C12-1 : Fonctions de plusieurs variables réelles : différentielle, dérivée selon un vecteur

I Différentielle

I.1 Notation o

Soit $\alpha : A \subset E \to F$ une application définie sur une partie A de l'espace vectoriel de dimension finie E, à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie F. On suppose que A est un voisinage de 0_E dans E. On écrira

$$\alpha(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

pour traduire le fait que

$$\|\alpha(h)\|_F = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(\|h\|_E)$$

(propriété qui ne dépend pas du choix de la norme $\|.\|_E$ sur E ni de celui de la norme $\|.\|_F$ sur F). Autrement dit,

$$\alpha(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h) \iff \frac{1}{\|h\|_E}\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$$

Ou encore, pour utiliser les ϵ :

$\alpha(h) = \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|h\|_E \leq \eta \implies \|\alpha(h)\|_F \leq \epsilon \|h\|_E$$

I.2 Différentielle d'une application en un point

On rappelle que f, définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$*, à valeurs dans F, est dérivable en a ($a \in I$) lorsqu'il existe ℓ dans F tel que, au voisinage de* 0*,*

$$f(a+h) - f(a) = h\ell + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

l'application $h \mapsto h\ell$ étant linéaire.

a. Définition : différentiabilité et différentielle

Définition : Soit f définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de E, à valeurs dans F. Soit a un point de $\mathscr{U}$. On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ de E dans F telle que, au voisinage de 0_E :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

(l'écriture utilisée dans l'ancien programme,

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}\left(\|h\|_E\right)$$

peut encore se rencontrer, c'est rigoureusement équivalent)

ou encore, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$$

L'application ℓ est alors unique ; elle est appelée **application linéaire tangente** à f en a, ou **différentielle** de f en a, et est notée $\mathrm{d}f(a)$. Ainsi, la différentiabilité de f en a équivaut à l'existence d'un développement limité :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}\left(h\right)$$

(c'est la phrase à retenir dans toute cette page !) où $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de E dans F.

b. Différentiabilité et continuité

Proposition Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

I.3 Exemples

On utilisera beaucoup les dérivées partielles pour trouver des différentielles, voir plus loin. Mais la définition suffit parfois, comme dans les deux exemples classiques ci-dessous.

On rappelle qu'il existe sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des normes dites « subordonnées » ou « d'opérateurs », et que ces normes sont des normes d'algèbre unitaire, i.e. des normes qui vérifient

$$\|I_n\| = 1$$

et

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\| \; \|B\|$$

On a alors

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad \|A^k\| \leq \|A\|^k$$

(voir T5).

Exemple 1 :

Calculons la différentielle de

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ & A & \longmapsto & A^2 \end{array}.$$

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$; pour tout élément H de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on peut écrire :
$f(M+H) - f(M) = (M+H)^2 - M^2 = HM + MH + H^2 = \ell(H) + H^2$
où $\ell : H \mapsto MH + HM$ est linéaire, et, si $\|.\|$ est une norme d'algèbre quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\|H^2\| \leq \|H\|^2 = \underset{H \to 0_E}{\mathrm{o}}(\|H\|)$ (ce qu'on peut écrire, si on veut,
$H^2 = \underset{H \to (0)}{\mathrm{o}}(H)$).

f est donc différentiable en M, et sa différentielle en M est

$$\mathrm{d}f(M) : H \longmapsto HM + MH .$$

Exemple 2 :

Calculer la différentielle de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^3 \end{array} .$$

Exemple 3 (pour l'écrit)
Un peu plus difficile, on considère maintenant l'application $A \mapsto A^{-1}$ définie sur l'ouvert $\mathscr{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exemple 4 Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien. Soit $u \in S(E)$. Montrer que l'application

$$x \longmapsto (x|u(x))$$

est différentiable sur E. Calculer sa différentielle en un point $a \in E$.
Exemple 5 (pour l'oral)
Soit E un espace euclidien. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$, calculer sa différentielle en un point $a \in E \setminus \{0_E\}$.
On refera ce calcul avec les dérivées partielles, ce sera plus simple.

Exemple 6 Montrer que exp, définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), est différentiable en 0 et calculer $\mathrm{d}(\exp)(0)$ (où l'on note un peu abusivement 0 la matrice nulle).

I.4 Application constante, application linéaire

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est constante, alors elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$; et

$$\forall a \in \mathscr{U} \qquad df(a) =$$

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est la restriction à $\mathscr{U}$ d'une application linéaire $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$, alors elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$; et

$$\forall a \in \mathscr{U} \qquad df(a) =$$

I.5 Lien entre différentielle et dérivée

Lorsqu'on considère une fonction d'une variable réelle, on peut considérer sa dérivabilité et son éventuelle dérivée en un point $a \in \mathbf{R}$; plus précisément, $f : I \subset \mathbf{R} \to F$ est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in F$ telle que, au voisinage de 0 (dans $\mathbf{R}$)

$$f(a+h) = f(a) + h\ell + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

On voit que cela équivaut à dire que f est différentiable en a, sa différentielle valant :

La dérivée d'une fonction n'a de sens que si cette fonction est une fonction d'une variable réelle. La notion de différentielle est plus générale que la notion de dérivée.

On peut aussi définir des dérivées de fonctions d'une variable complexe, ce qui ne manque d'ailleurs pas d'intérêt. Le lien avec la différentielle est alors un peu plus complexe, mais très intéressant. Voir fonctions holomorphes.

II Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Ici, au lieu de procéder par analogie, on se ramène à une fonction d'une variable réelle en choisissant une direction.

II.1 Dérivée selon un vecteur : définition

Soit f définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de E, à valeurs dans F. Soit a un point de $\mathscr{U}$, v un vecteur de E. Il existe alors un réel strictement positif δ tel que, pour tout élément t de $[-\delta, \delta]$, $a + tv$ soit dans $\mathscr{U}$. On définit alors l'application ϕ sur $[-\delta, \delta]$ par

$$\phi(t) = f(a + tv) \ .$$

Lorsque ϕ est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée en a selon v, et on définit la dérivée de f en a selon v comme la dérivée en 0 de ϕ. On la note $\mathrm{D}_v f(a)$. En résumé,

Définition La dérivée de f en a selon v est

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a + tv) - f(a)\big)$$

lorsque cette limite existe. $\mathrm{D}_v f(a) \in F$.

Exemple

Considérons l'application f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Alors f admet une dérivée en $(0, 0)$ suivant tout vecteur *(En fait, f admet en tout point une dérivée selon tout vecteur)*. On peut même calculer, pour tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$, $D_v f\big((0, 0)\big)$.

II.2 Dérivées partielles relativement à une base

a. Définition

On fixe ici une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E (en pratique, le plus souvent, E sera $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et cette base sera la base canonique). Les dérivées partielles de f en a relativement à cette base sont, lorsqu'elles existent, les dérivées de f en a selon (ou suivant) les vecteurs de la base. Plus précisément,

Définition Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout i entre 1 et p, si f est dérivable en a selon e_i, on définit la i-ème dérivée partielle de f en a comme la dérivée de f en a selon e_i :

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$$

Remarque : Si elle existe,

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)F$$

Remarque : La notation $\mathrm{D}_{e_i} f(a)$ est plus lourde. Mais elle est plus précise, car elle se comprend sans connaître la base. Par exemple, si on considère les dérivées partielles par rapport à une base (u,v,w), $\mathrm{D}_u f(a)$ pourra être noté $\partial_1 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$. En revanche, relativement à une base (v',w',u), $\mathrm{D}_u f(a)$ sera noté $\partial_3 f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)$.

b. Mode de calcul

Détaillons un peu : on peut naturellement décomposer a dans la base $(e_1,\dots,e_p)$: $a = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$. La i-ème dérivée partielle de f en a est, si elle existe, la dérivée en 0 de l'application

$$t \longmapsto f(a+te_i) = f(a_1e_1+\cdots+(a_i+t)e_i+\cdots+a_pe_p)$$

ou encore la dérivée en a_i (si elle existe) de l'application

$$x \longmapsto f(a_1 e_1 + \cdots + x e_i + \cdots + a_p e_p)$$

C'est cette dernière manière de considérer le problème que l'on utilise principalement pour calculer des dérivées partielles dans la pratique.

II.3 Un exemple banal

Calculer les trois dérivées partielles relatives à la base canonique, en un point quelconque, de l'application
$h\ :\ (r,\phi,\theta) \mapsto (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$.

II.4 Un exemple fondamental

On peut aussi calculer les dérivées partielles de l'application f définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$, d'abord en un point autre que $(0,0)$, puis en $(0,0)$. *Cet exemple est particulièrement instructif, parce qu'il montre les deux techniques qu'il faut connaître pour le calcul des dérivées partielles : le calcul formel lorsqu'on dérive une « formule » et le retour à la définition en un point particulier. Ce double aspect des choses est assez fréquenté aux CC-INP.*

II.5 Un problème de notation

En Physique, les variables ont souvent des noms ($P, V, T\dots$) qui rappellent la grandeur physique qu'elles mesurent. En mathématiques, on a plutôt tendance à numéroter les variables. Mais dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, on délaisse souvent l'ordre des indices pour l'ordre lexicographique. En clair, on note plus souvent (x, y) ou (x, y, z) que (x_1, x_2) ou (x_1, x_2, x_3). Et la notation $\partial_1 f$, alias $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, est remplacée généralement par $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Ce peut ne pas être sans danger. En effet, la notation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

peut devenir douteuse. S'agit-il de $\partial_1 f(y, x)$ ou de $\dfrac{\partial}{\partial x}\big((x, y) \mapsto f(y, x)\big)$? Ce n'est pas la même chose (considérer par exemple $f\,:\,(x, y) \mapsto x^2 + y^3$).

Table des matières