Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (Ab 1, Ab 2)

I Exercices ccp 2015

Analyse 39

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

2. (a) Démontrez que pour $x = (x_n) \in l^2$ et $y = (y_n) \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire dans l^2.
3. On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme associée.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{C}$.
4. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles .(c'est-à -dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-à$^{\text{a}}$tre un nombre fini de termes)
   Déterminer $F^\perp$. (au sens de (|)).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Algèbre 68

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

(c) en utilisant le rang de la matrice,

(d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

$\boxed{\text{Algèbre 76}}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

$\boxed{\text{Algèbre 77}}$

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

$\boxed{\text{Algèbre 78}}$

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

   (b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

$\boxed{\text{Algèbre 79}}$

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Algèbre 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Algèbre 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\,({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}\,({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Algèbre 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Algèbre 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B \rangle = \mathrm{tr}({}^t\!AB)$ où tr désigne la trace et ${}^t\!A$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^{\perp}$.

Algèbre 93

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté par la base orthonormée (i, j, k).

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (i, j, k) est

$A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Prouver que f est un endomorphisme orthogonal.
   (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.
2. En déduire la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

II Généralités, orthogonalité, projections

— Faire des dessins.

— Lorsque des hypothèses sont données faisant intervenir la norme, penser à élever au carré : le carré de la norme euclidienne se manipule beaucoup plus facilement que la norme euclidienne.

— Jusqu'à présent, lorsque l'on devait démontrer qu'un extremum était atteint, on pensait à des arguments de continuité et compacité. Pour l'unicité, souvent les arguments sont de convexité ou de calcul de dérivée (ou de différentielle) pour la recherche de points critiques. Il faut maintenant penser, pour des problèmes de minimum, au théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie. Si on pense que c'est cela qu'il faut appliquer, on définit un produit scalaire convenable et un sous-espace qui permet de résoudre le problème.

— Les problèmes de polynômes orthogonaux interviennent dans de nombreux énoncés.
— L'orthonormalisation de Schmidt peut souvent être remplacée par une orthogonalisation, plus légère. Il faut avoir présente à l'esprit l'interprétation de l'orthonormalisation de Schmidt en termes de projection orthogonale.
— Pour démontrer qu'un vecteur d'un espace préhilbertien réel est nul, on montrer souvent qu'il est orthogonal à tout vecteur, ou encore qu'il est orthogonal à lui-même.

Exercice 1 (Oral Mines). Soit p un projecteur d'un espace euclidien E (on suppose $p \neq \Theta$). Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Si p est un projecteur orthogonal, le théorème de Pythagore donne

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$

qui donne bien ce qu'on veut. La réciproque est moins évidente, mais se fait si on sait bien poser le problème. On veut montrer que, si $y \in \mathrm{Ker} p$ et si $z \in \mathrm{Im} p$, alors $y \perp z$. Tout le raisonnement se place dans le plan $\mathrm{Vect}(y, z)$, il est donc conseillé de faire un dessin, sur lequel on peut voir ce qui se passe. Mais contentons-nous d'écrire

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad \|p(y + tz)\|^2 \leq \|y + tz\|^2$$

(prendre le carré de la norme est un réflexe quasi systématique lorsqu'on travaille avec la norme euclidienne), ou encore

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad t^2\|z\|^2 \leq \|y\|^2 + 2t(y|z) + t^2\|z\|^2$$

On aboutit à

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad \|y\|^2 + 2t(y|z) \geq 0$$

qui donne facilement $(y|z) = 0$.

Exercice 2 (Oral Mines). Calculer

$$\inf\Big\{\int_0^{+\infty}(x^3+ax^2+bx)^2e^{-2x}\ ;\ (a,b)\in\mathbf{R}^2\Big\}$$

(le calcul effectif est un peu pénible, on se contentera de donner une méthode efficace !)

Qu'est-ce qui doit ici nous faire penser à un problème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie ? déjà, le fait que l'« inf » est sur un espace vectoriel de dimension finie : notant F l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré ≤ 2 sur $[0,+\infty[$, la question équivaut à calculer

$$\inf\Big\{\int_0^{+\infty}(x^3-P(x))^2e^{-2x}\ dx;\ P\in F\Big\}$$

Pourrquoi ce signe $-$? parce que ça facilite la compréhension de la suite...Le carré doit ensuite faire penser à une norme euclidienne, ou plus exactement à son carré ; existe-t-il une norme euclidienne telle que, en notant

$$f\ :\ x\mapsto x^3$$

on ait

$$\|f-P\|^2=\int_0^{+\infty}(f(x)-P(x))^2e^{-2x}\ dx \qquad ?$$

à ce stade, les choses deviennent plus simples : on définit le produit scalaire, d'un genre classique

$$(g|h)=\int_0^{+\infty}e^{-2t}g(t)h(t)dt$$

sur l'espace des fonctions polynômes (on peut d'ailleurs se contenter des fonctions polynômes de degré ≤ 3). Le théorème de projection sur un espace de dimension finie dit que l'inf est un min, atteint en un point unique qui est P_0, projeté orthogonal de f sur F (faire un dessin). Le problème du calcul de P_0 est plus pénible techniquement. Si on note

$$P_0\ :\ x\mapsto \alpha x^2+\beta x+\gamma$$

(on a $P_0\in F$) alors on a $f-P_0\in F^{\perp}$, ce qui se traduit par les trois équations

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\left(x^3-\alpha x^2-\beta x-\gamma\right)dx=0$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}x\left(x^3-\alpha x^2-\beta x-\gamma\right)dx=0$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}x^2\left(x^3-\alpha x^2-\beta x-\gamma\right)dx=0$$

(on écrit que $f-P_0$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F, ici la base naturelle $(1, X, X^2)$. Ce système n'est pas si difficile à écrire si on se souvient de la fonction Γ (faire un changement de variable $x = u/2$). Il est de Cramer, on en déduit (α, β, γ) et donc P_0, puis on calcule $\|f - P_0\|^2$, ou encore $\|f\|^2$ et $\|P_0\|^2$ car, en vertu du théorème de Pythagore (faire un dessin) :

$$\|f\|^2 = \|P_0\|^2 \ + \ \|f - P_0\|^2$$

Exercice 3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{S}_n$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques. Déterminer

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n}\left[\sum_{i,j}(A_{i,j} - M_{i,j})^2\right].$$

Dans ce genre d'exercice qui se pose à l'oral, l'important est d'identifier un problème de projection orthogonale. Comme dans l'exercice précédent. Ensuite, il faut trouver la réponse aux questions suivante : dans quel espace ? ici, assez clairement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour quel produit scalaire ? ici, le produit scalaire canonique, qui est donné par

$$(U|V) = \sum_{i,j} U_{i,j}V_{i,j} = \mathrm{Tr}\left(U^T\ V\right)$$

Sur quel sous-espace ? sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Une bonne idée est de déterminer une base orthonormale de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ pour ce produit scalaire canonique. Une meilleure est de montrer que, pour ce produit scalaire canonique,

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{R})^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$$

Alors le théorème de projection orthogonale dit que la borne inférieure recherchée est un minimum, atteint en un point unique :

$$M = P_{\mathcal{S}_n(\mathbf{R})}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

et valant

$$\|\frac{1}{2}(A - A^T)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(A_{i,j} - A_{j,i})^2$$

Exercice 4 (Projection sur un convexe fermé, CCP 2001 par exemple).

On désigne par $\mathcal{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien E.

1. On suppose $\mathcal{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathcal{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que :

$$||x-y|| = \inf_{z\in\mathcal{C}} ||x-z|| \quad (= d(x,\mathcal{C})).$$

Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.

2. On suppose seulement $\mathcal{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.

3. Soit y un élément de $\mathcal{C}$; démontrer que

$$\Big(\ y = p(x)\ \Big) \iff \Big(\forall z\in\mathcal{C}\quad \langle y-x, y-z\rangle \leq 0\ \Big)$$

(pour $\Longrightarrow$, on pourra écrire que, si $z\in\mathcal{C}$, pour tout $t\in[0,1]$, $p(x)+t\big(z-p(x)\big)\in\mathcal{C}$).

4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :

$$||p(x)-p(x')||^2 \leq \langle x-x', p(x)-p(x')\rangle$$

puis démontrer que p est continue.

---

1. **On suppose $\mathcal{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathcal{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que :**

$$||x-y|| = \inf_{z\in\mathcal{C}} ||x-z|| \quad (= d(x,\mathcal{C})).$$

Existence : Soit x fixé dans E. L'application $z\mapsto \|x-z\|$, continue sur le compact $\mathcal{C}$, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle atteint un minimum en un point $y\in\mathcal{C}$.

Unicité : C'est nettement plus difficile, et il faut faire un dessin. Remarquons que l'existence ne suppose pas la norme euclidienne, on va en revanche en avoir besoin pour l'unicité.

Supposons que y_1 et y_2 soient deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que

$$\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d(x,\mathcal{C})$$

L'identité du parallélogramme donne alors :

$$2(\|y_1-x\|^2+\|y_2-x\|^2) = \|y_1+y_2-2x\|^2 + \|y_1-y_2\|^2$$

(ce n'est qu'un dessin clair et bien observé qui peut donner l'idée d'écrire cela !) Divisons par 4 :

$$d(x,\mathcal{C})^2 = \|\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x\|^2 + \frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2$$

Mais, par convexité, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in \mathcal{C}$, donc $\|\frac{1}{2}(y_1 + y_2) - x\|^2 \geq d(x, \mathcal{C})^2$, ce qui entraîne nécessairement $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, donc $y_1 = y_2$.
On peut écrire différentes choses menant à cette unicité, voir des triangles isocèles et des triangles rectangles plutôt que des parallélogrammes, etc...

---

2. **On suppose seulement $\mathcal{C}$ fermée. Démontrer que le résultat est encore vrai.**

Existence : On part de l'idée simple suivante : ce n'est pas parmi les points de $\mathcal{C}$ « éloignés » de x que l'on trouvera y. On considère donc encore x fixé dans E. Soit $r > 0$ tel que

$$B'(x, r) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$$

(l'existence d'un tel r ne pose pas de problème : on peut prendre $r = d(x, y)$ où y est un élément quelconque de $\mathcal{C}$). Posons alors $\mathcal{C}' = B'(x, r) \cap \mathcal{C}$. Fermée (comme intersection de fermés) et bornée (car incluse dans une boule) dans E de dimension finie, $\mathcal{C}'$ est compacte. Il existe donc $y_0 \in \mathcal{C}'$ tel que

$$\|x - y_0\| = d(x, \mathcal{C}')$$

Si $z \in \mathcal{C}$, de deux choses l'une :
— Soit $z \in \mathcal{C}'$, et alors $\|x - y_0\| \leq \|x - z\|$,
— Soit $z \in \mathcal{C}'$, et alors $\|x - y_0\| \leq r < \|x - z\|$
On voit que $\|x - y_0\|$ minore $\{\|x - z\| \ ; \ z \in \mathcal{C}\}$. Mais $y_0 \in \mathcal{C}$, donc

$$\|x - y_0\| = d(x, \mathcal{C})$$

Unicité : La démonstration du **1** marche encore : on n'a utilisé que la convexité de $\mathcal{C}$.

Soit y un élément de $\mathcal{C}$; démontrer que

$$\Big(\ y = p(x) \ \Big) \iff \Big(\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leq 0 \ \Big)$$

— Supposons que $y \in \mathcal{C}$ vérifie

$$\forall z \in \mathcal{C} \quad \langle y - x, y - z \rangle \leq 0 \ \Big)$$

Alors, pour tout $z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, y - z \rangle \\ &\geq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $y = p(x)$.

— Supposons $y = p(x)$; soit $z \in \mathcal{C}$; par convexité, on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad (1-t)y + tz \in \mathcal{C}$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|(1-t)y + tz - x\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

ce qui s'écrit

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|(y-x) + t(z-y)\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

ou encore, en développant,

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|y-x\|^2 + t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geq \|y - x\|^2$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geq 0$$

d'où, en multipliant par $1/t$ si $t > 0$,

$$\forall t \in]0,1] \qquad t\|z-y\|^2 + 2\langle y-x, z-y\rangle \geq 0$$

et en prenant la limite quand $t \to 0$,

$$\langle y-x, z-y\rangle \geq 0$$

qui est bien ce qu'on voulait.

---

3. **En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :**

$$||p(x) - p(x')||^2 \leq \langle x - x', p(x) - p(x')\rangle$$

puis démontrer que p est continue

Partons du second membre :

$$\langle x-x', p(x)-p(x')\rangle = \langle x-p(x), p(x)-p(x')\rangle + \langle p(x)-p(x'), p(x)-p(x')\rangle + \langle p(x') - x', p(x) - p(x')\rangle$$

La question précédente permet alors de conclure à l'inégalité voulue. Puis, par Cauchy-Schwarz, on obtient que p est 1-lipschitzienne donc continue.

Exercice 5 (Oral X, écrit Mines, un produit scalaire sur l'espace des polynômes). On considère le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$ sur $\mathbf{R}[X]$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une suite orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.
3. Soit $n \geq 2$. On suppose que P_n possède k racines de multiplicité impaire dans $]0,1[$, $a_1, \ldots, a_k$, avec $k < n$.
   (a) Vérifier que, si $Q = \prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$, alors $(P_n|Q) = 0$
   (b) En écrivant $(P_n|Q)$ sous forme intégrale, aboutir à une contradiction.
   (c) Démontrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont toutes dans $]0,1[$.
4. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, on ait
$$\int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$
   Donner une expression de ces scalaires en fonction des intégrales sur $[0,1]$ des L_k, où les L_k désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
5. On reprend les notations de la question précédente. En utilisant la division euclidienne par P_n, montrer que
$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X] \qquad \int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)\ .$$
   Ce type de résultat est à la base des méthodes de Gauss pour les calculs approchés d'intégrales.

Exercice 6. 1. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :
$$\langle P,Q\rangle_2 \ = \ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P(t)Q(t)dt$$
On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation, valable pour tout n entier naturel et tout réel θ :
$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$
Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale ce produit scalaire.

2. Soit E l'espace $C([-1,1],\mathbf{R})$. Montrer que, si $(f,g)\in E^2$,

$$\langle f,g\rangle_2 \;=\; \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)g(t)dt$$

est bien défini. Montrer que l'on construit ainsi un produit scalaire sur E, et que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$, que l'on munit du produit scalaire

$$(f,g)\longmapsto\int_{-1}^{1} f(t)\; g(t)\; dt\;.$$

1. Soit f un élément de E, R_n sa projection orthogonale sur l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Démontrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans E.
2. Donner un exemple de suite totale dans E.
3. Démontrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ orthonormale de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n, $\deg(P_n)=n$.
4. Démontrer que, pour tout élément f de E,

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\langle f,P_n\rangle^2$$

Exercice 8. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :

$$\langle P,Q\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}P(t)Q(t)dt$$

Démontrer qu'il existe une unique suite orthogonale de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, tels que pour tout n, P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n.

Démontrer qu'il existe deux suites (λ_n) et (μ_n) de réels telles que, pour tout entier naturel $n\geq 2$,

$$P_n=(X-\lambda_n)P_{n-1}-\mu_nP_{n-2}$$

(indication : décomposer XP_{n_1} dans la base des P_k).

Exercice 9 (Déterminants de Gram : exercices d'oral et problèmes d'écrit, dont CCP 06). Si $u_1, \dots, u_n$ sont n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $\big(E, \langle ., . \rangle\big)$, on définit leur matrice de Gram, $G(u_1, \dots, u_n)$, comme la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en ligne i et colonne j est $\langle u_i, u_j \rangle$.

1. Démontrer que si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors le déterminant de sa matrice de Gram est nul (on pourra commencer par supposer que u_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_i).
2. On suppose maintenant $(u_1, \dots, u_n)$ libre, et on considère $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de
   Vect$(u_1, \dots, u_n)$. On note :
   $$A = \mathcal{M}_{(e_1,\dots,e_n)}(u_1, \dots, u_n).$$
   (a) Exprimer $G = G(u_1, \dots, u_n)$ à l'aide d'un produit faisant intervenir A et sa transposée.
   (b) Montrer que le déterminant de G est strictement positif.
3. On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ libre ; on désigne par F le s.e.v. engendré par $(u_1, \dots, u_n)$, et par x un vecteur de E. Démontrer :
   $$\big[d(x, F)\big]^2 \;=\; \frac{\det\big(G(u_1, \dots, u_n, x)\big)}{\det det\big(G(u_1, \dots, u_n)\big)}$$
   On pourra par exemple, dans le calcul de $\det\big(G(u_1, \dots, u_n, x)\big)$ écrire $x = (x - z) + z$, z désignant le projeté orthogonal de x sur F.

---

1. Supposons $u_n = \alpha_{n-1}u_{n-1} + \ldots + \alpha_1 u_1$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$,
   $$\langle u_i, u_n \rangle = \alpha_{n-1}\langle u_i, u_{n-1}\rangle + \ldots + \alpha_1 \langle u_i, u_1 \rangle$$
   ou encore
   $$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix} = \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, u_{n-1} \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_{n-1} \rangle \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_1 \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle \end{pmatrix}$$
   que l'on peut lire de la manière suivante :
   $$c_n = \alpha_{n-1}c_{n-1} + \ldots + \alpha_1 c_1$$
   où les c_k sont les colonnes de la matrice de Gram $G(u_1, \dots, u_n)$. Les colonnes étant liées, le déterminant est nul.

   Dans le cas général, il n'est pas nécessaire que u_n soit combinaison linéaire des autres u_i. Mais si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée, au moins un des

u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_k. Et on conclut de la même manière, en montrant que la colonne c_i est alors combinaison linéaire des autres.

---

2. Rappelons que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$,

$$G_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

et, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormale,

$$A_{i,j} = \langle e_i, u_j \rangle$$

Mais d'autre part (calcul du produit scalaire dans une base orthonormale) :

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u_i \rangle \langle e_k, u_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} A_{k,j} \\ &= \left({}^t A \; A \right)_{i,j} \end{aligned}$$

et donc

$$G = {}^t A \; A$$

On en déduit

$$\det(G) = (\det A)^2 > 0$$

($A \in GL_n(\mathbf{R})$). En fait, on peut dire plus : G est symétrique définie positive.

---

3. La dernière colonne de $G(u_1, \ldots, u_n, x)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \langle u_2, x \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z \rangle \\ \langle u_2, z \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, z \rangle \\ \langle x, z \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u_1, x - z \rangle \\ \langle u_2, x - z \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, x - z \rangle \\ \langle x, x - z \rangle \end{pmatrix}$$

où z est le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Donc :

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x\rangle \\ \langle u_2, x\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, x\rangle \\ \langle x, x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, z\rangle \\ \langle u_2, z\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n, z\rangle \\ \langle z, z\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \langle x-z, x-z\rangle \end{pmatrix}$$

Utilisons la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne. On obtient, notant $g(\dots) = \det(G(\dots))$:

$$g(u_1, \ldots, u_n, x) = g(u_1, \ldots, u_n, z) + \begin{vmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \dots & \dots & \langle u_1, u_n\rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle u_n, u_1\rangle & \dots & \dots & \langle u_n, u_n\rangle & 0 \\ \langle z, u_1\rangle & \dots & \dots & \langle z, u_n\rangle & \|x-z\|^2 \end{vmatrix}$$

(on réutilise le fait que $\langle u_k, x\rangle = \langle u_k, z\rangle + \langle u_k, x-z\rangle = \langle u_k, z\rangle$). On développe alors par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant ; tenant compte de la nullité de $g(u_1, \ldots, u_n, z)$ (famille liée), on conclut :

$$g(u_1, \ldots, u_n, x) = \|x-z\|^2 \; g(u_1, \ldots, u_n)$$

Exercice 10 (décomposition QR, oral X, Mines).

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que

   $$A = QR$$

   (on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).

   Si $(c_1, \ldots, c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A, A est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{BC}$ de $\mathbf{R}^n$ à la base $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$. On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathcal{BC}$ est orthonormale). Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par le procédé de Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :

   $$\mathrm{P}_{\mathcal{BC}}^{\mathcal{C}} = \mathrm{P}_{\mathcal{BC}}^{\mathcal{B}} \; \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Mais $P_{\mathcal{BC}}^{\mathcal{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une bas orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Schmidt garantit que, pour tout k,

$$c_k \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$

où l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ (on a en effet, pour tout k,

$$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(c_1, \ldots, c_k) \quad)$$

et donc...ça marche.

---

2. Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.

On écrit le système équivalent $RX = Q^T B$, c'est un système triangulaire.

---

3. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?

Visiblement non, vu le (petit) choix dans l'algorithme de Schmidt. Mais allons plus loin : à quelle condition a-t-on

$$QR = Q'R'$$

où Q et Q' sont orthogonales, R et R' triangulaires supérieures inversibles ?
On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Ainsi de suite...Bref,

$$\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbf{R}) = \{D_\epsilon \ ; \ \epsilon \in \{-1, 1\}^n\}$$

où, si $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, $D_\epsilon = \text{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q'R' \ \Leftrightarrow \exists \epsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R' = D_\epsilon R \text{ et } Q' = QD_\epsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR, au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

---

4. On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1, \dots, c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$, alors

$$|\det M| \leq ||c_1|| \dots ||c_n||$$

(a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.

Le premier membre est nul, le second membre est positif.

(b) On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma 1, \dots, \gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R, si q est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à Q, exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k

---

$c_k = q(\gamma_k)$

(c) Conclure

Donc, pour tout k, $\|c_k\| = \|\gamma_k\|$. Or, pour tout k,

$$\|\gamma_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} R_{i,k}^2} \geq |R_{k,k}|$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\prod_{k=1}^{n} |R_{k,k}| = |\det(R)| = |\det(M)|$$

(d) Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

Oui. Si et seulement si la matrice R est diagonale, d'après ce qui précède. Et donc si et seulement si les colonnes de M forment une famille orthogonale.

Exercice 11 (Matrices de Householder et décomposition QR). On se permet dans cet exercice d'identifier un vecteur u de $\mathbf{R}^n$ et la matrice colonne U de ses composantes dans la base canonique. L'espace $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On définit la matrice :

$$H(u) = I_n - \frac{2}{||u||^2} U^t U$$

où u est un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$ et on la confond avec l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui lui est canoniquement associé.

1. Démontrer que, pour tout vecteur x de $\mathbf{R}^n$,

$$H(u)(x) = x - \frac{2}{||u||^2}(u|x)u$$

Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme $H(u)$?

2. Soit A une matrice carrée réelle inversible d'ordre n. Soit c_1 le premier vecteur colonne de A. Déterminer u tel que $H(u)c_1$ soit une colonne de la forme ${}^t(||c_1||, 0, \ldots, 0)$. En déduire un algorithme permettant d'obtenir une décomposition QR de A.

Exercice 12 (Oral Mines). Soit, dans E préhilbertien réel, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que, si $i \neq j$, $\|u_i - u_j\| = 1$. Montrer qu'une telle famille est libre. Si E est de dimension finie n, peut-on trouver une famille de n vecteurs ayant ces propriétés ?

La condition proposée équivaut à $\forall i \qquad \|u_i\| = 1$ et $\forall i \neq j \qquad (u_i|u_j) = 1/2$. Si on écrit une combinaison linéaire nulle des u_i, remarquons d'abord que pour l'indépendance il suffit de considérer une combinaison linéaire d'un nombre fini de u_i, et ça ne change rien si on suppose ce nombre fini de u_i indexé par $\{1, \ldots, p\}$. Supposons alors

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$$

et faisons le produit scalaire avec u_j ; on obtient, en multipliant par 2,

$$\sum_{i\neq j} \lambda_i + 2\lambda_j = 0$$

pour tout j. En ajoutant toutes ces égalités, on obtient $\sum_{i=1}^{p} \lambda_j = 0$. Et en retranchant cette dernière identité à toutes les équations, on tombe sur $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Pour l'existence, c'est bien de faire une figure et de voir que ce qu'on nous demande, c'est de montrer l'existence d'un triangle équilatéral dans le plan,

d'un tétraèdre régulier dans l'espace de dimension 3, etc...Or pour construire un tétraèdre régulier, a priori on construit un triangle équilatéral qui sert de base, puis on construit le vecteur suivant...donc faisons une récurrence sur n. Comme toujours on peut trouver le cas $n = 1$ un peu famélique, alors considérons $n = 2$. On part d'un vecteur unitaire u_1. Pour construire u_2, on considère e_2 unitaire orthogonal à u_1. On cherche $u_2 = \alpha u_1 + \beta e_2$. On veut $(u_1|u_2) = 1/2$, i.e. $\alpha = 1/2$. Et $\|u_2\| = 1$. C'est-à-dire $\beta = \pm\sqrt{3}/2$. On n'est pas étonné de retrouver le cosinus et le sinus de $\pi/3$.
Soit E un espace de dimension $n+1$, euclidien bien sûr, et H un hyperplan. Par hypothèse de récurrence il existe un n-uplet $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs convenables dans E. Soit e unitaire directeur de $H^\perp$. On cherche

$$u_{n+1} = \alpha(u_1 + \ldots + u_n) + \beta e$$

(en effet, il n'y a pas de raison que la composante sur un des u_k soit différente des autres). La condition $(u_k|u_{n+1}) = 1/2$ (pour $1 \leq k \leq n$) donne

$$\alpha(1 + \frac{n-1}{2}) = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire $\alpha = 1/(n+1)$. Et alors on détermine β par la condition $\|u_{n+1}\| = 1$. Le peut-on ? on commence par calculer

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = n + \frac{n(n-1)}{2}$$

(en développant le carré scalaire). La condition devient donc (e est orthogonal à $u_1 + \cdots + u_n$) :

$$\frac{1}{(n+1)^2}\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \beta^2 = 1$$

et on arrive bien à trouver β (car la valeur trouvée pour β^2 est ≥ 0).

Exercice 13 (Produit scalaire sur un espace de variables aléatoires). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé dénombrable, tel que

$$\forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) \neq 0$$

On notera $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui admettent un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{L}^2$ est un espace vectoriel, et que

$$(X|Y) = E(XY)$$

définit un produit scalaire sur cet espace.

2. Si $X \in \mathcal{L}^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.
3. A partir de la question précédente, retrouver la formule

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

4. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, Y non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY+b \ ; \ (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.
5. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, on définit leur coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Montrer que $\rho(X,Y) \in [-1,1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ± 1 ?
6. Soit X, Y deux éléments de $\mathcal{L}^2$. On note

$$F = \left\{ Z \in \mathcal{L}^2 \ ; \ \exists (a_x)_{x \in X(\Omega)} \in \mathbf{R}^{X(\Omega)} \quad Z = \sum_{x \in X(\Omega)} a_x \mathbf{1}_{(X=x)} \right\}$$

déterminer, s'il existe, le projeté orthogonal de Y sur F (on suppose, pour tout x, $P(X=x) \neq 0$).

1. L'inégalité

$$|XY| \leq \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$$

fait que le produit de deux éléments de $\mathcal{L}^2$ est d'espérance finie. Et donc, si X et Y sont dans $\mathcal{L}^2$, $X+Y$ y est aussi, en vertu de

$$(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$$

le membre de droite ne contenant que des termes d'espérance finie. Comme λX y est évidemment, $\mathcal{L}^2$ est bien un espace vectoriel. Et $(X,Y) \mapsto \mathbf{E}(XY)$ est bien défini dessus. Les propriétés d'un produit scalaire sont sans problème, on remarque seulement que si $(X|X) = 0$,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) X^2(\omega) = 0$$

ce qui vu l'hypothèse de départ donne $X = 0$. *Sans l'hypothèse de départ, on peut toujours construire ce genre de produit scalaire, mais on a seulement* $(X|X) = 0 \Rightarrow X = 0$ *presque sûrement. Ce qui n'est dans le fond pas gênant, mais oblige à déborder un peu du strict cadre du programme.*

2. L'existence et l'unicité est assurée par le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit a la projection cherchée : on a $X - a \perp 1$, donc

$$\mathbf{E}\left((X-a)\times 1\right) = 0$$

et cela donne $a = \mathbf{E}(X)$. Pas si étonnant si on y réfléchit. Et notant $F = \text{Vect}(1)$,

$$d(X,F) = \sqrt{\mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X))^2\right)} = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

3. Soit p la projection orthogonale sur F. On a

$$p(aX+b) = ap(x) + p(b) = ap(X) + b$$

et donc

$$(aX+b) - p(aX+b) = a(X - p(X))$$

Prenant le carré de la norme des deux membres, on obtient bien par la question précédente

$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

4. Notons $\alpha Y + \beta$ la projection cherchée. Alors $(X - \alpha Y - \beta | 1) = (X - \alpha Y - \beta | Y) = 0$. Ce qui donne le système

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Y^2)\alpha & + & \mathbf{E}(Y)\beta & = & \mathbf{E}(XY) \\ \mathbf{E}(Y)\alpha & + & \beta & = & \mathbf{E}(X) \end{cases}$$

On remarque que le déterminant est $\mathbf{V}(Y)$, non nul car Y n'est pas constante. Et on trouve

$$\alpha = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)} \qquad , \qquad \beta = \frac{\mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(XY)}{\mathbf{V}(Y)}$$

Pour le calcul de la distance, il est utile de remarquer que $\left(1, \dfrac{1}{\sigma(Y)}(Y - \mathbf{E}(Y))\right)$ est une base orthonormale du plan $\text{Vect}(1,Y)$ (facile à voir si on a compris la deuxième question). Donc avec les notations précédentes,

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \|X\|^2 - \left[(X|1)^2 + \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left(X|Y - \mathbf{E}(Y)\right)^2\right]$$

ou encore

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \mathbf{E}(X^2) - \left(\mathbf{E}(X)\right)^2 - \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left(\text{Cov}(X,Y)\right)^2$$

D'où finalement

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left[\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) - \left(\text{Cov}(X,Y)\right)^2\right]$$

5. De la question précédente, ou de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en effet, on remarque que

$$\text{Cov}(X,Y) = (X - \mathbf{E}(X) | Y - \mathbf{E}(Y)) \qquad)$$

on déduit l'encadrement proposé. Avec égalité si et seulement si Y est constante ou X est de la forme $aY + b$.

III Isométries vectorielles, endomorphismes symétriques

- L'outil principal pour l'étude des endomorphismes symétriques (ou matrices symétriques) est le théorème fondamental ou théorème spectral, dont on se sert sous forme matricielle ou sous forme vectorielle.
- Si A est la matrice de u dans la base orthonormée des e_i, on a $a_{i,j} = \big(e_i \mid u(e_j)\big)$.

Exercice 14 (**Matrices symétriques positives, définies positives).** *Exercice important...On traitera indépendamment les questions matricielles (les trois premières) et les questions vectorielles (les deux dernières)*

1. On dit qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est positive lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ M\ X\ \geq\ 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbf{R}^+$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Par théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et D diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$M = PDP^{-1} = PDP^T$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ M\ X\ \geq\ 0 &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ PDP^T\ X\ \geq\ 0\\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T DY\ \geq\ 0\end{aligned}$$

car l'application $X \mapsto P^T X$ est une bijection de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans lui-même (un automorphisme, même), de réciproque $Y \mapsto PY$. Or, avec des notations « évidentes »,

$$Y^T DY = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

et $\mathrm{Sp}(M) = \{d_i\ ;\ 1 \leq i \leq n\}$. Si tous les d_i sont positifs, alors $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T DY\ \geq\ 0$, et réciproquement, en prenant les Y dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

---

2. Montrer que tous les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive sont positifs. Donner un exemple de matrice symétrique positive dont tous les coefficients sont strictement négatifs sauf les coefficients diagonaux.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ positive. Si les E_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, pour tout i on a

$$E_i^T S E_i = S_{i,i}$$

d'où la réponse à la première question. Rappelons d'autre part que, si J est une matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, les valeurs propres de J (qui est symétrique réelle, c'est la manière la plus simple de dire qu'elle est daigonalisable) sont 0 et n. On en déduit donc, si $\alpha \in \mathbf{R}$, que les valeurs propres de $I_n - \alpha J$ sont 1 et $1 - n\alpha$. Il suffit de choisir $\alpha = 1/n$ pour répondre à la deuxième question.

---

3. On dit qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est définie positive lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{(0)\} \qquad X^{\mathrm{T}}\ M\ X\ >\ 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Caractériser par leur spectre les éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ parmi les éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

Les calculs de la première question montrent que les éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ sont les éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

---

4. Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E. On dit que u est symétrique positif lorsque

$$\forall x \in E \qquad (x|u(x)) \geq 0$$

Montrer qu'un endomorphisme symétrique u est positif si et seulement si
$\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+$.

Le théorème spectral donne l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres de u. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une telle base. Pour tout i, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Soit $x \in E$. Décomposons x dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors

$$(x|u(x)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

---

5. Définir et caractériser un endomorphisme symétrique « défini positif »

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E. On dit que u est symétrique défini positif lorsque

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad (x|u(x)) > 0$$

Un endomorphisme symétrique u est défini positif si et seulement si
$\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}_*^+$.

Exercice 15 (Formule variationnelle). Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que l'application

$$x \longmapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$$

atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum, les exprimer en fonction des valeurs propres de u.
Traduire ce résultat matriciellement.

Par théorème spectral, on fixe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i$. Il n'est pas restrictif de supposer $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Et alors, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a

$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

donc

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq (x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$$

l'inégalité de gauche est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E$, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E$. Donc il y a un minimum et un maximum, qui sont $\mathrm{Min}\,(\mathrm{Sp}(A))$ et $\mathrm{Max}\,(\mathrm{Sp}(A))$. Pour les matrices symétriques réelles, même chose en considérant le quotient

$$\frac{X^T\ A\ X}{X^T\ X}$$

X parcourant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\backslash\{0\}$. *Cet hyper-classique a une belle extension, le lemme de Courant-Fischer, donné dans les exercices de révision pour l'écrit.*

Exercice 16 (Adjoint). Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E. On note $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, et on note u^* l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$.

1. Montrer que u^* est l'unique endomorphisme de E tel que

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

2. Déterminer le noyau et l'image de u^* en fonction du noyau et de l'image de u.
3. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, que vaut u^* ?
4. Si $u \in \mathcal{O}(E)$, que vaut u^* ?
5. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

[Adjoint] Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E. On note $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, et on note u^* l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$.

1. Montrer que u^* est l'unique endomorphisme de E tel que

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, $B = M_{\mathcal{B}}(v)$; $x, y \in E$, on note $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = M_{\mathcal{B}}(y)$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in E^2 \qquad (u(x)|y) = (x|v(y)) &\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2 \qquad (AX)^T Y = X^T(BY) \\
&\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2 \qquad X^T(A^T - B)Y = 0 \\
&\Leftrightarrow B = A^T \\
&\Leftrightarrow v = u^*
\end{aligned}$$

(l'avant-dernière équivalence se justifie comme suit : un vecteur orthogonal à tous les vecteurs est nul, donc $\forall Y \ (A^T - B)Y = 0$. Et donc $A^T - B = 0$. La réciproque ne pose aucun problème.

---

2. Déterminer le noyau et l'image de u^* en fonction du noyau et de l'image de u.

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Ker}(u^*) &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad (x|u^*(y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad (u(x)|y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in (\mathrm{Im}(u))^{\perp} \end{aligned}$$

Puis on peut faire le même genre de chose, ou remarquer que $(u^*)^* = u$. Donc ce qui précède montre que

$$\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Im}(u^*))^{\perp}$$

et donc

$$(\mathrm{Ker}(u))^{\perp} = \mathrm{Im}(u^*)$$

---

3. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, que vaut u^* ?

---

u

---

4. Si $u \in \mathcal{O}(E)$, que vaut u^* ?

---

u^{-1}

---

5. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Il suffit de montrer une implication, l'équivalence en découle. Supposons F stable par u, et soit $x \in F^{\perp}$. On calcule, pour tout $y \in F$,

$$(u^*(x)|y) = (x|u(y)) = 0$$

(car $u(y) \in F$). On a donc bien $u^*(x) \in F^{\perp}$. Puis, pour la réciproque, on utilise la partie directe : si $F^{\perp}$ est stable par u^*, $(F^{\perp})^{\perp}$ est stable par $(u^*)^*$, ce qui conclut.

Exercice 17 (Oral Mines). Soit A une matrice orthogonale carrée d'ordre n.

Soit U la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Exprimer $\sum_{i,j} a_{i,j}$ à l'aide de U et de A. En déduire :

$$\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leq n \ .$$

Y-a-t-il des cas d'égalité ?

Savoir que AU est une matrice colonne dont les coefficients sont les sommes des coefficients de chaque ligne de A aide à trouver

$${}^t\!U \ A \ U = \sum_{i,j} a_{i,j}$$

Mais considérons le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$; on peut alors interpréter

$${}^t\!U \ A \ U = \langle U, AU\rangle$$

Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle U, AU\rangle| \ \leq \ \|U\| \ \|AU\|$$

Mais A, orthogonale, conserve la norme euclidienne. Comme $\|U\| = \sqrt{n}$, l'inégalité est démontrée (assez facile avec l'indication, mais sans ladite indication ce le serait nettement moins). L'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si AU et U sont liés, soit si et seulement si $AU = \pm U$ (A conserve la norme). Soit si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 (respectivement -1).

Exercice 18 (étude d'une suite d'endomorphismes). Soit E un espace euclidien, u une isométrie vectorielle de E, on définit $v = Id_E - u$.

1. Démontrer que $\ker v = (\operatorname{im} v)^\perp$.
2. On définit
$$P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$
Démontrer que $\big(P_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, pour tout élément x de E, vers la projection orthogonale de x sur $\ker v$.

---

1. Considérons $x \in \ker v$, $y \in \operatorname{im} v$. Il existe z tel que $y = v(z)$. Et

$$(x|y) = (x|v(z)) = (x|z) - (x|u(z))$$

Mais $x = u(x)$, donc $(x|u(z)) = (u(x)|u(z))$ et u conserve le produit scalaire ; on conclut bien que

$$(x|y) = 0$$

Il en ressort que $\ker v \perp \operatorname{im} v$. Donc $\ker v \subset (\operatorname{im} v)^\perp$. L'égalité résulte alors de l'égalité des dimensions, elle-même conséquence du théorème du rang.
2. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ où $y \in \ker v$, c'est-à-dire $y = u(y)$, et $z \in (\ker v)^\perp = \operatorname{im}(v)$, ce qui signifie qu'il existe $t \in E$ tel que $z = v(t) = t - u(t)$. On a alors

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) \ + \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

Mais pour tout k on a $u^k(y) = y$ (récurrence sur k), et $u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$ ce qui fait que la deuxième somme est télescopique. Donc

$$P_n(x) = y + \frac{1}{n}\big(t - u^n(t)\big)$$

Mais par orthogonalité de u, on a $\|u^n(t)\| = \|t\|$, donc

$$P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$

ce qui conclut.

Exercice 19 (Les réflexions engendrent $\mathcal{O}(n)$). On se propose dans cet exercice de démontrer le résultat suivant : toute matrice $A \in \mathcal{O}(n)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions. Plus précisément : si $A \in \mathcal{O}(n)$, il existe $p \leq n$ et des matrices de réflexions $M_1, \ldots, M_p$ telles que

$$A = M_1 M_2 \ldots M_p$$

On rappelle (en fait, ce n'est pas vraiment dans le programme...) qu'on appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Et donc qu'on appelle matrice de réflexion une matrice M de $\mathcal{O}(n)$ diagonalisable, telle que

$$\dim(E_1(M)) = n - 1 \qquad \text{et} \qquad \dim(E_{-1}(M)) = 1$$

1. **[Cas $n = 2$, matriciellement]** En calculant le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

démontrer qu'une matrice R de $SO(2)$ peut s'écrire sous la forme

$$R = M_1 M_2$$

où M_1 et M_2 sont deux matrices de réflexions, l'une des deux pouvant être choisie arbitrairement. En déduire que le résultat annoncé est vrai pour $n = 2$.

2. **[Cas $n = 2$, astucieusement]** Soit R une matrice de rotation, M une matrice de réflexion. Que peut-on dire de MR ? Que vaut M^2 ? retrouver alors le résultat de la question précédente, sans avoir besoin de calcul.
3. **[Cas général]** On suppose $n \geq 3$. En utilisant le cas $n = 2$ et le théorème de réduction des isométries vectorielles, démontrer le résultat annoncé.

On dit que les réflexions engendrent le groupe des isométries vectorielles.

---

1. Calcul facile :
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$
Toute matrice R de $SO(2)$ peut s'écrire sous la forme
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$
et donc peut s'écrire $M(\alpha)M(\alpha-\phi)$ pour tout α, ou $M(\phi+\beta)M(\beta)$ pour tout β. Or les $M(\alpha)$ sont bien des matrices de réflexion (polynôme caractéristique : X^2-1, elles sont donc diagonalisables avec pour valeurs propres -1 et 1, chacune avec un sous-espace propre qui est une droite vectorielle).
2. Une propriété vraie en dimension 2 mais pas en dimension ≥ 2 est que les isométries vectorielles sont soit des rotations soit des réflexions. Autre manière de dire la même chose : les éléments de $\mathcal{O}(2)$ qui ont pour déterminant -1 sont des réflexions. Donc si M et R ont pour déterminants respectifs -1 et 1, MR a pour déterminant -1 et est donc. . .une réflexion (insistons encore sur le fait que ce raisonnement simple n'est valable qu'en dimension 2). Mais $M^2 = I_2$ (valable pour toute symétrie, a fortiori orthogonale, a fortiori pour toute réflexion). Donc, si on note $M' = MR$, en multipliant par M' à droite on aura $R = MM'$.
3. On ne va pas faire une récurrence, mais un produit par blocs. En effet, notant $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, le théorème de réduction dit que pour toute matrice $A \in \mathcal{O}(n)$ il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que
$$A = P \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\alpha_s} & \\ & & & I_t \end{pmatrix} P^T$$

(si $A \in \mathcal{SO}(n)$) ou telle que

$$A = P \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\alpha_s} & & \\ & & & -1 & \\ & & & & I_t \end{pmatrix} P^T$$

(si $A \in \mathcal{SO}(n)$). Rappelons que pour obtenir une écriture de ce type, on met les éventuels -1 du théorème de réduction dans des matrices R_π, jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'au plus un. Il n'y a en revanche pas tellement d'intérêt à mettre les 1 dans des matrices R_0. Traitons le premier cas : on peut écrire

$$A = A_1 \dots A_s$$

avec $A_1 = P \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} P^T$, $A_2 = P \begin{pmatrix} I_2 & & \\ & R_{\alpha_2} & \\ & & I_{n-4} \end{pmatrix} P^T$, etc...

Le cas $n = 2$ donne l'existence de deux matrices M_1 et M_2 de réflexions (des matrices 2×2) telles que

$$R_{\alpha_1} = M_1 M_2$$

Mais alors

$$A_1 = \widetilde{M_1}\widetilde{M_2}$$

avec $\widetilde{M_1} = P \begin{pmatrix} M_1 & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} P^T$, $\widetilde{M_2}$ de même. Les matrices $\widetilde{M_1}$ et $\widetilde{M_2}$ sont des matrices de réflexions (matrices orthogonales, avec 1 pour valeur propre et un sous-espace propre de dimension $n-1$, -1 valeur propre simple). On fait de même avec les autres A_k et on en déduit le résultat. Le deuxième cas se traite de même, avec une matrice en plus contenant le -1 sur la diagonale...

Exercice 20 (Oral ens).
Démontrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ (on note $\mathcal{O}_n(\mathbf{Q})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ qui sont à coefficients rationnels).
Indication : se demander ce que cet énoncé peut bien faire ici.

Il est très raisonnable de commencer par le cas $n = 2$, même si cela finalement ne servira à rien, voir plus bas. On voit assez vite que le problème est de trouver, pour un couple (x, y) de réels tels que $x^2 + y^2 = 1$, une suite de couples de rationnels (s_n, t_n) tels que

$$(s_n, t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, y)$$

La manière la plus efficace de traiter ça est d'être très performant en trigonométrie : si $\theta \in \mathbf{R}$ n'est pas un multiple de π, notant $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on a

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

Or tout réel t est limite d'une suite de rationnels, ce qui permet de conclure.
On peut aussi chercher les points à coordonnées rationnelles sur le cercle unité, ce qui revient à chercher les triplets d'entiers pythagoriciens, i.e. vérifiant

$$m^2 + n^2 = p^2$$

Problème assez bien documenté (voir par exemple la tablette Plimpton 322, datée d'environ -1800), rappelons que c'est le seul cas dans lequel l'équation de Fermat a des vraies solutions, bref on se trouve dans un endroit bien visité des mathématiques.
On peut alors, à partir du cas $n = 2$, conclure par récurrence.
Mais il y a mieux : soit s_u la réflexion d'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ où $u \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$.
On voit très bien sur un dessin la formule (non au programme, mais intéressante)

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad s_u(x) = x - \frac{2}{\|u\|^2}(u|x)u$$

(commencer par l'établir dans le cas où u est unitaire). Mais alors, si $\mathcal{B}$ est la base canonique, pour tout $u \in \mathbf{Q}^n$ la formule précédente montre que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s_u) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{Q})$$

Or tout vecteur non nul u de $\mathbf{R}^n$ est limite d'une suite de vecteurs non nuls à coefficients rationnels (il suffit d'approcher chaque composante par une suite de rationnels). On en déduit sans grande difficulté que toute matrice de réflexion est limite d'une suite de matrices à coefficients rationnels. Et on n'a plus qu'à utiliser l'exercice précédent, et la continuité du produit.

Exercice 21 (Connexité par arcs de $SO(2)$). 1. Définir une application continue ϕ de $[0, 1]$ dans SO(2) telle que $\phi(0) = I_2$ et $\phi(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2. On considère $M \in SO(n)$ $(n \geq 2)$. En utilisant la réduction des isométries vectorielles, construire une application $t \mapsto M(t)$, de $[0,1]$ dans $SO(n)$, continue, telle que $M(0) = I_n$ et telle que $M(1) = M$ (on dit que $SO(n)$ est connexe par arcs).
3. Montrer que, si $M \in SO(n)$ et $M' \in O(n) \setminus SO(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $O(n)$, telle que $\psi(0) = M$ et $\psi(1) = M'$

Exercice 22 (**Produit scalaire canonique sur** $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

1. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}\ B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. On note $||.||$ la norme associée. Calculer la norme d'une matrice en fonction de ses coefficients.
3. En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$$
4. Si A est une matrice symétrique, écrire $||A||$ en fonction des valeurs propres de A.
5. Quel est, pour ce produit scalaire, l'orthogonal de l'espace des matrices symétriques ?

---

1. **Démontrer que l'application** $(A, B) \mapsto tr({}^tAB)$ **est un produit scalaire sur** $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Première méthode : Il n'est guère douteux que l'on définisse ainsi une forme bilinéaire symétrique (la symétrie vient du fait que la trace de ${}^tAB$ est aussi celle de sa transposée, ${}^tBA$). Est-elle définie positive ? il suffit pour le voir de calculer
$$tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2)$$
qui est bien positif et n'est nul que si et seulement si A l'est.
Deuxième méthode : Calculons, directement,
$$tr({}^tAB) = \sum_{j=1}^{n} ({}^tAB)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \Big) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$$

On voit que c'est bien un produit scalaire, et qu'il mérite le qualificatif de « canonique » car la base canonique est orthonormale pour ce produit scalaire.

---

2. **On note $||.||$ la norme associée. Calculer la norme d'une matrice en fonction de ses coefficients.**

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2}$$

---

3. $||.||$ **est-elle une norme subordonnée ?**

Non, car $\|I_n\| = \sqrt{n} \neq 1$.

---

4. **Si A est une matrice symétrique, écrire $||A||$ en fonction des valeurs propres de A.**

On peut écrire $A = PDP^{-1} = P\ D\ {}^tP$ où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
On a $\|A\|^2 = \mathrm{tr}({}^tA\ A) = \mathrm{tr}(P\ {}^tD\ {}^tP\ P\ D\ {}^tP)\ =\ \mathrm{tr}(P\ D^2\ P^{-1}) =\ \mathrm{tr}(D^2)$ et donc

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

si $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplicité.

---

5. **Quel est, pour ce produit scalaire, l'orthogonal de l'espace des matrices symétriques ?**

Si B est antisymétrique et A symétrique, on a

$$\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\big({}^t(AB)\big) = \mathrm{tr}\big({}^tB\ {}^tA\big) = \mathrm{tr}(-BA) = -\,\mathrm{tr}(AB)$$

et un nombre égal à son opposé est nul. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux. Donc $\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) \subset \big(\mathcal{S}_n(\mathbf{R})\big)^{\perp}$. Et, ces deux sous-espaces ayant même dimension, ils sont égaux. *Autre argument : la somme $\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale donc directe, or toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit $M = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) + \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$ somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, donc $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.*

Exercice 23 (racine carrée d'une matrice symétrique positive, décomposition polaire). *La décomposition polaire d'un endomorphisme est analogue à la décomposition trigonométrique d'un nombre complexe (forme module-argument). C'était un grand classique lorsque les matrices symétriques positives et les endomorphismes symétriques positifs étaient au programme.*

On dit qu'une matrice symétrique (respectivement un endomorphisme autoadjoint) est positive (respectivement positif) lorsque toutes ses valeurs propres sont positive.

Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Si A est une matrice symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que
$$B^2 = A$$
Que dire de B si A est supposée définie positive, i.e. si toutes ses valeurs propres sont strictement positives ?
2. Soit u un endomorphisme symétrique positif.
   (a) Etablir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif telle que $h^2 = u$.
   (b) En utilisant le fait que, si $h^2 = u$, h et u commutent, démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
3. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est symétrique positive si et seulement si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ M\ X \geq 0$$
En déduire que l'ensemble des matrices symétriques positives est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Montrer que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{(0)\} \qquad X^T\ M\ X > 0$$
4. Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$.
   (a) Vérifier que $A^T\ A$ est une matrice symétrique définie positive.
   (b) Démontrer qu'il existe un couple (Q, S) de matrices, la première orthogonale et la seconde symétrique définie positive, telles que $A = QS$.

5. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
6. Montrer que $O(n)$ est compact.
7. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Démontrer, en utilisant les questions précédentes, qu'il existe un couple (Q, S) de matrices, la première orthogonale et la seconde symétrique positive, telles que $A = QS$.

[**racine carrée d'une matrice symétrique positive, décomposition polaire**]
Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Si A est une matrice symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que
$$B^2 = A$$
Que dire de B si A est supposée définie positive, i.e. si toutes ses valeurs propres sont strictement positives ?

Par théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ (i.e. diagonale) telles que
$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$
Et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (notation non officielle...) où les λ_i sont les valeurs propres de$D$, donc de A. Donc les λ_i sont positifs, et, en posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$ on obtient une matrice symétrique (deuxième forme) et à valeurs propres positives (première forme) telle que $B^2 = A$.
Si A est définie positive, elle est dans $GL_n(\mathbf{R})$ (elle n'a pas 0 pour valeur propre), donc B aussi (prendre le déterminant, ou encore dire que $A^{-1}BB = I_n$), donc B, étant déjà positive, est définie positive.

---

2. Soit u un endomorphisme symétrique positif.
   (a) Etablir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif telle que $h^2 = u$.

On pourrait bien sûr passer par les matrices et utiliser la question précédente. Mais plutôt : soit, par le théorème spectral, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad u(e_i) = \lambda_i e_i$$
où les λ_i sont positifs. Soit v l'unique endomorphisme tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$$

alors $v^2 = u$ (car v^2 et u coïncident sur une base), et v est symétrique car sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ l'est (elle est en effet diagonale). Les valeurs propres de v sont les $\sqrt{\lambda_i}$ donc sont positives.

(b) En utilisant le fait que, si $h^2 = u$, h et u commutent, démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?

$hu = uh = h^3$, d'où la commutation. Donc les sous-espaces propres de u sont stables par h. Soit $E_\lambda(u)$ l'un d'eux. Sur $E_\lambda(u)$, h induit un endomorphisme symétrique donc diagonalisable que l'on note h_λ. Si μ est une valeur propre de h_λ, alors $\mu \geq 0$, et d'autre part μ^2 est valeur propre de $h_\lambda^2 = \lambda Id_{E_\lambda(u)}$ (en effet $\lambda Id_{E_\lambda(u)}$ est l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$). Donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Et donc (un endomorphisme qui n'a qu'une valeur propre est une homothétie) $h_\lambda = \sqrt{\lambda} Id_{E_\lambda(u)}$. D'où l'unicité de h (car

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

et un endomorphisme de E est donc défini de manière unique par ses restrictions aux $E_\lambda(u)$).

---

3. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est symétrique positive si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ M\ X \geq 0$$

En déduire que l'ensemble des matrices symétriques positives est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Montrer que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{(0)\} \qquad X^T\ M\ X > 0$$

Tout a été fait dans un précédent exercice sauf la question topologique. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\phi_X\ :\ M \mapsto X^T M X$ est continue car linéaire avec un espace de départ ($\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) de dimension finie. De même $\psi\ :\ M \mapsto M - M^T$. Or l'ensemble des matrices positives est

$$\psi^{-1}(\{(0)\}) \cap \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \phi_X^{-1}(\{0\})$$

et une intersection de fermés est un fermé.

---

4. Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$.

(a) Vérifier que $A^T\ A$ est une matrice symétrique définie positive.

C'est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$X^T(A^TA)X = Y^TY \qquad \text{où } Y = AX$$

Or, si $X \neq (0)$, $AX \neq (0)$, or si $Y \neq (0)$, $Y^TY > 0$.

(b) Démontrer qu'il existe un couple (Q, S) de matrices, la première orthogonale et la seconde symétrique définie positive, telles que $A = QS$.

En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique définie positive telle que

$$S^2 = A^TA$$

Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule

$$Q^TQ = (S^{-1})^TA^TAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

Donc Q est orthogonale.

---

5. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$M - \frac{1}{p}I_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} M$$

Or, au moins à partir d'un certain rang, $1/p \notin \mathrm{Sp}(M)$.

---

6. Montrer que $O(n)$ est compact.

Fermé et borné...n'oublions surtout pas : d'un espace vectoriel de dimension finie.

---

7. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Démontrer, en utilisant les questions précédentes, qu'il existe un couple (Q, S) de matrices, la première orthogonale et la seconde symétrique positive, telles que $A = QS$.

Soit (A_p) une suite d'éléments de $GL_n(\mathbf{R})$ qui converge vers A. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe Q_p orthogonale et S_p symétrique positive telles que

$$A_p = Q_pS_p$$

On extrait de (Q_p), par compacité, une suite $\big(Q_{\phi(p)}\big)$ qui converge vers Q orthogonale. Et en écrivant

$$S_{\phi(p)} = Q^T_{\phi(p)} A_{\phi(p)}$$

On voit que la suite $\big(S_{\phi(p)}\big)$ converge vers $Q^T A$. Par **3.**, $Q^T A = S$ est symétrique positive. Ce qui conclut.

Exercice 24 (Décomposition polaire sans topologie).
Soit u un endomorphisme de E.

1. Démontrer que u^*u est un endomorphisme symétrique positif. On note h l'unique endomorphisme symétrique positif tel que $h^2 = u^*u$ (obtenu dans l'exercice précédent).
2. Démontrer que le noyau et l'image de h sont supplémentaires orthogonaux.
3. Démontrer que le noyau de u est égal au noyau de h.
4. Construire un automorphisme orthogonal de E tel que $u = vh$. Vérifier que, si $u = v_1 h_1$ où v_1 et h_1 sont respectivement orthogonal et symétrique positif, $h = h_1$. Vérifier que l'on peut avoir $v \neq v_1$.

La première question a déjà été faite dans un exercice précédent. $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(h)$ sont supplémentaires orthogonaux comme il se doit pour tout endomorphisme symétrique. Et donc

$$u = vh \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathrm{Ker}(h)\ u(x) = v\big(h(x)\big) \text{ et } \forall x \in \mathrm{Im}(h)\ u(x) = v\big(h(x)\big)$$

Or, par **(c)**, $\forall x \in \mathrm{Ker}(h)\ u(x) = v\big(h(x)\big) = 0_E$. En définitive,

$$u = vh \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathrm{Im}(h)\ u(x) = v\big(h(x)\big)$$

Mais par **(b)** et le théorème d'isomorphisme, h induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(h)$ (supplémentaire de $\mathrm{Ker}(h)$) sur $\mathrm{Im}(h)$, i.e. un automorphisme de $\mathrm{Im}(h)$. Notons k cet automorphisme ; alors

$$\begin{aligned} u = vh \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathrm{Im}(h) \qquad u(x) = v\big(h(x)\big) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathrm{Im}(h) \qquad u(x) = v\big(k(x)\big) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathrm{Im}(h) \qquad v(x) = u\big(k^{-1}(x)\big) \end{aligned}$$

Mais ce n'est pas terminé, car il faut aussi que v soit un automorphisme orthogonal. Remarquons déjà que l'endomorphisme $u \circ k^{-1}$ conserve le produit scalaire sur $\mathrm{Im}(h)$: si $(x,y) \in \mathrm{Im}(h)^2$, alors

$$\begin{aligned}
\Big(u\big(k^{-1}(x)\big)|u\big(k^{-1}(y)\big)\Big) &= \Big((u^* \circ u)\big(k^{-1}(x)\big)|k^{-1}(y)\Big) \\
&= \Big(h^2\big(k^{-1}(x)\big)|k^{-1}(y)\Big) \\
&= \Big(k^2\big(k^{-1}(x)\big)|k^{-1}(y)\Big) \\
&= \Big(k(x)|k^{-1}(y)\Big) \\
&= \Big(h(x)|k^{-1}(y)\Big) \\
&= \Big(x|(h \circ k^{-1})(y)\Big) \\
&= \Big(x|(k \circ k^{-1})(y)\Big) \\
&= \Big(x|y\Big)
\end{aligned}$$

(on utilise le fait que sur $\mathrm{Im}(h)$, $h = k$, et le fait que h est autoadjoint). Donc $u \circ k^{-1}$ transforme une base orthonormale de $\mathrm{Im}(h)$ en une base orthonormale de $\mathrm{Im}(h)$. Soit alors $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(h)$, définissons v par $v = u \circ k^{-1}$ sur $\mathrm{Im}(h)$ et v laisse fixes les vecteurs de $\mathcal{B}$ (ceci définit bien v, par ses restrictions à $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(h)$. On construit ainsi un automorphisme orthogonal (il transforme une base orthonormale, réunion de $\mathcal{B}$ et d'une base orthonormale de $\mathrm{Im}(h)$, en base orthonormale) qui vérifie bien les conditions imposées. Et le choix de $\mathcal{B}$ montre qu'il n'y a pas unicité. Pour finir, remarquons qu'avec les hypothèses imposées,

$$u = v_1 h_1 \Rightarrow u^* u = h_1^2 \Rightarrow h_1 = h$$

par la propriété d'unicité démontrée au début de l'exercice.

Exercice 25.

1. On dit qu'une matrice symétrique est positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet une « racine carrée » symétrique positive (on ne demande pas d'examiner l'unicité).
2. Si A est symétrique positive et inversible, démontrer que A s'écrit

   $$A = C^t C$$

   où C est triangulaire inférieure (décomposition de Choleski).
   On pourra utiliser l'exercice sur la la décomposition QR.

Exercice 26 (Unicité : démonstration dans un cas particulier).
Soit A une matrice dans $S_n(\mathbf{R})$. On admet que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}^+ \quad \Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\} \quad X^T\ A\ X\ > 0$$

Lorsque A vérifie ces propriétés, on dit que A est symétrique définie positive. On note $S_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ il existe $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$.
2. Montrer que si $A = B^2$, A et B commutent.
3. Montrer que si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, si $B^2 = A$, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $B = P(A)$.
4. On suppose que B et C sont deux matrices de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ telles que $B^2 = C^2 = A$.
   (a) Montrer que B et C commutent.
   (b) Montrer que $B + C \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.
   (c) En déduire que $B = C$.

---

1. Un classique à savoir faire, pas trop difficile.
2. $AB = BA = B^3$.
3. On écrit $B = QDQ^{-1} = QDQ^T$, $Q \in O(n)$, $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_k > 0$. Alors $A = QD^2Q^{-1} = QD^2Q^T$. Par théorème d'interpolation de Lagrange, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(d_i^2) = d_i$ pour tout i. Alors

$$P(A) = QP(D^2)Q^{-1} = QDQ^{-1} = B$$

4. (a) Question précédente : $\mathbf{R}[A]$ est commutatif.
   (b) $B+C$ est symétrique et, si $X \neq 0$, $X^T(B+C)X = X^TBX + X^TCX > 0$.
   (c) Par (a), $B^2 - C^2 = (B - C)(B + C)$. Or $B + C \in GL_n(\mathbf{R})$.

Exercice 27 (Oral X). Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \qquad \mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} (e_i | u(e_i))$$

2. Soit h un endomorphisme symétrique positif dont les valeurs propres sont toutes positives. Démontrer que, pour toute isométrie vectorielle w,

$$|\ \mathrm{tr}(wh)\ | \leq \mathrm{tr}(h)$$

Exercice 28. 1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs. Démontrer que

$$\Big[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\Big]^{1/n} \geq 1 + \Big[\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)\Big]^{1/n}$$

2. On dit qu'une matrice symétrique est positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet une « racine carrée » symétrique positive (on ne demande pas d'examiner l'unicité).
3. Utiliser les questions précédentes pour montrer que, si A est symétrique positive d'ordre n,

$$\big[\det(I_n + A)\big]^{1/n} \geq 1 + \big[\det(A)\big]^{1/n}$$

puis que, si A et B sont symétriques positives,

$$\big[\det(A+B)\big]^{1/n} \geq \big[\det(A)\big]^{1/n} + \big[\det(B)\big]^{1/n}$$

(on remarquera que seul le cas où au moins l'une des deux matrices est inversible est intéressant. Si A est symétrique positive inversible, on écrira, en notant $A^{1/2}$ la « racine carrée » de A et $A^{-1/2}$ son inverse $B = A^{1/2}\big(A^{-1/2}BA^{-1/2}\big)A^{1/2}$ et on se ramènera à l'inégalité précédente.

On a, si f est convexe sur un intervalle I, et si $x_1, \dots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \dots + f(x_n)\right)$$

La fonction ln étant croissante, l'inégalité proposée équivaut à

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\lambda_i) \geq \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i\right)\right)$$

...du moins si les λ_i sont strictement positifs. Mais si l'un des λ_i est nul, l'inégalité que l'on cherche est simple, on peut donc les supposer tous strictement positifs. L'inégalité proposée est donc équivalente à :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\exp(\ln\lambda_i)\right) \geq \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i\right)\right)$$

Et si on montre que l'application $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe, on conclut (en appliquant l'inégalité générale de convexité aux $\ln\lambda_i$). Or cette fonction est C^∞ sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

qui croît manifestement (on peut aussi calculer la dérivée seconde).

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, on écrit $A = P\ D\ P^{-1} = P\ D\ {}^tP$ où $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\forall i \quad \lambda_i \geq 0$. Donc $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

$\det(I_n + A) = \det(P(I_n + D)P^{-1}) = \det(I_n + D) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i)$. On est donc ramené à l'inégalité du début.

Si A et B sont symétriques positives, $A+B$ l'est (classique, utiliser la définition et non la caractérisation par le spectre). Si les deux matrices sont positives non définies, leurs déterminants sont nuls, le membre de droite de l'inégalité souhaitée vaut 0, le membre de gauche est positif (une matrice symétrique positive a un spectre inclus dans $\mathbf{R}^+$, et est diagonalisable, donc a un déterminant positif). On peut donc supposer $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Il est classique, à partir de la diagonalisation de A avec matrice de passage orthogonale, de trouver $A^{1/2}$ symétrique définie positive telle que

$$\left(A^{1/2}\right)^2 = A$$

On notera $\left(A^{1/2}\right)^{-1} = A^{-1/2}$, on a donc

$$A + B = A^{1/2}(I_n + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

Or, si $C = A^{-1/2}BA^{-1/2}$, on vérifie que C est symétrique (B et $A^{-1/2}$ le sont, et le produit est palindromatique). De plus, si X est une colonne non nulle,

$${}^tXCX = {}^tYBY \qquad \text{avec} \qquad Y = A^{-1/2}X \neq (0)$$

donc ${}^tXCX > 0$. On conclut que C est symétrique définie positive (symétrique positive suffisait). Et donc on est ramené à ce qui précède :

$$\begin{aligned}
[\det(A+B)]^{1/n} &= \left[\det\left(A^{1/2}(I_n + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}\right)\right]^{1/n} \\
&= \left[\left(\det(A^{1/2})\right)^2\right]^{1/n} \left[\det\left(I_n + A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)\right]^{1/n} \\
&\geq (\det A)^{1/n}\left(1 + \left[\det(A^{-1/2}BA^{-1/2})\right]^{1/n}\right)
\end{aligned}$$

Mais $\det(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \dfrac{\det B}{\det A}$, on conclut...

Exercice 29 (exponentielle d'une matrice symétrique). Montrer que l'exponentielle d'une matrice symétrique réelle est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Enoncer et démontrer une réciproque.

Exercice 30. Montrer que les éléments de $SO(2)$ sont les exponentielles des matrices de $\mathcal{A}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 31 (endomorphismes antisymétriques). On dira qu'un endomorphisme u de l'espace euclidien E est antisymétrique lorsque

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad (u(x)|y) = -\,(x|u(y))$$

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E. Il est assez clair que c'est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout vecteur x de E, $u(x)$ est orthogonal à x.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles pour un endomorphisme antisymétrique ? peut-il être diagonalisable ?
3. Soit A la matrice de l'endomorphisme u dans une base orthonormale. A quelle propriété de A reconnaît-on que l'endomorphisme u est antisymétrique ?
4. Démontrer que $\mathcal{L}(E)$ est somme directe de l'espace des endomorphismes antisymétriques et de l'espace des endomorphismes symétriques. Quelles sont les dimensions de ces deux espaces ?
5. Démontrer que, si u est antisymétrique, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 J & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r J & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[endomorphismes antisymétriques]
On dira qu'un endomorphisme u de l'espace euclidien E est antisymétrique lorsque

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad (u(x)|y) = -\,(x|u(y))$$

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E. Il est assez clair que c'est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout vecteur x de E, $u(x)$ est orthogonal à x.

Si u est antisymétrique, alors

$$\forall x \in E \qquad \big(x|u(x)\big) = -\big(u(x)|x\big)$$

ce qui montre que $\big(x|u(x)\big) = 0$.
Réciproquement, si $\forall x \in E \quad \big(x|u(x)\big) = 0$, alors

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(x+y|u(x+y)\big) = 0$$

ce qui, en développant, donne

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(x|u(y)\big) = -\big(y|u(x)\big)$$

---

2. Quelles sont les valeurs propres possibles pour un endomorphisme antisymétrique ? peut-il être diagonalisable ?

Si x est vecteur propre de u, alors $u(x)$ est à la fois lié avec x et orthogonal à x. Donc nécessairement $u(x) = 0$. Et donc la seule valeur propre possible pour u est 0. Et donc u est diagonalisable si et seulement si $u = \Theta$ (endomorphisme nul).

---

3. Soit A la matrice de l'endomorphisme u dans une base orthonormale. A quelle propriété de A reconnaît-on que l'endomorphisme u est antisymétrique ?

Bien des méthodes possibles...
On peut commencer par dire que si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale, si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, pour tous i, j on a

$$a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$$

d'où l'on tire $a_{i,j} = -a_{j,i}$, et $A = -A^T$. Réciproquement, si $A = -A^T$, voir le début de la méthode suivante :
Autre méthode :
u est antisymétrique si et seulement si

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2 \qquad (AX)^T Y = -X^T AY$$

ou encore si et seulement si

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2 \qquad X^T(A+A^T)Y = (0)$$

or une matrice colonne Z vérifie

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T Z = (0)$$

si et seulement si $Z = (0)$ (ou encore : le seul élément d'un espace euclidien orthogonal à tous les éléments de cet espace est le vecteur nul). Donc u est antisymétrique si et seulement si

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad (A+A^T)Y = (0)$$

donc si et seulement si A est...

---

4. Démontrer que $\mathcal{L}(E)$ est somme directe de l'espace des endomorphismes antisymétriques et de l'espace des endomorphismes symétriques. Quelles sont les dimensions de ces deux espaces ?

Fixons une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. L'application

$$\phi \ : \ u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (résultat fondamental sur les matrices !) Or $\phi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}(E)$ et $\phi^{-1}(\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{A}(E)$. De

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

on déduit

$$\boxed{\mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E) = \mathcal{L}(E)}$$

et les sous-espaces $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ où n est la dimension de E.

---

5. Démontrer que, si u est antisymétrique, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 J & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r J & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un petit lemme : si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u (même preuve que le résultat analogue pour les endomorphismes symétriques).
On raisonne alors par récurrence sur la dimension de l'espace :
Si $\dim(E) = 1$, et si $u \in \mathcal{A}(E)$, alors la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale est (0).
Si $\dim(E) = 2$, et si $u \in \mathcal{A}(E)$, alors la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale est $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.
Prenons pour hypothèse la propriété vraie pour tout endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien de dimension $\leq N$. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$, avec $\dim(E) = N+1$. On peut alors examiner deux cas :

1. Si $\ker(u) \neq \{0_E\}$, alors, comme $\ker(u)$ est stable par u, $F = \big(\ker(u)\big)^{\circ}$ est stable par $u^* = -u$, donc stable par u. Et donc u induit sur F un endomorphisme u_F, qui est antisymétrique. Comme $\dim(F) \leq N$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à u_F, il existe donc une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de u_F est du type voulu. On « rallonge » cette base en lui rajoutant les vecteurs d'une base de $\ker(u)$, on obtient une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est du type voulu.
2. Il est possible que $\ker(u) = \{0_E\}$. On peut alors se souvenir du résultat d'algèbre linéaire qui dit que, sur un espace vectoriel réel, tout endomorphisme laisse stable au moins une droite ou un plan (démonstration matricielle, en passant par les complexes, ou utilisation d'un facteur irréductible du polynôme minimal). Il y a plus simple (mais un peu astucieux) :

   On remarque facilement (ce qui est plus dur, c'est d'y penser) que u^2 est autoadjoint. Par conséquent, u^2 est diagonalisable en base orthonormale. Mais utilisons simplement le fait que u^2 a un vecteur propre : soit $x \neq 0$ tel que $u^2(x) = \lambda x$. Alors $G = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est stable par u. G est un plan (si c'était une droite, x serait vecteur propre de u, on aurait donc $u(x) = 0_E$, ce qui est incompatible avec le cas considéré. Et $F = G^{\circ}$ est stable par u (lemme). L'hypothèse de récurrence donne une base orthonormale de F dans laquelle la matrice de u_F est de la forme voulue. On la complète par une base orthonormale de G en une base orthonormale de E. Comme la matrice de u_G dans n'importe quelle base orthonormale est du type J_{λ}, la conclusion s'ensuit.

Exercice 32 (étude géométrique d'endomorphismes). On considère, dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, les endomorphismes dont les matrices dans une base orthonormée directe sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer leurs natures géométriques et leurs éléments caractéristiques, bref les « réduire ».

Exercice 33 (Même chose à l'envers). Ecrire, dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique orientée, la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ autour du vecteur $(1, 0, -1)$.

Exercice 34 (Oral Mines). Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, montrer que

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une rotation si et seulement si p, q et r sont les racines d'un polynôme à déterminer.

Exercice 35. Démontrer que l'application

$$(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\ dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace E des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n (n est un entier supérieur ou égal à 2).Démontrer que l'endomorphisme L de E défini par

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

est autoadjoint pour le produit scalaire considéré. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 36 (Oral Mines, X). Soit E un espace vectoriel euclidien. Démontrer que l'ensemble P des projecteurs orthogonaux de E est compact. Trouver les extremums de $(p,q) \mapsto \mathrm{tr}(pq)$ sur P^2.

P est une partie de $\mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. On va donc montrer que P est fermée et bornée, ce sera suffisant. On sait que les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs qui sont symétriques (cours). Or les deux applications définies sur $L(E)$:
$\phi \ : \ u \longmapsto u^2 - u$
$\psi \ : \ u \longmapsto u^* - u$
sont continues. La deuxième parce qu'elle est linéaire en dimension finie. La première par composition : l'application $(u,v) \longmapsto v \circ u$ est bilinéaire sur $(L(E))^2$, produit d'espaces de dimension finie. Et $u \mapsto (u,u)$ est continue car linéaire sur $L(E)$ de dimension finie...
Bref, $P = \phi^{-1}(\{\Theta\}) \cap \psi^{-1}((0))$ est un fermé.
On sait de plus que, si $u \in P$,

$$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| \leq \|x\| \tag{1}$$

Donc, si on munit $L(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne, P est inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 (il est même inclus dans la sphère union 0), donc il est borné.

Produit de compacts, P^2 l'est. L'application $(p,q) \mapsto \mathrm{tr}(pq)$ est continue par des arguments de linéarité de la trace et de bilinéarité de la composition en dimension finie. Elle atteint donc un maximum et un minimum. Un projecteur est un endomorphisme symétrique positif (h.p. mais très simple à voir), on montre donc (voir exercice fait en TD sur les racines carrées d'endomorphismes symétriques positifs), en écrivant

$$\mathrm{tr}(pq) = \mathrm{tr}(p^{1/2}qp^{1/2})$$

que $\mathrm{tr}(pq) \geq 0$, minorant atteint par exemple quand l'un des projecteurs est nul. On peut penser que le maximum est n. On atteint n avec $p = q = Id_E$, il suffit de montrer que c'est un majorant. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale « adaptée à q », i.e. telle que $q(e_i) = e_i$ si $1 \leq i \leq r$, $q(e_i) = 0_E$ sinon. Alors

$$\mathrm{tr}(pq) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|pq(e_i)) = \sum_{i=1}^{r} (e_i|p(e_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} (e_i|p(e_i)) = \mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) \leq n$$

Exercice 37 (d'après Ulm-Cachan 01). Soit S une matrice $n \times n$ réelle symétrique définie positive (i.e. dont toutes les valeurs propres sont strictement positives), et $u \in \mathbf{R}^n$. On confond les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et les vecteurs colonnes de leurs composantes dans la base canonique.

1. Montrer que $S - u\, {}^t u$ est une matrice positive si et seulement si ${}^t u S^{-1} u \leq 1$. *on commencera par traiter le cas $S = I_n$, puis on utilisera dans le cas général une « racine carrée » de S.*
2. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   (A) Il existe $x \neq 0$ tel que ${}^t x\ S\ x = ({}^t x\ u)^2$
   (B) ${}^t u\ S^{-1}\ u \geq 1$
   Pour une implication, on pourra utiliser le fait que si une application ϕ est continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles, alors $\phi(\mathbf{R}^n)$ est un intervalle.

Exercice 38. Soit A, B deux matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer qu'il existe une matrice A' symétrique, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, et telle que $A'^2 = A$.
2. Démontrer que AB est diagonalisable.
3. Démontrer que l'application
$$X \longmapsto \frac{X^T\ A\ X}{X^T\ X}$$
atteint un minimum et un maximum sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{(0)\}$, et exprimer ces extremums en fonction du spectre de A
4. Montrer que les valeurs propres de AB sont comprises entre le produit des plus petites valeurs propres de A et B et le produit des plus grandes.

---

1. Classique.
2. Si on écrit
$$AB = A'\,[A'BA']\,(A')^{-1}$$
on voit que AB est semblable à une matrice symétrique **réelle** (la matrice $A'BA'$), donc semblable à une matrice diagonalisable, donc diagonalisable.
3. Un grand classique aussi. . .à savoir rédiger aussi bien matriciellement que vectoriellement. Les extremums sont $\max(\mathrm{Sp}(A))$ et $\min(\mathrm{Sp}(A))$.
4. Les valeurs propres de AB sont celles de $A'BA'$, car ces deux matrices sont semblables. Commençons par écrire, si X est une colonne non nulle :
$$X^T(A'BA')X = Y^T BY$$

où $Y = A'X$. Donc $Y^T Y = X^T A X \leq \max(\mathrm{Sp}(A))\, X^T X$.
Or $Y^T B Y \leq \max(\mathrm{Sp}(B))\, Y^T Y$. Donc

$$\frac{X^T(A'BA')X}{X^T X} \leq \max(\mathrm{Sp}(B)) \max(\mathrm{Sp}(A))\, X^T X$$

On en déduit bien, toujours grâce à **3.**,

$$\max(\mathrm{Sp}(AB)) \leq \max(\mathrm{Sp}(B)) \max(\mathrm{Sp}(A))$$

Même chose pour le min.

Exercice 39 (Oral X). Si S et T sont deux matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont positives, montrer que $\mathrm{tr}(ST) \geq 0$.

On considère une racine carrée Σ de S avec $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Alors

$$\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(\Sigma^2 T) = \mathrm{tr}(\Sigma T \Sigma)$$

Mais $\Sigma T \Sigma$ est symétrique (facile, T et Σ le sont et le produit est un palindrome), positive car

$${}^t X \Sigma T \Sigma X = {}^t Y T Y$$

avec $Y = \Sigma X$.

Exercice 40. Soit u, v deux endomorphismes symétriques d'un espace de dimension n : E. On suppose que toutes les valeurs propres de u et de v sont positives. Démontrer que

$$n \sqrt[n]{\det(uv)} \leq \mathrm{tr}(uv) \leq \mathrm{tr}(u)\ \ \mathrm{tr}(v)\ .$$

Pour l'inégalité de gauche, on considère un endomorphisme autoadjoint positif w tel que $w^2 = u$ (démonstration facile et classique). L'endomorphisme wvw est autoadjoint positif (vérification par retour à la définition), et a même trace et même déterminant que $uv = wwv$). On est donc ramené au problème suivant : si $x \in \mathcal{S}^+(E)$, a-t-on

$$(\det(x))^{1/n} \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(x) \qquad ?$$

On diagonalise x par théorème fondamental (en base orthonormale, mais peu importe ici), on est ramené à montrer que, si les λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont positifs,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Or c'est évident si un des λ_i est nul ; sinon, on prend le logarithme, et on utilise la convexité de $-\ln$.

Pour l'inégalité de droite, c'est moins naturel, on peut déséquilibrer les choses : soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de v : $v(e_i) = \mu_i e_i$. En utilisant la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$,
$\mathrm{tr}(uv) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|(uv)(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, (e_i|u(e_i))$
et $\mathrm{tr}(u)\ \ \mathrm{tr}(v) = \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (e_i|u(e_i))\right)$
L'inégalité s'en déduit facilement, tous les réels μ_i et $(e_i|u(e_i))$ étant positifs.

Exercice 41 (ens). Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, supposées strictement positives, et f convexe sur $\mathbf{R}_*^+$. Montrer que, pour tout i, $a_{i,i} > 0$ puis que

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_{i,i}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$$

Qu'obtient-on si l'on prend $f = -\ln$?

Soit $f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que

$$f(a_{1,1}) + \ldots + f(a_{n,n}) = f(\lambda_1) + \ldots + f(\lambda_n)$$

En déduire que si A est définie positive, alors

$$\det(A) \leq a_{1,1} \ldots a_{n,n}$$

Par théorème spectral, il existe P orthogonale telle que

$$A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^T$$

En particulier on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} \left(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^T\right)_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} \lambda_k (P^T)_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}^2 \lambda_k
\end{aligned}$$

Mais f est convexe, et P étant orthogonale vérifie, pour tout i,

$$\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}^2 = 1$$

Donc

$$f(a_{i,i}) \leq \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}^2 f(\lambda_k)$$

On somme pour i allant de 1 à n, on intervertit les sommes, on utilise une fois encore l'orthogonalité de P, et le résultat s'ensuit. Si A est définie positive, comme

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

on a envie de prendre le logarithme. Or $-\ln$ est convexe. Mais seulement sur $\mathbf{R}_*^+$. Le calcul ci-dessus est donc valable (la stricte positivité des $a_{i,i}$ peut se montrer a priori, en utilisant la caractérisation

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \qquad \Big(\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbf{R}_*^+\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\} \quad X^T M X > 0\Big)$$

qui se montre avec le théorème spectral, et en l'appliquant aux $X = E_i$ de la base canonique ; mais cette stricte positivité des $a_{i,i}$ est aussi une conséquence du premier calcul fait plus haut qui montre que chaque $a_{i,i}$ est barycentre à coefficients positifs des λ_i. On a même le fait que tous les $a_{i,i}$ sont entre la plus petite et la plus grande valeur propre de A). Le résultat s'ensuit.

Exercice 42 (Oral X). Sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, on définit la relation $\leq$ par : $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ où $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques dont les valeurs propres sont positives.

1. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}$ est symétrique positive si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R} \qquad X^T A X \geq 0$$

2. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer que toute suite croissante et majorée dans $(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}, \leq)$ est majorée.

4. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, calculer

$$\sup\{2\langle X, Y\rangle - \langle AY, Y\rangle \ ; \ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}$$

où $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

5. En déduire que $A \leq B \ \Rightarrow \ A^{-1} \geq B^{-1}$ quels que soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$

Sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ on définit $\preceq$ par

$$A \preceq B \ \Leftrightarrow \ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \ X^T A X \leq X^T B X$$

Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

La seule difficulté est l'antisymétrie, qui se ramène à montrer la propriété suivante : si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ $X^T M X = 0$, alors $M = (0)$.
Mais si X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ, on a $X^T M X = \lambda X^T X$. Or $X^T X \in \mathbf{R}_*^+$ ($X^T X = \|X\|^2$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique). Donc, si $X^T M X = 0$, $\lambda = 0$. On en déduit que si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ $X^T M X = 0$, $\lambda = 0$, ce pour toute valeur propre λ de M. Et comme M est diagonalisable (théorème spectral), on a bien $M = 0$.

Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour $\preceq$

Une très bonne idée est de munir $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (et a fortiori $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$) de la norme

$$\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$$

On se souvient en effet de l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$(A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$$

qui se vérifie facilement analytiquement. Remarquons que, si M est symétrique, le théorème spectral donne l'existence de P orthogonale et de D diagonale telles que

$$M = PDP^T = PDP^{-1}$$

et alors

$$\|M\|^2 = \mathrm{Tr}(M^2) = \mathrm{Tr}\left(\left(PDP^{-1}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M, répétées autant de fois que leur multiplicité.

Supposons que $\mathcal{E}$ soit une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ majorée par $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et minorée par $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$; il est utile de se rappeler que, pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad \lambda_{\min} X^T X \leq X^T M X \leq \lambda_{\max} X^T X \tag{1}$$

où $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de M. La démonstration la plus simple de ce fait se rédige en termes d'endomorphismes : si u est un endomorphisme symétrique, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$\lambda_{\min} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \leq (x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_{\max} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

ce qui, matriciellement, s'interprète comme la relation (1). On remarquera que cet encadrement est optimal : les deux inégalités ci-dessus sont des égalités en prenant respectivement $x = e_n$ et $x = e_1$.
Reprenons : si $\mathcal{E}$ est majorée par A et minorée par B, on a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}$, pour tout $M \in \mathcal{E}$,

$$\alpha X^T X \leq X^T M X \leq \beta X^T M X$$

où $\beta = \text{Max}\,(\text{Sp}(A))$ et $\alpha = \text{Min}\,(\text{Sp}(B))$. On en déduit facilement que $\text{Sp}(M) \subset [\alpha, \beta]$. (prendre une valeur propre de M, appliquer l'inégalité ci-dessus à un vecteur propre associé). Notant $\gamma = \text{Max}(|\alpha|, |\beta|)$, on obtient

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M) \qquad \lambda^2 \leq \gamma^2$$

Finalement

$$\forall M \in \mathcal{E} \qquad \|M\|^2 \leq n\gamma^2$$

et $\mathcal{E}$ est bien borné.
Supposons réciproquement $\mathcal{E}$ bornée. Soit R tel que

$$\forall M \in \mathcal{E} \qquad \|M\| \leq R$$

Alors (par l'expression de la norme à l'aide des valeurs propres) on a

$$\forall M \in \mathcal{E} \qquad \text{Sp}(M) \subset [-R, R]$$

et donc

$$\forall M \in \mathcal{E} \qquad -RI_n \preceq M \preceq RI_n$$

ce qui conclut la réciproque.
Si on ne pensait pas à utiliser la norme euclidienne canonique et la formule avec la trace qui la donne, on pouvait quand même s'en sortir. L'essentiel est de voir

que borner des matrices symétriques, c'est borner leurs valeurs propres : en effet, dans la formule

$$M = PDP^T = PDP^{-1}$$

la matrice P qui est orthogonale a tous ses coefficients entre -1 et 1 ; trouver une borne pour toutes les $M \in \mathcal{E}$, c'est donc trouver une borne « pour toutes les D », i.e. borner les valeurs propres.

Montrer que toute suite croissante majorée pour $\preceq$ converge.

Un peu de topologie : soit (S_n) une suite croissante majorée pour $\preceq$. Elle est aussi minorée pour $\preceq$ (par S_0). Donc bornée par la question précédente. On est ne dimension finie, on peut donc utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass. Extrayons une suite convergente $(S_{\phi(n)})$. Elle est croissante pour $\preceq$, et sa limite est $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Soit $(S_{\psi(n)})$ une autre suite extraite convergente, S' sa limite. Fixons $n \in \mathbf{N}$; à partir d'un certain rang p_0, on a $\psi(p) \geq \phi(n)$, donc

$$S_{\phi(n)} \preceq S_{\psi(p)} \preceq S' \tag{1}$$

(cette dernière inégalité vient du fait que

$$\forall q \geq p \qquad S_{\psi(p)} \preceq S_{\psi(q)}$$

donc

$$\forall q \geq p \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad X^T S_{\psi(p)} X \leq X^T S_{\psi(q)} X$$

mais, par linéarité en dimension finie donc continuité de $M \mapsto X^T M X$, on a, pour toute X,

$$X^T S_{\psi(q)} X \xrightarrow[q \to +\infty]{} X^T S' X$$

et les inégalités larges (dans $\mathbf{R}$, bien sûr) passent à la limite quand $q \to +\infty$). En interprétant de nouveau l'inégalité (1) par

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad X^T S_{\phi(n)} X \leq X^T S' X$$

qui est vraie sans restriction sur n et en utilisant la conservation des inégalités larges à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$S \preceq S'$$

mais symétriquement $S' \preceq S$ et donc par antisymétrie $S' = S$. Reste à se souvenir qu'une suite dans un compact qui a une unique valeur d'adhérence converge pour conclure.

Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer que

$$A \preceq B \ \Rightarrow\ B^{-1} \preceq A^{-1}$$

Méthode très, très classique : on commence par examiner le cas où, par exemple, $B = I_n$ (on pourrait aussi envisager le cas où $A = I_n$). Ce cas n'est pas dur, car l'hypothèse $A \preceq I_n$ donne que toutes les valeurs propres de A sont dans $]0,1]$ (on sait qu'elles sont strictement positives car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$). Donc toutes les valeurs propres de A^{-1} sont > 1, ce qui donne bien $I_n \preceq A^{-1}$.
Dans le cas général, soit $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $C^2 = B$ (existence classique mais hors-programme, à redémontrer). Les lignes suivantes sont alors équivalentes :

$$A \preceq B$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T A X \leq (CX)^T (CX)$$

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad (C^{-1}Y)^T A (C^{-1}Y) \leq Y^T Y$$

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T (C^{-1}AC^{-1}) Y \leq Y^T Y$$

On montre alors que $C^{-1}AC^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}$; qu'elle soit symétrique n'est pas difficile ; qu'elle soit définie positive vient d'une caractérisation qu'il faut savoir établir, via le théorème spectral :

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \qquad \Big(\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbf{R}_*^+\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\} \quad X^T M X > 0\Big)$$

On a donc $C^{-1}AC \preceq I_n$, on peut donc déduire du cas $B = I_n$ que $I_n \preceq CA^{-1}C$. Ce qui équivaut successivement à

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T (CA^{-1}C) Y \geq Y^T Y$$

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad (CY)^T A^{-1} (CY) \geq Y^T Y$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T A^{-1} X \geq (C^{-1}X)^T (C^{-1}X)$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T A^{-1} X \geq X^T C^{-1} C^{-1} X$$

$$B^{-1} \preceq A^{-1}$$

Exercice 43. *Centrale* Soit $E = C^2([0,1], \mathbf{R})$, et $\phi\ :\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)dt$.**a.** Montrer que ϕ est un produit scalaire.**b.** Soit $V = \{f \in E\ ,\ f(0) = f(1) = 0\}$, $W = \{f \in E\ ,\ f = f''\}$. Montrer que $E = V \bigoplus W$; quelle est la projection orthogonale sur W ?**c.** Soit $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E\ ,\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer
$\displaystyle\operatorname*{Inf}_{f \in E_{\alpha,\beta}} \Big\{ \int_0^1 \big(f^2(t) + f'^2(t)\big)\ dt \Big\}$.