C12-2 : Fonctions de plusieurs variables réelles (calcul différentiel)

I Lien entre différentielle et dérivée selon un vecteur

I.1 Différentiabilité ⇒ dérivabilité selon tout vecteur

Soit $f : \mathscr{U} \subset E \longrightarrow F$, E et F evn de dimension finie, $\mathscr{U}$ ouvert, $a \in \mathscr{U}$.

Proposition : Si une fonction est différentiable en a, elle admet une dérivée en a selon tout vecteur.

Corollaire : Soit B une base quelconque de E. Si f est différentiable en a, toutes ses dérivées partielles relatives à la base B sont définies en a.

Démonstration : Soit $u \in E$ fixé ; au voisinage de 0 (pour t), on a

$$f(a+tu) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(tu) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(tu)$$

ou encore :

$$f(a+tu) = f(a) + t\,\mathrm{d}f(a)(u) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

ce qui montre que f est dérivable selon u, et que

$$\mathrm{D}_u f(a) = \mathrm{d}f(a)(u)$$

Formule : Si f est différentiable en a, si $v \in E$, $\mathrm{D}_u f(a) = \mathrm{d}f(a)(u)$

Notation : On note souvent $\mathrm{d}f(a)(u) = \mathrm{d}f(a).u$

I.2 Dérivabilité selon tout vecteur $\not\Rightarrow$ Différentiabilité

La réciproque du paragraphe précédent est fausse...reprenons en effet
$f\ :\ (x,y \longmapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $\qquad f(0,0)=0$
dont on a vu qu'elle avait, en $(0,0)$, des dérivées selon tout vecteur. Il se trouve que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. En effet,

I.3 Fonctions de classe C^1

a. Définition

Soit f une application définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ d'un espace vectoriel E, à valeurs dans un espace vectoriel F. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ lorsqu'elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et que l'application

$$df\ :\ a\mapsto df(a)$$

est continue sur $\mathscr{U}$ (cette application est à valeurs dans $\mathscr{L}(E,F)$, qui est un espace de dimension finie, on n'a donc pas besoin de préciser de quelle norme on le munit).

b. Le Théorème Fondamental

Théorème : Soit f une application définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ d'un espace vectoriel E, à valeurs dans un espace vectoriel F. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$.

(ii) Toutes les dérivées partielles $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{D}_{e_i} f$ sont définies et continues sur $\mathscr{U}$.

De plus, si **(i)** ou **(ii)** est vérifiée, alors, pour tout $a\in\mathscr{U}$ et $h=\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\in E$,

alors
$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \ .$$

Intérêt : Une dérivée partielle, c'est la dérivée d'une fonction d'une variable réelle, c'est un objet mathématique plus simple qu'une différentielle. Avec une hypothèse de continuité on peut à partir de dérivabilité et de dérivées partielles obtenir la différentiabilité et la différentielle.

Remarque - Corollaire La proposition « Toutes les dérivées partielles $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{D}_{e_i} f$ sont définies et continues sur $\mathscr{U}$ » ne dépend pas de la base choisie.

Démonstration

(i)$\Longrightarrow$(ii)

C'est essentiellement déjà fait. Si f est C^1, elle est différentiable en tout point. On a vu qu'alors, pour tout $v \in E$, $D_v f$ est défini partout sur $\mathscr{U}$, avec la formule
$$\forall a \in \mathscr{U} \qquad \mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

L'application $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ étant continue, l'application $a \mapsto \mathrm{d}f(a)(v)$ l'est (trouver un argument simple!). Les dérivées partielles « étant des $D_v f$ », on conclut.

(ii)$\Longrightarrow$(i)

On suppose $E = \mathbf{R}^2$, $(e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$. Et on suppose que f admet en tout point a de $\mathscr{U}$ deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$, et que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} : a \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ sont continues sur $\mathscr{U}$.
On va commencer par montrer que f est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$, puis on montrera ensuite la continuité de $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$.

Soit donc $a = (a_1, a_2) \in \mathscr{U}$. On cherche une application linéaire ϕ telle que, au voisinage de $(0,0)$ (pour h), on ait

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2) + \phi(h_1, h_2) + \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}((h_1, h_2))$$

Si on comprend ce qu'est une dérivée partielle, on ne trouve pas extravagante l'idée d'écrire :

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) \\ &\quad + f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

(évidemment, on peut ausi bien écrire

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) \\ &\quad + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \quad) \end{aligned}$$

On fait apparaître ainsi deux différences que l'on va traiter séparément :
$\delta_1(h) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2)$
et $\delta_2(h) = f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1+h_1, a_2)$.
Commençons par la première :

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) = \int_{\cdots}^{\cdots} \frac{\partial f}{\partial \quad}(\qquad , \qquad) \quad \mathrm{d}t$$

A partir d'ici, la démonstration est moins importante. Jusqu'ici en revanche, les idées sont intéressantes.
Donc

$$\delta_1(h) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + \int_{a_2}^{a_2+h_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, t) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right] \mathrm{d}t$$

et on cherche à montrer que l'intégrale est $\underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(h)$. Pour cela, le plus simple est de revenir à la définition des o.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe, et on considère, $\eta > 0$ tel que

$$\|(b_1, b_2) - (a_1, a_2)\| \leq \eta \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, t) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\|_F \leq \epsilon$$

(on utilise donc la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, utiliser les hypothèses est toujours rassurant). La norme au premier membre est une norme quelconque sur $\mathbf{R}^2$, il est commode mais non obligatoire (c'est souvent d'ailleurs le meilleur choix) de prendre la norme $\|.\|_\infty$. Supposons $\|(h_1,h_2)\|\leq\eta$. Alors, pour tout $t\in[a_2,a_2+h_2]$,

$$\|(a_1+h_1,t)-(a_1,a_2)\|=\max(|h_1|,|t-a_2|)\leq\max(|h_1|,|h_2|)\leq\eta$$

ce qui permet de majorer

$$\begin{aligned}\left\|\int_{a_2}^{a_2+h_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,t)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right]\mathrm{d}t\right\|_F &\leq \left|\int_{a_2}^{a_2+h_2}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,t)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right\|_F\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \epsilon|h_2|\\ &\leq \epsilon\|(h_1,h_2)\|\end{aligned}$$

On a donc montré

$$\forall\epsilon>0\ \exists\eta>0\qquad \|h\|\leq\eta\Longrightarrow\left\|\int_{a_2}^{a_2+h_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,t)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right]\mathrm{d}t\right\|_F\leq\epsilon\|h\|$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\int_{a_2}^{a_2+h_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,t)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right]\mathrm{d}t=\underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(h)$$

et finalement

$$\delta_1(h)=h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\ +\underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(h)$$

On traite de même $\delta_2(h)$, on obtient

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)=f(a_1,a_2)+\phi(h_1,h_2)+\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}((h_1,h_2))$$

avec

$$\phi(h_1,h_2)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)$$

La linéarité de ϕ est apparente, il en découle la différentiabilité de f en a, et la formule

$$\forall a\in\mathscr{U}\quad\forall h\in\mathbf{R}^2\qquad \mathrm{d}f(a)(h)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

Reste la continuité de $a \longmapsto \mathrm{d}f(a)(h)$. La matrice de $\mathrm{d}f(a)$ relative à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ au départ et une base $\mathscr{C}$ de F à l'arrivée a deux colonnes, constituées respectivement des composantes de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ dans la base $\mathscr{C}$. Par continuité des dérivées partielles, tous les coefficients de la matrice sont fonctions continues de a, donc $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ est continue. Si on est scrupuleux, on remarquera que l'application qui a une application linéaire associe sa matrice relative à des bases données est un isomorphisme entre deux espaces de dimension finie, donc est continue ainsi que sa réciproque.

c. Exemple

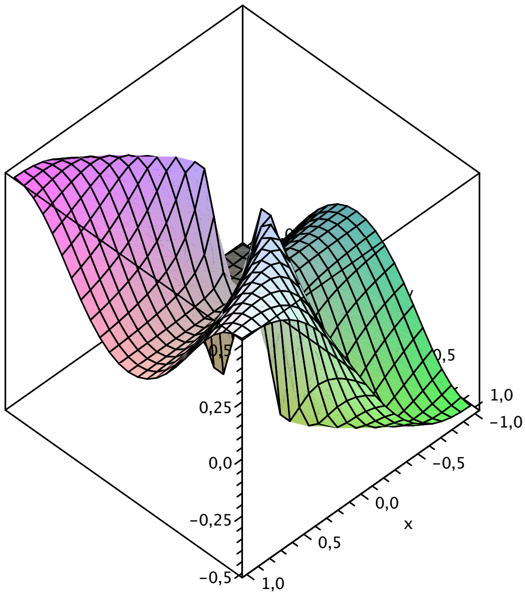
Justifier :
$h\ :\ (r,\phi,\theta) \mapsto (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^3$.

d. Exemple

On considère f définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, mais pas sur $\mathbf{R}^2$.



e. Exemple

Soit E euclidien. Montrer que l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{\|x\|^2}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $E \setminus \{0_E\}$. Déterminer en tout point sa différentielle.

f. Exemple

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{f}: & M_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & X & \longmapsto & \det(X) \end{array}$$

et on note $\dfrac{\partial}{\partial X_{i,j}}$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $M_n(\mathbf{K})$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial X_{i,j}}(X)$ à l'aide des coefficients de la comatrice de X (on notera $\widetilde{X} = \mathrm{com}(X)$).
2. En déduire que f est de classe C^1 sur $M_n(\mathbf{K})$, exprimer $\mathrm{d}f(X)(H)$ pour tous X et H dans $M_n(\mathbf{K})$ (la formule utilisera la trace, et $\widetilde{X}$).

g. Exemple : le noyau de la chaleur

Enoncé : Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles.

Pour $(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$, on pose

$$\Gamma(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$$

et on définit la fonction Kf par

$$\forall (x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+\qquad Kf(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\Gamma(x-y,t)\,\mathrm{d}y$$

Montrer que Kf est de classe C^1 sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$ (c'est une étape vers la propriété essentielle du noyau de la chaleur : Kf est de classe C^1 et vérifie :

$$\frac{\partial(Kf)}{\partial t}=\frac{\partial^2(Kf)}{\partial x^2}\quad)$$

Solution : C'est long! il faut montrer 4 choses.

Etape 1 : Kf est dérivable par rapport à sa première variable sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$.

Etape 2 : $\dfrac{\partial Kf}{\partial x}$ est continue sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$.

Etape 3 : Kf est dérivable par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$.

Etape 4 : $\dfrac{\partial Kf}{\partial t}$ est continue sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$.

Bien entendu, les étapes 3 et 4 peuvent être montrées avant les étapes 1 et 2, c'est comme on veut.

Etape 1 : On fixe $t>0$. On écrit alors

$$\forall x\in\mathbf{R}\qquad Kf(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)\mathrm{d}y$$

avec

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(y)}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-y)^2/4t}\end{array}$$

• Pour tout $x\in\mathbf{R}$, $y\mapsto h(x,y)$ est continue sur $\mathbf{R}$ (par morceaux suffirait) (mais ce n'est pas la peine de l'écrire), intégrable (car $\underset{y\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$).

• h est dérivable par rapport à sa première variable sur $\mathbf{R}^2$, et

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2\qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=-\frac{(x-y)f(y)}{4t\sqrt{\pi t}}\,e^{-(x-y)^2/4t}$$

• $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue par rapport à chacune de ses variables sur $\mathbf{R}^2$ (par rapport à y, par morceaux suffirait) (mais ce n'est pas la peine de l'écrire) (d'ailleurs, $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue comme fonction de (x, y), ce qui est beaucoup plus fort) (mais ce n'est pas la peine de l'écrire non plus).

• **Domination :** Soit $A = [-M, M]$, $M > 0$ (évitons la notation K à cause de K_f) ; alors, si $(x, y) \in [-M, M] \times \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{4t\sqrt{\pi t}}\big(|x|+|y|\big)\, e^{-x^2/4t}e^{xy/2t}e^{-y^2/4t}\\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{4t\sqrt{\pi t}}\big(M+|y|\big)\, e^{M|y|/2t}e^{-y^2/4t}\end{aligned}$$

(on remarque aisément que $|e^z| \leq e^{|z|}$). La fonction majorante est indépendante de x, intégrable sur $\mathbf{R}$ car $\underset{y\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$. Par théorème de dérivation sous le signe $\int$, la fonction

$$x \longmapsto Kf(x,t)$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est

$$x \longmapsto -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)f(y)}{4t\sqrt{\pi t}}\, e^{-(x-y)^2/4t}\mathrm{d}y$$

Ceci termine l'étape 1.

Etape 2 : Contrairement à ce que l'on pourrait espérer, le théorème de dérivation sous le signe $\int$, qui est en fait un théorème de classe C^1 (comme tous nos théorèmes) ne suffit pas pour dire que $\dfrac{\partial Kf}{\partial x}$ est continue. Il dit que c'est, pour chaque t fixé, une fonction continue de x, ce qui ne nous suffit pas pour appliquer le théorème fondamental. On doit donc encore montrer que

$$(x,t) \longmapsto \frac{\partial Kf}{\partial x}(x,t)$$

est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$. Et donc. . .

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+ \qquad \frac{\partial Kf}{\partial x}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k\big((x,t),y\big)\,\mathrm{d}y$$

avec

$$k \; : \quad \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+)\times]-\infty,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \big((x,t),y\big) & \longmapsto & \dfrac{(x-y)f(y)}{4t\sqrt{\pi t}}\; e^{-(x-y)^2/4t} \end{array}$$

• Pour tout $(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$, $y\mapsto k\big((x,t),y\big)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]-\infty,+\infty[$.

• Pour tout $y\in]-\infty,+\infty[$, $(x,t)\longmapsto k\big((x,t),y\big)$ est continue sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$ (par opérations) *Comme d'habitude, les fonctions* $(x,t)\mapsto x$ *et* $(x,t)\mapsto t$ *étant continues, on fait des sommes, des produits, des quotients, des compositions à partir de ces fonctions.*

• **Domination :** Soit A un compact inclus dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}_*^+$, il existe $0<a<b$ et $M>0$ tel que

$$A\subset[a,b]\times[-M,M]$$

et, si $\big((x,t),y\big)\in A\times]-\infty,+\infty[$, on essaye de majorer indépendamment de (x,t) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{(x-y)f(y)}{4t\sqrt{\pi t}}\;e^{-(x-y)^2/4t}\right| &\leq \frac{|y|+M}{4a\sqrt{\pi a}}e^{-(x-y)^2/4t}\\ &\leq \frac{|y|+M}{4a\sqrt{\pi a}}e^{-(x-y)^2/4b}\\ &\leq \frac{|y|+M}{4a\sqrt{\pi a}}e^{M|y|/2b}e^{-y^2/4b}\end{aligned}$$

et la fonction majorante, indépendante de (x,t), est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$. L'étape 2 est terminée, ne restent que les étapes 3 et 4…en pratique, un « de même » règle souvent les choses. Mais ici, ce serait un peu abusif.

h. Exemple : une série de fonctions de deux variables

Montrer que l'application

$$\phi \,:\, (x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+iy)^n}{(2n)!}$$

est de classe C^1 (il est ensuite assez facile de montrer qu'elle est harmonique sur $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire qu'elle est de classe C^2 et vérifie

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad)$$

i. Un exemple célèbre

La fonction p définie par

$$p(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0,0)$, et $p(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

II Opérations sur les fonctions différentiables

II.1 Combinaison linéaire

Proposition Si f et g sont différentiables en $a \in \mathscr{U}$, à valeurs dans F, $\lambda f + g$ l'est (λ désigne un élément de $\mathbf{K}$ quelconque), et

$$\mathrm{d}(\lambda f + g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a) .$$

Proposition Si f et g sont de classe C^1 sur $\mathscr{U}$, $\lambda f + g$ l'est.

Proposition Si f et g admettent des dérivées suivant le vecteur v au point a, $\lambda f + g$ aussi, et

$$D_v(\lambda f + g)(a) = \lambda D_v f(a) + D_v g(a)$$

Proposition Si $\mathscr{B}$ est une base de E, si f et g ont une j-ème dérivée partielle relative à $\mathscr{B}$ en a, alors $\alpha f + g$ aussi, et

$$\partial_j(\lambda f + g)(a) = \lambda \partial_j f(a) + \partial_j g(a) .$$

Si c'est le cas en tout point de $\mathscr{U}$, on peut écrire

$$\partial_j(\lambda f + g) = \lambda \partial_j f + \partial_j g .$$

Démonstration de tous ces résultats : pour les dérivées selon un vecteur ou dérivées partielles, c'est déjà fait (puisque la linéarité de la dérivation est déjà connue). Pour la différentielle, c'est le fait qu'une combinaison linéaire de $o(h)$ est un $o(h)$ qui conclut.

II.2 Image par une application bilinéaire

Rappel (T5) Si B est une application bilinéaire de $F \times G$ dans H, où F, G, H sont trois espaces vectoriels normés de dimension finie, il existe une constante K telle que

$$\forall (x,y) \in F \times G \qquad \|B(x,y)\|_H \leq K\ \|x\|_F\ \|y\|_G$$

Proposition Soit E, F, G, H trois espaces vectoriels réels de dimension finie, f et g deux applications d'un ouvert $\mathscr{U}$ de E dans F et dans G respectivement, B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H. Si f et g sont différentiables en $a \in \mathscr{U}$ alors $B(f,g)$ l'est et, pour tout $h \in E$,

$$\mathrm{d}\big(B(f,g)\big)(a)(h) = B\big(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)\big) + B\big(f(a), \mathrm{d}g(a)(h)\big).$$

Proposition Si f et g sont de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ alors $B(f,g)$ l'est.

Démonstration : On a, au voisinage de 0_E,

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \alpha(h) \quad \text{et} \quad g\big(a+h) = g(a) + dg(a)(h) + \beta(h)$$

où $\alpha(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$ et $\beta(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$. Par bilinéarité :

$$B\big(f(a+h), g(a+h)\big) = B\big(f(a), g(a)\big) + \ell(h) + \gamma(h)$$

avec

$$\ell(h) = B\big(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)\big) + B\big(f(a), \mathrm{d}g(a)(h)\big)$$

(ℓ est donc linéaire), et

$$\begin{aligned}\gamma(h) = B\big(f(a), \beta(h)\big) + B\big(df(a+h), dg(a+h)\big) + B\big(df(a+h), \beta(h)\big)\\ + B\big(\alpha(h), dg(a+h)\big) + B\big(\alpha(h), \beta(h)\big)\end{aligned}$$

L'existence de K tel que

$$\forall (x,y) \in F \times G \qquad \|B(x,y\|_H \leq K\|x\|_F\|y\|_G$$

permet de montrer assez facilement que $\gamma(h) = \mathrm{o}_{h\to 0_E}(h)$. On en déduit la différentiabilité de $B(f,g)$, et sa différentielle.

Le théorème sur la classe C^1 en découle, en ajoutant un argument de continuité.

Exemple Soit E un espace euclidien. Calculer la différentielle de l'application $\dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ (en tout point de $E\setminus\{0_E\}$) (on a le droit d'utiliser des résultats déjà vus). Que peut-on dire de x si cette différentielle est nulle en x ?

Proposition Si f et g sont de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ alors $B(f,g)$ l'est.

Extension Si M est une application multilinéaire de $F_1\times\cdots\times F_p$ dans H, où $F_1,\ldots,F_p$, H sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, si $f_1,\ldots,f_p$ sont des applications d'un ouvert $\mathscr{U}$ de E dans $F_1,\ldots,F_p$ respectivement, toutes différentiables en $a\in\mathscr{U}$ alors $M(f_1,\ldots,f_p)$ l'est et, pour tout $h\in E$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\big(M(f_1,\ldots,f_p)\big)(a).h = {} & M\big(\mathrm{d}f_1(a).h, f_2(a),\ldots,f_p(a)\big)+M\big(f_1(a),\mathrm{d}f_2(a).h,\ldots,f_p(a)\big)\\ & +\cdots+M\big(f_1(a),\ldots,f_{p-1}(a),\ldots,\mathrm{d}f_p(a).h\big)\end{aligned}$$

Si les f_k sont C^1 sur $\mathscr{U}$, $M(f_1,\ldots,f_p)$ l'est.

II.3 Composition

$$\begin{tikzcd} \mathscr{U} \subset E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathscr{V} \subset F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Proposition : Soit F, G, H trois espaces vectoriels réels de dimension finie, f une application d'un ouvert $\mathscr{U}$ de E dans F, g une application d'un ouvert $\mathscr{V}$ de F dans G. On suppose que $f(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}$.

Si f est différentiable en $a \in \mathscr{U}$ et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a) \ .$$

Proposition : Si f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ et g est de classe C^1 sur $\mathscr{V}$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$.

Démonstration : On part du développement limité, au voisinage de 0_E,

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \alpha(h)$$

où $\alpha(h) = \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$. De même, au voisinage de 0_F,

$$g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + dg\big(f(a)\big)(k) + \beta(k)$$

où $\beta(k) = \underset{k \to 0_F}{\mathrm{o}}(k)$. Comme $df(a)(h) + \alpha(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$, il est légitime de « lui faire jouer le rôle de k » et d'écrire, au voisinage de 0_E,

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + dg\big(f(a)\big)\big(df(a)(h) + \alpha(h)\big)) + \beta\big(df(a)(h) + \alpha(h)\big)$$

ce qui donne

$$g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)\big) + \Big(dg\big(f(a)\big) \circ df(a)\Big)(h) + \gamma(h)$$

avec $\gamma(h) = dg\big(f(a)\big)\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(df(a)(h) + \alpha(h)\big)$ (rappelons que $dg(f(a))$ est une application linéaire) ; l'existence d'une constante K telle que, pour tout h,

$$\| dg\big(f(a)\big)\big(\alpha(h)\big) \|_G \leq K \| \alpha(h) \|_F$$

montre que le premier des termes dont $\gamma(h)$ est la somme est un $\underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$. On voit sans difficulté que le second de ces deux termes l'est aussi en revenant à la définition des o. On obtient donc la conclusion : $g\circ f$ est différentiable, et

$$\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big)\circ \mathrm{d}f(a)\ .$$

Un argument de continuité donne alors le résultat sur les fonctions de classe C^1.

II.4 Composée d'une fonction d'une variable par une fonction de plusieurs variables

Proposition : Soit $\mathscr{U}$ un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E, f une application de $\mathscr{U}$ dans un espace vectoriel de dimension finie F, ϕ une application définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathscr{U}$:

$$\begin{tikzcd} I\subset\mathbf{R} \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\phi"'] & \mathscr{U}\subset E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

Si ϕ est dérivable en t, et si f est différentiable en $\phi(t)$, alors $f\circ\phi$ est dérivable en t, et

$$(f\circ\phi)'(t) = \mathrm{d}f\big(\phi(t)\big)\big(\phi'(t)\big)\ = \mathrm{d}f\big(\phi(t)\big).\phi'(t)$$

(la deuxième écriture est communément utilisée pour limiter le nombre de parenthèses).

Proposition Si on suppose f et ϕ de classe C^1, $f\circ\phi$ l'est donc.

Proposition (écriture avec les dérivées partielles) Plus analytiquement : si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, en notant $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ les dérivées partielles relatives à la base $\mathscr{B}$ et ϕ_i les applications composantes de ϕ dans cette même base (pour tout t dans I, $\phi(t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)e_i$), on a donc :

$$(f \circ \phi)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\phi(t)\big) .$$

ou encore, si on préfère,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) e_i \right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) e_i \right) .$$

Corollaire Soit $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ de classe C^1, $\gamma : [0,1] \to \mathscr{U}$ de classe C^1, si $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$, alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)\ \mathrm{d}t$$

Résultats très utiles et très importants !

Exemple 1 (plus utilisé que le résultat général)

Si f est différentiable en tout point de l'ouvert convexe $\mathscr{U}$, si a et b sont dans $\mathscr{U}$, l'application $g\ :\ t \longmapsto f(a+t(b-a))$ est dérivable sur $[0,1]$, et

$$\forall t \in [0,1] \qquad g'(t) =$$

Et donc $f(b)-f(a) = \displaystyle\int_0^1$.

Exemple 2

Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, si $t \longmapsto \big(u(t), v(t)\big)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, $h\ :\ t \longmapsto f\big(u(t), v(t)\big)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et on peut exprimer $h'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u et de v :

Exemple 3

Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^3$, si $t \longmapsto \big(u(t), v(t), w(t)\big)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, exprimer la dérivée de $t \longmapsto f\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u, v et w.

Il importe de bien comprendre ce mécanisme pour être capable ensuite de calculer des dérivées partielles de fonctions composées

II.5 Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée

Tout est contenu dans ce qui précède.

Par exemple : soit f une application définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbf{R}^3$, à valeurs dans F.

$$f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

et soit g une application définie sur $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans $\mathbf{U}$:

$$g : (u, v) \mapsto \big(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)\big)$$

On désigne par h la composée :

$$h : (u, v) \mapsto f\big(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)\big)$$

On peut alors déterminer les dérivées partielles de h à l'aide de celles de f et de g, en utilisant le paragraphe précédent. En effet, une dérivée partielle est la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

Exemple : soit h une application définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans F :

$$h : (u, v) \mapsto h(u, v)$$

Et soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}^3$, à valeurs dans $\mathbf{U}$:

$$f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \big(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)\big)$$

Calculer les dérivées partielles de $h \circ f$ en fonction de celles de h et de f.

Exemple : Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}^3$, à valeurs réelles.

Soit $F : (r, \phi, \theta) \longmapsto f(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$. Calculer les dérivées partielles de F à partir de celles de f.

Exemple : Ecrire les dérivées partielles de l'application

$$(u_1,\dots,u_m) \longmapsto f\,(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$$

(avec des hypothèses « évidentes »).

II.6 Caractérisation des applications constantes

Proposition Une application de classe C^1 sur un ouvert convexe $\mathscr{U}$ est constante sur $\mathscr{U}$ si et seulement si sa différentielle est nulle sur $\mathscr{U}$.

Proposition Une application de classe C^1 sur un ouvert convexe $\mathscr{U}$ est constante sur $\mathscr{U}$ si et seulement si toutes ses dérivées partielles (relatives à une base quelconque de E) sont nulles sur $\mathscr{U}$.

Proposition Une application de classe C^1 sur un ouvert connexe par arcs $\mathscr{U}$ est constante sur $\mathscr{U}$ si et seulement si sa différentielle est nulle sur $\mathscr{U}$.

II.7 Caractérisation par les fonctions composantes

Proposition Soit f une application d'un ouvert $\mathscr{U}$ de E dans F, h une application linéaire de F dans G.

Si f est différentiable en a, alors $h \circ f$ l'est, et

$$\mathrm{d}(h \circ f)(a) = h \circ \mathrm{d}f(a) .$$

(on a bien dit : h linéaire!)

Si f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$, alors $h \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$.

Proposition : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F. Soit f une application d'un ouvert $\mathscr{U}$ de E dans F. Pour tout élément x de $\mathscr{U}$, on décompose $f(x)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i .$$

Les f_i ainsi définies sont des applications de $\mathscr{U}$ dans $\mathbf{R}$, appelées applications composantes (ou coordonnées) de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

f est différentiable en a si et seulement si les f_i le sont toutes, et alors

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} df_i(a) e_i .$$

f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ si et seulement si toutes les f_i le sont.

Si $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ est une base de E, pour tout j entre 1 et p, pour tout élément a de $\mathscr{U}$,

$$\partial_j f(x) = \sum_{i=1}^{p} \partial_j f_i(x) e_i$$

(le membre de gauche de l'égalité existe si et seulement si le membre de droite existe), les ∂_j désignant les dérivations partielles dans la base$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ de E). Autrement dit,

Les dérivées partielles des fonctions composantes sont les composantes des dérivées partielles.

Table des matières