C11 : Fonctions de plusieurs variables réelles (continuité)

Dans tout ce chapitre, on désigne par E, F, $G\dots$des espaces vectoriels normés **réels***, de dimension finie. On ne s'intéresse pas aux fonctions de plusieurs variables complexes. Mais on peut à travers ce chapitre commencer à s'intéresser aux fonctions d'une variables complexe, en les considérant comme fonctions de deux variables réelles : le couple (partie réelle, partie imaginaire).*
Ce chapitre contient surtout des révisions : on reconnaîtra des résultats déjà énoncés, mais qui ont jusque là été surtout utilisés pour des fonctions d'une seule variable.

I Fonctions de plusieurs variables réelles

Une fonction de plusieurs variables réelles est une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$, de $\mathbf{R}^3$ ou plus généralement d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les « variables » sont les composantes d'un vecteur dans une base de cet espace vectoriel. Par exemple, la fonction exponentielle, définie sur $\mathbf{C}$, peut être vue comme fonction de deux variables réelles :

$$(x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!}$$

II Définition de la continuité et des limites

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F, et soit a un élément de E adhérent à A :

$$f : A \subset E \longrightarrow F , \ a \in \overline{A}.$$

Soit b un élément de F. On dit que f a pour limite b en a lorsque, pour tout réel strictement positif ϵ, il existe un réel strictement positif η tel que

$$\forall x \in A \qquad \|x-a\|_E \leq \eta \implies \|f(x)-b\|_F \leq \epsilon \, .$$

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, a un point de A. On dit que f est continue en a lorsque f a une limite en a (en effet, cette limite ne peut alors être autre que $f(a)$). On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Donc on connaissait déjà les définitions. On va maintenant passer en revue quelques techniques permettant d'étudier la continuité ou les limites de fonctions de plusieurs variables réelles.

III Continuité « par opérations »

Rappel Les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbf{R}^2$ (linéaires, avec un espace de départ qui est de dimension finie) et, plus généralement, si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, les applications $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \mapsto x_j$ sont continues sur E.

Toute application obtenue par opérations algébriques, et compositions par des fonctions continues, à partir des applications précédentes, est donc continue. Par exemple, on dira que la fonction

$$(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \ln(x^2 + y^2)$$

est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ « par opérations ».

IV Cas particulier : fonctions de deux variables réelles

IV.1 Principe

Pour l'étude de certaines fonctions de deux variables réelles au voisinage de $(0,0)$, le passage en coordonnées polaires peut être adapté, ρ désignant (au signe près...) la norme euclidienne de (x, y). On le retrouve dans un certain nombre d'exercices. L'intérêt est de remplacer « (x,y)$\longrightarrow$ $(0,0)$ » par $\rho \to 0$, avec $\rho = \|(x, y\|_2$. Pour des fonctions de plus de deux variables réelles, on peut encore envisager la même chose, mais c'est beaucoup plus rare.

IV.2 Exemples

Montrer que les fonctions

$$(x, y) \longmapsto \frac{\left(\sin(x^2+y^2)\right)^2}{x^2+y^2}$$

et

$$(x, y) \longmapsto \frac{x^5}{\mathrm{Arctan}(x^4+y^4)}$$

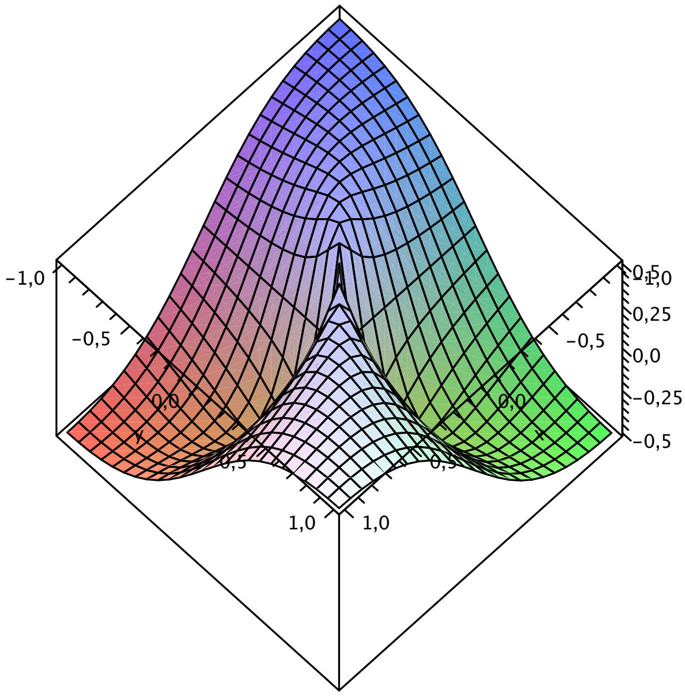
se prolongent en des fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$.

V La continuité des applications partielles ne suffit pas

Il ne suffit pas que les applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ soient continues pour que f le soit. Etudier par exemple la fonction définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

et $f(0,0) = 0$. C'est évidemment encore pire s'il y a plus de deux variables.



VI Continuité sous le signe $\int$

VI.1 Théorème(s)

Théorème Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $X \times I$, où X est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose :

1. f continue par rapport à la première variable : pour tout $t \in I$, la fonction $f(.,t)\ :\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur X.
2. f continue par morceaux par rapport à la deuxième variable : pour tout $x \in X$, $f(x,.)\ :\ t \longmapsto f(x,t)$ continue par morceaux sur I.
3. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que

$$\forall x \in X \quad \forall t \in I \qquad |f(x,t)| \leq \phi(t)$$

(hypothèse de domination).

Alors $g: x \to \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur X.

Il s'agit du théorème déjà vu ; seule différence : on ne se contente pas de X intervalle de **R**, *on étend à X partie quelconque d'un evn de dimension finie.*

Extension 1 Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A est un intervalle de **R**. On suppose :

1. f continue par rapport à sa première variable.
2. f continue par morceaux par rapport à sa deuxième variable.
3. Pour tout segment K inclus dans A, il existe une fonction ϕ_K continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que

$$\forall x \in K \quad \forall t \in I \qquad |f(x,t)| \leq \phi_K(t)$$

(hypothèse de domination sur tout segment).

Alors $g: x \to \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

Extension 2 Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $X \times I$, où X est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $a \in X$. On suppose :

1. f continue par rapport à la première variable : pour tout $t \in I$, la fonction $f(.,t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.
2. f continue par morceaux par rapport à la deuxième variable : pour tout $x \in X$, $f(x,.) : t \mapsto f(x,t)$ continue par morceaux sur I.
3. Il existe un voisinage relatif V de a dans X et une fonction ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que

$$\forall x \in V \quad \forall t \in I \qquad |f(x,t)| \leq \phi(t)$$

(hypothèse de domination « locale »).

Alors $g: x \to \int_I f(x,t)dt$ est définie sur V et continue en a.

VI.2 Un exemple : le noyau de la chaleur

C'est **L'**exemple : apparu dans plusieurs problèmes X-ens (dont le ens Math C 2018).

On « rappelle » :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. On définit, pour tout $(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$,

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

(Γ n'a rien à voir avec la fonction Γ, c'est ici le noyau de la chaleur) et on définit la fonction Kf sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ par

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+ \qquad Kf(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\Gamma(x-y,t)\, dy$$

et $\qquad \forall x \in \mathbf{R} \qquad Kf(x,0) = f(x)$.

1. Justifier l'existence de Kf et démontrer :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \quad Kf(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+v\sqrt{4t}) e^{-v^2}\, dv$$

2. Montrer que Kf est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$.

VII Suites et séries de fonctions

VII.1 Les théorèmes (rappel)

On considère des fonctions $f : A \subset E \longrightarrow F$ où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A (ou seulement sur un voisinage de a), et si chaque f_n est continue au point a de A, f l'est aussi.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, et si chaque f_n est continue sur A, f l'est aussi.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans A, et si chaque f_n est continue sur A, f l'est aussi.

Théorème Si les f_n sont continues en a, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A (ou seulement sur un voisinage de a), alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Théorème (bis) Si les f_n sont continues sur A, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A ou seulement sur tout compact inclus dans A, alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Rappel La convergence uniforme se montre souvent par le moyen de la convergence normale.

VII.2 Un exemple

On a déjà utilisé ces théorèmes pour montrer, par exemple, la continuité de $u \mapsto \exp(u)$ ou de $A \mapsto \exp(A)$, mais pas sous forme de fonction de plusieurs variables (la variable n'était pas décrite par ses composantes dans une base).

Montrer que l'application

$$(x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+iy)^n}{(2n)!}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Table des matières