S8 et S9

I CCP 2019

$\boxed{\text{Analyse 40}}$ Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $|| \; ||$.
On suppose que $\forall (u,v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

II Exponentielles de matrices

Exercice 1. On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ s'écrit de manière unique

$$A = D + N$$

où D et N sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, D diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$.
Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable si et seulement si son exponentielle l'est.

On écrit (cours) que $\exp(A) = \exp(D)\ \exp(N) = \exp(D)\ + \exp(D)\,(\exp(N) - I_n)$. On vérifie ensuite que $\exp(D)$ est diagonalisable, que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente, et que ces deux matrices commutent. On en déduit que ce qui est ci-dessus est la décomposition « diagonalisable + nilpotente » de $\exp(A)$. Et donc, par unicité,

$$(\exp A \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow\ \exp(D)\,(\exp(N) - I_n) = (0) \Leftrightarrow N = 0$$

(la dernière équivalence demande une écriture assez simple).

Exercice 2. Montrer que exp induit une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, ensemble des matrices carrées symétriques réelles dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

La formule $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$ montre (en prenant $P \in O(n)$ et D diagonale) que l'exponentielle d'une matrice symétrique est symétrique définie positive. Avec la même formule, on trouve assez facilement que exp est surjective de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Ensuite, même démonstration d'injectivité que l'unicité d'une racine carrée symétrique positive pour une matrice symétrique positive (passer aux endomorphismes, dire que $\exp(u)$ commute avec u, donc u laisse stable les sous-espaces propres de $\exp u\ldots$).

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Montrer

$$\left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp A$$

On montre que, pour tout k, $\dfrac{\binom{p}{k}}{p^k} \leq \dfrac{1}{k!}$. On en déduit

$$\left\|\exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p\right\| \leq \exp(\|A\|) - \left(1 + \frac{1}{p}\|A\|\right)^p$$

Exercice 4. Soit A une matrice carrée réelle ou complexe. Exprimer le déterminant de l'exponentielle de A à l'aide de la trace de A. *On pourra trigonaliser sur* $\mathbf{C}$.

Exercice 5. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
En utilisant le polynôme caractéristique de A, déterminer :

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\det(I_n+\alpha A)-1}{\alpha}.$$

Sachant que

$$\exp(A)=\lim_{k\to+\infty}\big(I_n+\frac{1}{k}A\big)^k$$

retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 6. Soit A une matrice carrée réelle ou complexe. On veut montrer que $\exp(A)$ est un polynôme de A.

1. Montrer que c'est vrai pour une matrice diagonale en utilisant un outil purement algébrique.
2. Montrer que c'est vrai en général en utilisant un outil de topologie (on ne cherchera pas à se servir de la question précédente).

Première question : interpolation de Lagrange. Deuxième question : $\mathbf{C}[A]$ est fermé (espace vectoriel de dimension finie).

Exercice 7. Calculer l'exponentielle d'un projecteur. Calculer l'exponentielle d'une symétrie.

Exercice 8. Montrer que si $A\in M_n(\mathbf{R})$ est antisymétrique alors $\exp(A)\in SO(n)$.

Exercice 9. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ d'une norme d'algèbre unitaire $\|.\|$: pour toutes matrices A et B, $\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$ et $\|I_n\|=1$. On fixe une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\|A\|<1$.

1. Montrer que la fonction

$$\phi\ :\ s\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}s^n}{n}A^n$$

est bien définie et de classe C^1 sur $[0,1]$. Exprimer $\phi'(s)$ comme inverse d'une matrice qui dépend de A.

2. Montrer que la fonction $s\mapsto\exp(-\phi(s))$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, et exprimer sa dérivée à l'aide de $\phi'(s)$ et de $\exp(-\phi(s))$.
3. Montrer que la fonction

$$s\mapsto(I_n+sA)\exp(-\phi(s))$$

est constante sur $[0,1]$, en déduire l'existence d'une matrice B, que l'on exprimera comme somme d'une série, telle que $\exp(B)=A$.

III Suites de fonctions et compacité

Exercice 10 (Utilisation de la compacité).

1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, lipschitziennes de même rapport k, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.
   (a) Vérifier que f est, elle aussi, k-lipschitzienne.
   (b) Soit $(x_i)_{0\le i\le p}$ une subdivision régulière de $[a,b]$. Démontrer que, pour tout i tel que $0\le i\le p-1$, pour tout x dans $[x_i,x_{i+1}]$,

$$\|f_n(x)-f(x)\|_F\le 2k\frac{b-a}{p}+\|f_n(x_i)-f(x_i)\|_F$$

   puis démontrer que la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme.
2. On veut étendre le résultat trouvé précédemment. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un compact K d'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|_E)$, lipschitziennes de même rapport k, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur K vers une fonction f.

(a) Vérifier que f est, elle aussi, k-lipschitzienne.

(b) Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_p\}$ d'éléments de K tel que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B'(x_i, r)$$

(B' signifie toujours « boule fermée »).

(c) Avec les notations précédentes, montrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, pour tout $x \in B'(x_i, r)$,

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 2kr + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F$$

(d) Montrer que la convergence est uniforme.

(e) Retrouver le résultat de la question précédente en raisonnant par l'absurde et en utilisant des suites extraites.

Exercice 11 ((Oral X))**.** Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, convexes. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f. Vérifier que f est convexe, et que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans I (on pourra se ramener à ce qui précède).

Exercice 12. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. On suppose qu'elle converge simplement en tout point de ce segment vers une fonction continue f. Démontrer que f est croissante, puis démontrer que la convergence est uniforme en utilisant une subdivision du segment $[a, b]$.
Donner un exemple simple montrant que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de continuité de f.

Exercice 13 (**Théorème de Dini, Oral Mines**)**.**

1. Soit (K_n) une suite décroissante de fermés de $[a, b]$ $(a < b)$, d'intersection vide. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $K_{n_0} = \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Donner un exemple montrant que, si on supprime l'hypothèse de continuité de f, la résultat n'est plus vrai.
4. Dans les deux premières questions, peut-on remplacer $[a, b]$ par $\mathbf{R}$?

Exercice 14 (**Oral Centrale**)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. (f_n) converge uniformément sur tout compact.
2. Pour toute suite (x_n) convergente, $\big(f_n(x_n)\big)$ converge.

Exercice 15. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment, à valeurs réelles, telle que, pour tout x, la suite $\big(f_n(x)\big)$ soit croissante. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, et on veut montrer que la convergence est uniforme.

1. On suppose que la convergence n'est pas uniforme. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$, une extractrice ϕ et une suite $(x_{\phi(n)})$ telle que, pour tout n,

$$f(x_{\phi(n)}) - f_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) > \delta$$

2. En utilisant la continuité des (f_n), aboutir à une contradiction.