$h(u, v) = z(\phi^{-1}(u, v))$$

On cherche (ce n'est pas non plus précisé, mais implicite : un énoncé d'exercice d'oral est parfois un peu évasif) des solutions z de classe C^1 .

La relation $z(x, y) = h(xy, y/x)$ donne

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial h}{\partial u}(xy, y/x) - \frac{y}{x^2} \frac{\partial h}{\partial v}(xy, y/x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = x \frac{\partial h}{\partial u}(xy, y/x) + \frac{1}{x} \frac{\partial h}{\partial v}(xy, y/x)$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}_1 \quad z(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right)$$

\iff

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}_1 \quad h(xy, y/x) = 1 + \frac{1}{2} \left(x \left(y \frac{\partial h}{\partial u}(xy, y/x) - \frac{y}{x^2} \frac{\partial h}{\partial v}(xy, y/x) \right) + y \left(x \frac{\partial h}{\partial u}(xy, y/x) + \frac{1}{x} \frac{\partial h}{\partial v}(xy, y/x) \right) \right)$$

\iff

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}_1 \quad h(xy, y/x) = 1 + xy \frac{\partial h}{\partial u}(xy, y/x)$$

\iff

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}_1 \quad h(u, v) = 1 + u \frac{\partial h}{\partial u}(u, v)$$

(pour cette dernière équivalence, on utilise le fait que ϕ est une bijection de \mathcal{U}_1 dans lui-même, ce qui permet de dire que quand (x, y) « décrit » \mathcal{U}_1 , $(xy, y/x)$ « décrit » \mathcal{U}_1 .)

On s'est donc ramené à résoudre, sur \mathcal{U}_1 , l'équation aux dérivées partielles

$$u \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) - h(u, v) = -1 \quad (E)$$

que l'on résout par analogie avec l'équation différentielle

$$xy' - y = -1$$

On divise donc par u , puis on multiplie par l'exponentielle d'une primitive de $-1/u$, ce qui revient à diviser encore une fois par u :

$$(E) \iff \frac{1}{u} \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{u^2} h(u, v) = -\frac{1}{u^2}$$

Cette condition équivaut à dire que la dérivée par rapport à u de l'expression

$$\frac{1}{u} h(u, v) - \frac{1}{u}$$

est nulle, ce qui se résout en : cette expression est une fonction de v .

Les solutions de (E) sur \mathcal{U}_1 sont donc les fonctions

$$(u, v) \mapsto 1 + u\psi(v)$$

où ψ est de classe C^1 sur \mathbf{R}_*^+ . Et donc les solutions de l'équation de départ sur \mathcal{U}_1 sont les

$$(x, y) \mapsto 1 + xy\psi(y/x)$$

où ψ est de classe C^1 sur \mathbf{R}_*^+ .

On procède de même sur les autres ouverts. Et on voit que les solutions sont de la même forme.

Exercice 12 (Oral Mines). Soit α réel ; trouver les fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$ à valeurs réelles telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Trouver toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$ à valeurs réelles telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}$$

Exercice 13 (Oral Centrale). On note \mathcal{U} l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x > 0$. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^1 . On pose

$$G(f)(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

1. Soit a un réel, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 non nulle. Montrer que f est vecteur propre pour G associée à la valeur propre a si et seulement si f vérifie, pour tous $(x, y) \in \mathcal{U}$ et $t > 0$: $f(tx, ty) = t^a f(x, y)$.
2. En utilisant $G \circ G$, résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x^2 + y^2 = 0$$

Pour la première question, si on a sur \mathcal{U} l'équation suivante vérifiée :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a f(x, y)$$

alors fixons x et y . La dérivée de $\phi : t \mapsto f(tx, ty)$ (qui est bien C^1) est $t \mapsto x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$, c'est-à-dire $t \mapsto \frac{a}{t} \phi(t)$.

On résout $\phi'(t) = \frac{a}{t} \phi(t)$, on trouve $\phi(t) = kt^a$, avec $k = \phi(1)$.

Réciproquement, si on a pour tous $(x, y) \in \mathcal{U}$ et $t > 0$: $f(tx, ty) = t^a f(x, y)$, alors, pour x et y fixés on dérive cette équation par rapport à t , on applique à $t = 1$, on conclut.

Pour la deuxième question :

$$\begin{aligned} (G \circ G)(f)(x, y) &= x \frac{\partial G(f)}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial G(f)}{\partial y}(x, y) \\ &= x \left[x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] + y \left[x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

On cherche donc z tel que

$$(G \circ G)(z) - G(z) + u = 0$$

où $u(x, y) = x^2 + y^2$ est vecteur propre de G associé à la valeur propre 2. On peut chercher le noyau de $G \circ G - G$ avec le théorème des noyaux : c'est $\text{Ker}(G) \oplus \text{Ker}(G - Id)$ (voir recherche des sous-espaces propres de G dans l'exercice suivant).. Reste à trouver une solution particulière. Il est raisonnable d'essayer de trouver une fonction vérifiant

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1$$

Pour la deuxième condition, il suffit de prendre une fonction $\phi(x) + \psi(y)$. Et on trouve facilement que $(x, y) \mapsto \frac{-1}{2}(x^2 + y^2)$ convient.

Exercice 14 (Oral Mines). Soit $U = \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}$ et $E = C^\infty(U, \mathbf{R})$. Soit Φ l'endomorphisme de E défini par

$$\forall f \in E \quad \Phi(f)(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Déterminer les éléments propres de Φ en utilisant un changement de variables en polaires.

L'application $(r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ définit une bijection C^1 de $]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$ sur \mathcal{U} , dont la réciproque est $(x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arctan}(y/x) \right)$, aussi de classe C^1 . On peut donc définir, sur $]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$,

$$g : (r, t) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$$

Alors

$$r \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) = r \cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos t, r \sin t) + r \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos t, r \sin t)$$

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. L'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U} \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y)$$

équivalent à

$$\forall (r, t) \in]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\quad r \frac{\partial g}{\partial r}(r, t) = \lambda g(r, t)$$

que l'on résout comme on résoudrait l'équation différentielle

$$r\phi'(r) - \lambda\phi(r) = 0$$

On obtient les solutions : $g : (r, t) \mapsto k(t)r^\lambda$ avec k une fonction de classe C^1 quelconque.

Les solutions de l'équation de départ sont donc les

$$(x, y) \mapsto k(y/x)(x^2 + y^2)^{\lambda/2}$$

où k est une fonction C^1 quelconque.

Exercice 15. En utilisant un changement de variables en polaires, résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 + y^2)f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(x^2 + y^2)$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

En utilisant le changement de variables $x = u + v, y = uv$, trouver des solutions

$$\text{de l'équation } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 16 (Oral Mines). Déterminer les solutions $f : \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^+ \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 17 (Oral Mines). Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right)$$

On remarque que

$$(u, v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) \Leftrightarrow (x, y) = (u+v, u-v)$$

Et donc ϕ est un isomorphisme de \mathbf{R}^2 sur lui-même, c'est aussi un C^1 -difféomorphisme de \mathbf{R}^2 sur lui-même (il n'est pas nécessaire d'utiliser ici la caractérisation des C^1 -difféomorphismes). On définit g sur \mathbf{R}^2 par

$$g(u, v) = f(x, y)$$

c'est-à-dire par

$$g(u, v) = f(u + v, u - v)$$

On cherche f de classe C^2 , g sera alors de classe C^2 . Partant de (pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$)

$$f(x, y) = g\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

on obtient successivement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

(en utilisant le théorème de Schwarz) et, de même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

Exercice 18 (Oral Mines). Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra utiliser un changement de variable linéaire $u = ax + by$, $v = cx + dy$.

L'écriture

$$f(x, y) = g(u, v)$$

qui n'a pas beaucoup de sens « posée » comme cela a priori permet néanmoins d'avoir les idées claires pour la suite.

Comment utilise-t-on le changement de variable ?

En dérivant avec la règle de la chaîne la relation

$$f(x, y) = g(ax + by, cx + dy)$$

Comment définit-on g ? Cela demande la bijectivité de l'application

$$\phi : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$$

de \mathbf{R}^2 sur... un ouvert à déterminer en général, mais ici ce ne peut être que \mathbf{R}^2 puisque ϕ est linéaire.

On supposera donc $ad - bc \neq 0$. ϕ est alors un automorphisme de \mathbf{R}^2 , dont la réciproque est

$$\phi^{-1} : (u, v) \mapsto (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

où

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ce qui permet de **définir** g :

$$g = f \circ \phi^{-1}$$

Maintenant, on calcule laborieusement ! Dans la suite, (\cdot) désigne $(ax + by, cx + dy)$ pour alléger un peu les expressions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a \frac{\partial g}{\partial u}(\cdot) + c \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b \frac{\partial g}{\partial u}(\cdot) + d \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot)$$

Puis, en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\cdot) + 2ac \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(\cdot) + c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\cdot)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = b^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\cdot) + 2bd \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(\cdot) + d^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\cdot)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = ab \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\cdot) + (bc + ad) \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(\cdot) + cd \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\cdot)$$

Donc f vérifie l'équation de départ sur \mathbf{R}^2 si et seulement si, pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$,

$$(a^2 - 3ab + 2b^2) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + (2ac - 3(bc + ad) + 4bd) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + (c^2 - 3cd + 2d^2) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = 0$$

Et l'idéal est de faire disparaître deux dérivées partielles sur trois... il semble que si on peut éliminer la première, on peut pareillement se débarrasser de la troisième. A condition de savoir résoudre

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

que l'on peut voir comme équation du second degré en a avec b pour paramètre ou l'inverse. Mais $1 - 3 + 2 = 0$ ce qui fait penser que $a = b$ est une solution. Mais dans ce cas il ne faut pas choisir $c = d$. On écrit

$$c^2 - 3cd + 2d^2 = (c - d)(c - 2d)$$

Ce qui permet de prendre, par exemple, $a = b$, $c = 2d$, $ad - bc = -ad$, prenons donc $a = b = d = 1$, $c = 2$ (ce n'est pas le seul choix possible, mais on trouve les mêmes solutions). On vérifie que l'équation devient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les

$$(x, y) \mapsto \phi(x + y) + \psi(2x + y)$$

Exercice 19 (Oral Centrale). Déterminer les fonctions u continues sur \mathbf{R}^+ et de classe C^2 sur \mathbf{R}_*^+ telles que $F : (x, y, z) \mapsto u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ vérifie $F(0, 0, 0) = 1$ et, pour tout $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = kF(x, y, z)$$

(k est un réel donné).

Exercice 20 (Oral X).

Soit g une fonction continue de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , h une fonction de classe C^1 paire de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} telles que, pour tout (x, y) dans \mathbf{R}^2 , on ait

$$-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y) \quad , \quad f(x, 0) = h(x)$$

1. Montrer que E contient au plus un élément.
2. On suppose que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(x, y) = xy$. Déterminer E .

-
1. Une chose à retenir : les seuls changements de variables qu'on pourrait nous reprocher à l'oral de ne pas tenter dans une EDP sont les changements de variables linéaires et le changement de variable en polaires. Soit $f_1, f_2 \in E$, notons $u = f_1 - f_2$, le but est de montrer que $u = 0$. On sait que u est C^1 et vérifie, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$-y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \quad , \quad u(x, 0) = 0$$

Tentons un changement de variable en polaires : définissons, sur \mathbf{R}^2 ,

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Alors v est C^1 sur \mathbf{R}^2 et vérifie, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$$

dont il résulte que, pour tout $r \in \mathbf{R}$, la fonction $\theta \mapsto v(r, \theta)$ est constante, mais comme $v(r, 0) = u(r, 0)$, on aura la constante nulle. Et finalement, $v = 0$, d'où il résulte facilement par surjectivité de $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ que $u = 0$.

2. Définissons cette fois

$$\phi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

et prenons le parti de raisonner par conditions nécessaires, on n'aura plus qu'à vérifier à la fin que la solution qu'on espère trouver « marche ».

On a, pour tout (r, θ) ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, \theta) = r^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} r^2 \sin(2\theta)$$

Fixons $r \in \mathbf{R}$, la fonction

$$\theta \mapsto \phi(r, \theta) + \frac{1}{4} r^2 \cos(2\theta)$$

est constante, notons $\psi(r)$ cette constante. En $\theta = 0$ on a

$$h(r) + \frac{1}{4} r^2 = \psi(r)$$

On a donc, pour tous r et θ réels,

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4} r^2 (1 - \cos(2\theta)) + h(r)$$

ce qui se réécrit

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta + h(r)$$

et donc, pour tous x, y réels, on a (toujours par surjectivité de $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$) :

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} + h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Reste à vérifier qu'on a bien une fonction C^1 , et qui marche. Sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est bien C^1 et on calcule facilement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} h'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} h'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

et on en déduit que f vérifie toutes les conditions imposées. Calculons alors (si elles existent) « à la main » les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.

De, pour tout x ,

$$f(x, 0) = h(|x|) = h(x)$$

on déduit que f est dérivable par rapport à sa première variable en $(0, 0)$

et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = h'(0) = 0$$

et comme, pour tout y ,

$$f(0, y) = \frac{y^2}{2} + h(y)$$

on déduit que f est dérivable par rapport à sa deuxième variable en $(0, 0)$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = h'(0) = 0$$

On en déduit assez vite que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$, f est donc C^1 sur \mathbf{R}^2 entier, et vérifie les conditions imposées sur \mathbf{R}^2 entier.

V Etudes globales

- Un cas particulier de fonctions de plusieurs variables est une fonction d'une variable. Cela permet quelquefois de se donner des idées (en examinant le problème pour une fonction d'une variable).
- On cherche souvent à se ramener à une fonction d'une variable réelle : si on doit étudier f entre u et v (éléments de \mathbf{R}^n), on peut étudier l'application $\phi : t \mapsto f((1-t)u + tv) = f(u + t(v-u))$ qui est d'une variable réelle (c'est une idée très utilisée).

Exercice 21. On considère une fonction f définie sur un ouvert convexe \mathcal{U} de \mathbf{R}^p , à valeurs dans \mathbf{R} . On suppose que f est convexe, c'est-à-dire que, pour tout couple (u, v) d'éléments de \mathcal{U} et tout élément t de $[0, 1]$,

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

et on suppose f de classe C^1 .

1. Démontrer que, pour tout couple (u, v) d'éléments de \mathcal{U} :

$$f(v) \geq f(u) + \mathrm{d}f(u)(v-u)$$

(on pourra étudier $\phi : t \mapsto f(u + t(v-u))$).

2. Démontrer que si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors f admet un minimum absolu en u .
 3. Démontrer que l'ensemble des points critiques de f est un fermé convexe de \mathcal{U} .
-

1. On peut commencer par voir que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \phi(t) \leq \psi(t)$$

où $\psi(t) = (1-t)f(u) + tf(v)$ Peut-on dériver une inéquation ? sûrement pas ! on ne déduit pas $g'(t) \leq h'(t)$ de $g(t) \leq h(t)$. Mais ici, on a aussi $\phi(0) = \psi(0)$. Et donc on peut écrire $\phi'(0) \leq \psi'(0)$ (pourquoi ? il suffit pour le voir d'écrire la dérivée comme limite des taux d'accroissement). Or ϕ et ψ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, et

$$\phi'(t) = df(u + t(v-u))(v-u)$$

$$\psi'(t) = f(v) - f(u)$$

Et cela permet de conclure.

2. Démontrer que si df_u est nulle alors f admet un minimum absolu en u . Cela découle de la question précédente.
3. Démontrer que l'ensemble des points critiques de f est un fermé convexe de \mathcal{U} .

Si u et v sont deux points critiques, alors en u et en v f atteint un minimum global. Donc $f(u) = f(v)$. Soit $t \in [0, 1]$:

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v) = f(u)$$

et d'autre part $f(tu + (1-t)v) \geq f(u)$, par minimalité de $f(u)$. Donc $f(tu + (1-t)v) = f(u)$, et f atteint en $tu + (1-t)v$ un minimum global. Ce point est donc critique, l'ensemble des points critiques est donc un convexe. Il est par ailleurs fermé car c'est $(df)^{-1}(\{\tilde{0}\})$. Et df est continue.

VI Recherche d'extremums

(ou recherche d'extrema...)

- Recherche des extremums de f sur un compact : f est continue sur le compact donc atteint un maximum et un minimum (on la suppose bien entendu à valeurs réelles). Si un tel extremum est atteint en un point x , alors x est sur le bord de K ou est un point critique de f (en supposant que f admette des dérivées partielles).
- Rechercher des extremums sur un ouvert : si f atteint un extremum en x_0 , x_0 est critique. Mais la réciproque est fautive. Pour montrer qu'en un point critique il y a effectivement un extremum, on utilisera d'autres considérations, par exemple : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$, donc f atteint un minimum (à démontrer en se ramenant à un

argument de compacité). On aura bien sûr à dire au début que f est continue, qu'elle admet des dérivées partielles (ou directement qu'elle est de classe C^1).

- Ne pas confondre l'unicité de l'extremum et l'unicité du point en lequel il est atteint : si f admet un extremum global, il est nécessairement unique, mais cela ne signifie pas qu'il soit atteint en un point unique.

Exercice 22. On considère trois points distincts A, B, C du plan euclidien. Démontrer qu'il existe un unique point M du plan pour lequel la somme des carrés des distances $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimale, et déterminer ce point.

Exercice 23. Trouver les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle donné. En déduire les triangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse donnée.

Exercice 24 (Oral Mines). Déterminer les extrema locaux de

$$(x, y) \mapsto x^3 + y^3 + y^2 - x^2$$

Exercice 25 (Oral Mines, Centrale). Soit $a > 0$. Montrer que

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum absolu sur $\mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^+$ et le calculer.

Exercice 26. Etudier les extremums de : $(x, y) \mapsto (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$

Exercice 27. Etudier les extremums de : $(x, y) \mapsto 3x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

Exercice 28 (Oral Mines). Soit a, b deux points distincts de l'espace euclidien E . Déterminer les points critiques de

$$x \mapsto \|x - a\| + \|x - b\|$$

Exercice 29 (Oral Centrale). Soit f l'application de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} :

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

1. Montrer que f a un minimum global sur \mathbf{R}^n ; le calculer.
2. Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Montrer que f a un maximum et un minimum sur \mathcal{P} , les calculer.
3. Soit $\mathcal{H} = \{x \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Montrer que f a un minimum sur \mathcal{H} ; le calculer. La fonction f a-t-elle un maximum sur \mathcal{H} ?

Exercice 30 (Oral Centrale). Soit f une fonction de classe C^∞ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , et $\Phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$.

1. Montrer que $\Phi(x, y) = \int_0^1 f'((1-t)x + yt) dt$. En déduire que Φ est prolongeable en une fonction C^∞ sur \mathbf{R}^2 .
2. Calculer $J_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q dt$. En déduire la valeur des dérivées partielles de Φ sur la diagonale.
3. Pour $f(x) = \sin x$, tracer l'ensemble d'équation $\Phi(x, y) = 0$, déterminer les extremums de Φ .

Exercice 31 (principe du maximum).

On désigne par D le carré ouvert $]0, a[\times]0, a[$.

1. Démontrer que si une fonction u , de classe C^2 sur D et à valeurs dans \mathbf{R} , admet un maximum relatif en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.
2. Soit u une fonction continue sur \overline{D} , de classe C^2 sur D , nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u = 0$ sur D .

On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive. Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction

$$u_\epsilon : (x, y) \mapsto u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$$

ait un maximum relatif sur D .

En déduire que u est nulle sur D .

On désigne par D le carré ouvert $]0, a[\times]0, a[$ ($a > 0$).

1. Démontrer que si une fonction u , de classe C^2 sur D et à valeurs dans \mathbf{R} , admet un maximum relatif en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.

(le terme « maximum relatif » signifie « maximum local » mais n'est plus usité). Supposons que u admette un maximum local en (x_0, y_0) . L'application

$$t \longmapsto u(t, y_0)$$

définie sur $]0, a[$ atteint un maximum local en x_0 . Sa dérivée seconde en ce point (qui existe bien !) est donc négative ou nulle (sa dérivée première est nulle). Mais cette dérivée seconde est $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. On procède de même avec l'autre variable et le laplacien, somme de deux termes négatifs ou nuls, l'est.

-
2. Soit u une fonction continue sur \overline{D} , de classe C^2 sur D , nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u = 0$ sur D .

On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive. Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction

$$u_\epsilon : (x, y) \longmapsto u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$$

ait un maximum relatif sur D . En déduire que u est nulle sur D .

Ce qui est sûr, c'est que u_ϵ atteint un maximum absolu sur \overline{D} , par argument de continuité/compacité. Si ce maximum n'est pas atteint sur le bord, c'est gagné. Or sur le bord, u_ϵ est majoré par $2\epsilon a^2$. Si $\epsilon < m$ où m est une valeur strictement positive prise par u , on est sûr que le maximum absolu ne peut pas être atteint sur le bord. C'est donc un maximum global atteint sur D , en ce point le laplacien est négatif ou nul d'après la première question. Mais $\Delta u_\epsilon = \Delta u + 4\epsilon = 4\epsilon > 0$ sur D , contradiction. Donc u ne peut pas prendre en un point une valeur strictement positive. Mais $-u$ non plus. Conclusion : u est nulle.

Exercice 32 (Mines).

Soit f une fonction différentiable de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , X une partie non vide de \mathbf{R}^n . On suppose que la restriction de f à X atteint un extremum local en x_0 . Que dire de $\nabla f(x_0)$ si X est un ouvert de \mathbf{R}^n ? un sous-espace affine de \mathbf{R}^n ? la sphère unité pour la norme euclidienne canonique ?

Pour la première question, $\nabla f(x_0) = 0$ (cours) ; pour la deuxième, soit u un vecteur de la direction du sous-espace. L'application $t \mapsto f(x_0 + tu)$ atteint un extremum local en $t = 0$, sa dérivée est donc nulle en 0, donc $(\nabla f(x_0)|u) = 0$, on obtient que $\nabla f(x_0)$ est orthogonal au sous-espace. Pour la sphère, refaire le même raisonnement en considérant

$$t \mapsto f(\cos t x_0 + \sin t y)$$

où $\|y\| = 1$ et $(x_0|y) = 0$. On aboutit au fait que $\nabla f(x_0)$ est colinéaire à x_0 (et donc normal à la sphère). D'autres méthodes sont possibles.

VII Autres exercices

Exercice 33 (X).

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbf{C} , f une fonction continue de Ω dans \mathbf{C} . On dit que f vérifie \mathcal{P} sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans Ω , on ait $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$.

1. Montrer que si f est somme d'une série entière de rayon $R > 0$, f vérifie \mathcal{P} sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon R .
2. Montrer que si f vérifie \mathcal{P} sur Ω et est à valeurs réelles, alors, pour tout compact non vide K contenu dans Ω , $\max(f(z) ; z \in K) = \max(f(z) ; z \in \text{Fr}(K))$.
3. On suppose que f vérifie \mathcal{P} , est de classe C^2 et à valeurs réelles. Que dire de Δf ?

-
1. Une interversion série/intégrale, par exemple avec le théorème utilisant la convergence uniforme (normale ici) sur un **segment**.
 2. Comme f est continue et K compact, il y a un z_0 tel que

$$f(z_0) = \max(f(z) ; z \in K)$$

Si $z_0 \in \text{Fr}(K)$, on a la conclusion qu'on veut. Supposons que $z_0 \notin \text{Fr}(K)$, alors $z_0 \in \overset{\circ}{K}$. L'ensemble $X = \{r > 0 ; D(z_0, r) \subset K\}$ est alors non vide, borné. Or, si $r \in X$ on a

$$\int_0^{2\pi} (f(z_0) - f(z_0 + re^{it})) dt = 0$$

et la fonction intégrée est continue positive, donc nulle. Soit $\rho = \sup(X)$. Ce qui précède montre que f est constante sur $D(0, \rho)$, donc par continuité sur $D'(0, \rho)$ qui est inclus dans K par compacité de K , mais pas dans $\overset{\circ}{K}$ sinon ρ ne majorerait pas X . On conclut alors facilement.

3. On prend $z_0 \in \Omega$, R tel que $D(0, R) \subset \Omega$, la fonction

$$\phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

est constante sur $[0, R]$, or on montre facilement qu'on peut la dériver (dominer par une constante par des arguments de fonctions continues sur un compact) deux fois. L'énoncé identifie implicitement f et $(x, y) \mapsto f(x + iy)$.

$$\phi' : r \mapsto \int_0^{2\pi} \left[\cos t \frac{\partial f}{\partial x}(z_0 + r \cos t + ir \sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(z_0 + r \cos t + ir \sin t) \right] dt$$

Et

$$\phi''(r) = \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) + 2 \cos t \sin t \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cdot) + \sin^2 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) \right] dt$$

Pour $r = 0$ on trouve que $\nabla f(z_0) = 0$, la réciproque est d'ailleurs vraie mais demande un théorème de Poincaré hors programme (formes différentielles fermées / exactes, champ de gradient / rotationnel nul en physique).

Exercice 34 (Oral Cachan). On munit \mathbf{R}^n d'une norme $\|\cdot\|$ et on note N la norme subordonnée. Soit f de classe C^1 sur \mathbf{R}^n , à valeurs dans \mathbf{R}^n , et a tel que $f(a) = 0$ et $df(a)$ inversible. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ telle que $N(A - df(a)) < (4N(df(a)^{-1}))^{-1}$. Montrer que A est inversible, et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\|x - a\| \leq \epsilon$, $\|x - a - A^{-1}(f(x))\| \leq \frac{1}{2}\|x - a\|$.

Comme N est une norme subordonnée,

$$N(df(a)^{-1}(A - df(a))) \leq N(df(a)^{-1}) N(A - df(a)) < \frac{1}{4}$$

Donc

$$N(I_n - df(a)^{-1}A) < \frac{1}{4}$$

Posons $B = I_n - df(a)^{-1}A$. Alors $N(B) < 1/4$, donc $I_n - B \in GL_n(\mathbf{R})$, donc $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Et qui plus est

$$(I_n - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$$

(série absolument convergente, avec $N(B^k) \leq N(B)^k$). Et

$$N((I_n - B)^{-1}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}$$

Où encore $N(df(a)^{-1}A) \leq 4/3$. Mais partons de

$$f(x) = df(a)(x - a) + \alpha(x - a)$$

où $\alpha(h) = o(h)$ au voisinage de $0_{\mathbf{R}^n}$. Alors

$$x - a - A^{-1}(f(x)) = (I_n - A^{-1}df(a))(x - a) - A^{-1}(\alpha(x - a))$$

Mais

$$N(I_n - A^{-1}df(a)) = N(A^{-1}(A - df(a))) \leq \frac{N(A^{-1})}{4N(df(a)^{-1})}$$

De plus $1 = N(I_n) \leq N(df(a))N(df(a)^{-1})$, donc

$$N(I_n - A^{-1}df(a)) \leq \frac{1}{4}N(A^{-1})N(df(a))$$

Là-haut on a montré que $N(A^{-1}df(a)) \leq 4/3$, donc $N(A^{-1}) \leq (4/3)N(df(a)^{-1})$. Et on aboutit donc (ouf!) à $N(I_n - A^{-1}df(a)) \leq \frac{1}{3}$. Comme $\|A^{-1}(\alpha(x - a))\|$ est o de $x - a$, et $1/3 < 1/2$, on conclut.

Exercice 35 (Oral X). On munit \mathbf{R}^n ($n \geq 2$) de sa structure euclidienne canonique, on note S sa sphère unité. Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose que $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$ est non vide et borné, et que $\forall x \in \Sigma \quad \overrightarrow{\text{grad}}(f)(x) \neq 0$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x)}{\|\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x)\|}$$

est surjective de Σ sur S .

Quelques dessins montrent que le résultat est « évident » : lorsqu'on parcourt une courbe ou une surface compacte, la normale à cette courbe décrit toutes les directions (et tous les sens) dans le plan ou dans l'espace. Passer de cette évidence graphique à une preuve n'est pas si évident. Mais là aussi, le dessin guide : on prend un vecteur unitaire \vec{u} , on veut un point de la courbe (ou de la surface) en lequel \vec{u} dirige la normale. Pour ceci, on coupe la courbe (ou la surface) par des hyperplans affines orthogonaux à \vec{u} . Comme cette courbe ou surface est bornée, l'intersection est en général vide, parfois ne l'est pas, mais il semble qu'il y ait un « premier » et un « dernier » hyperplan qui rencontrent la

courbe ou la surface, que ces hyperplans soient tangents et que donc aux points de rencontre la normale soit dirigée par \vec{u} . Pour rédiger une solution, il n'y a plus qu'à se souvenir de l'équation des hyperplans considérés : $(\vec{u}|x) = \text{constante}$.

Le raisonnement qui suit n'est compréhensible que si on fait des dessins !

σ est supposée bornée. Or par continuité de f elle est fermée. Donc compacte, on est en dimension finie. Fixons $\vec{u} \in S$. L'application

$$x \mapsto (\vec{u}|x)$$

est continue sur Σ , et atteint donc en des points x_0 et y_0 un minimum et un maximum notés respectivement m et M . Les demi-espaces ouverts

$$E_1 = \{x \in \mathbf{R}^n ; (\vec{u}|x) < m\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{x \in \mathbf{R}^n ; (\vec{u}|x) > M\}$$

ne contiennent donc aucun point de Σ . Et, comme ils sont convexes (la connexité par arcs suffirait), f garde un signe constant strict sur E_1 et sur E_2 . Mais on peut trouver un point A de E_1 et un point B de E_2 tels que $[AB] \cap \Sigma = \emptyset$ (c'est évident graphiquement, si on veut détailler on considère \vec{v} orthogonal à \vec{u} ; l'application $x \mapsto (\vec{v}|x)$ est bornée sur Σ , il existe donc α tel que $\{x ; (\vec{v}|x) = \alpha\}$ ne rencontre pas Σ . On prend z dans cet hyperplan ; la droite passant par z et dirigée par \vec{u} rencontre E_1 et E_2 , mais pas Σ). Finalement, f garde le même signe strict sur E_1 et E_2 . Quitte à remplacer f par $-f$, ce qui ne change rien au problème, on peut supposer $f > 0$ sur E_1 et sur E_2 . Et donc $f \geq 0$ sur $\overline{E_1}$ et $\overline{E_2}$.

Soit \vec{v} orthogonal à \vec{u} . Pour tout t réel, $(x_0 + t\vec{v}|\vec{u}) = m$, donc $x_0 + t\vec{v} \in \overline{E_1}$, et donc

$$f(x_0 + t\vec{v}) \geq 0$$

et donc cette fonction a un minimum en 0, ce qui permet de raccourcir nettement le raisonnement qui suit !

Mais

$$\begin{aligned} f(x_0 + t\vec{v}) &= f(x_0) + (\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0)|t\vec{v}) + \underset{t \rightarrow 0}{o} (t\vec{v}) \\ &= t(\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0)|\vec{v}) + \underset{t \rightarrow 0}{o} (t) \end{aligned}$$

Si on avait $(\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0)|\vec{v}) \neq 0$, on en déduirait

$$f(x_0 + t\vec{v}) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t(\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0)|\vec{v})$$

et $f(x_0 + t\vec{v})$ changerait de signe au voisinage de 0, ce qui est une contradiction. On conclut donc que $\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0)$, orthogonal à tout vecteur orthogonal à \vec{u} , est colinéaire à \vec{u} : $\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0) = k\vec{u}$, avec $k \neq 0$. Remarquons alors que, pour tout $t < 0$, $x_0 + t\vec{u} \in E_1$, donc

$$f(x_0 + t\vec{u}) > 0$$

or

$$f(x_0 + t\vec{u}) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} tk \|\vec{u}\|^2$$

donc $k < 0$, ça ne nous va pas, mais le même raisonnement en y_0 montre que $\vec{\text{grad}}f(y_0) = k'\vec{u}$, avec $k' > 0$, la conclusion s'ensuit.

Exercice 36 (Oral ens). Soit $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Montrer que, si $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

On pose $E = C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et $D = \{\phi \in E^* / \forall (f, g) \in E^2 \phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)\}$. Montrer que D est de dimension finie n .

On remarque que, si $\psi(t) = f(tx)$ (x est fixé),

$$\psi'(t) = (\nabla f(tx)|x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$$

Or $\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$, ce qui donne la formule demandée.

Pour la deuxième question, considérons la relation de la question précédente « fonctionnellement ». Déjà si c est une fonction constante, $\phi(c) = 0$. Ensuite, appliquons ϕ au produit de la fonction $\pi_i : x \mapsto x_i$ par la fonction $x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$. On obtient

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^n \phi(\pi_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

Donc D est engendré par les formes linéaires $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, dont on vérifie qu'elles constituent n éléments de D linéairement indépendants (appliquer une combinaison linéaire nulle à chaque π_k).

Exercice 37 (Différentielle du déterminant). La classe C^1 de l'application

$$\det : M \mapsto \det(M)$$

sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de M . Mais le calcul de sa différentielle est plein d'intérêt.

Dans la suite, on notera $\frac{\partial}{\partial x_{i,j}}$ ($1 \leq i, j \leq n$) les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Exprimer, pour toute matrice A , la dérivée partielle

$$\frac{\partial(\det)}{\partial x_{i,j}}(A)$$

à l'aide d'un coefficient de la comatrice \tilde{A} de A . (attention ! il s'agit d'une question facile!).

2. En déduire l'expression, si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, de

$$(d(\det)(A))(H)$$

(on utilisera encore la comatrice, et on fera par exemple intervenir la trace).

3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer en fonction de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'unique matrice $\phi(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad (d(\det)(A))(H) = (\phi(A) | H)$$

($\phi(A)$ est le gradient en A du déterminant).

4. (Souvenirs d'algèbre linéaire...) Trouver une condition nécessaire et suffisant sur A pour que $d(\det)(A) = 0$ (on désigne ici par simplement par 0 l'application $H \rightarrow 0$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans \mathbf{R}).
5. Démontrer, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$\det(\exp M) = \exp(\text{Tr}(M))$$

6. On note, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\exp(M) = I_n + M + \alpha(M)$. Montrer que

$$\alpha(M) \in \underset{M \rightarrow (0)}{o}(M)$$

(on pourra si on le souhaite utiliser une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, i.e. sous-multiplicative et telle que $\|I_n\| = 1$).

7. Utiliser les deux questions précédentes pour retrouver la différentielle en I_n de \det (dont l'existence est, rappelle-t-on, acquise).
8. En déduire la différentielle en n'importe quelle $A \in GL_n(\mathbf{R})$ de f .
9. Démontrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
10. Donner la différentielle de \det en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ quelconque.