s6,1 : corrigés

Exercice 1 (Oral Centrale).

1. Pour x réel et $x \geq -1$, on pose $f(x) = \sqrt{1+x}$. Rappeler le développement en série entière $\sum a_n x^n$ de f autour de 0 et son rayon de convergence R. Montrer que

$$\forall x \in [-R, R] \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

2. Soit $D = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| \leq R\}$. Pour $z \in D$, on pose $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Justifier que h est bien définie sur D, et qu'elle y est continue.
3. Calculer h^2

Penser à utiliser la formule de Stirling pour montrer la convergence normale de la série entière : D'Alembert ne suffit pas.

Exercice 2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme. Soit r un élément de $[0, R[$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

On note alors $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier l'existence de $M(r)$, et majorer $|a_n|$ à l'aide de r, n, $M(r)$.
Que peut-on dire d'une série entière dont le rayon de convergence est infini et dont la somme est bornée ?

Si $0 \leq r < R$, on a $|re^{i\theta}| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{ip\theta}$$

et donc, si n est un entier naturel,

$$f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}=\sum_{p=0}^{+\infty}a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On peut alors se douter qu'il va s'agir d'un problème de permutation série-intégrale. Définissons (après avoir fixé $n\in\mathbf{N}$)

$$\phi_p\ :\ \theta\longmapsto a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On a $N_\infty(\phi_p)=|a_p|r^p$, donc $\displaystyle\sum_p N_\infty(\phi_p)$ converge (car $r<R$), donc $\sum\phi_p$ converge uniformément car normalement sur le segment $[0,2\pi]$. On peut alors permuter.
On peut aussi utiliser le théorème le plus fréquemment utilisé pour ce genre de permutation (parce qu'il ne demande pas la convergence uniforme, parce qu'il n'impose pas d'être sur un segment...), celui dont l'hypothèse cruciale est la convergence de $\sum N_1(\phi_p)$. Il suffit de remarquer que

$$N_1(\phi_p)\leq 2\pi|a_p|r^p$$

Bref, tout cela permet d'écrire

$$\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p r^p\int_0^{2\pi}e^{i(p-n)\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

Or on calcule facilement (surtout sans repasser par cosinus et sinus !) :

$$\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta=0\quad\text{si}\quad k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$$

Si $k=0$, le calcul est immédiat. On aboutit finalement à la formule souhaitée.
Le cercle de centre 0 et de rayon r est un compact inclus dans le disque ouvert de convergence, donc f, continue, est bornée sur ce compact, ce qui justifie l'existence de $M(r)$. Une majoration d'intégrale standard donne alors

$$|a_n|\leq\frac{M(r)}{r^n}$$

Si $R=+\infty$ et si f est bornée, on peut majorer tous les $M(r)$ par un même M indépendant de r. On a alors

$$|a_n|\leq\frac{M}{r^n}$$

et en prenant la limite quand $r\to+\infty$, on trouve

$$\forall n\geq 1\qquad a_n=0$$

et donc f est constante.
Par exemple, le cosinus, le sinus sont constants (ça, c'est sûrement faux, mais pourquoi ?).

Exercice 3 (Ulm-Lyon-Cachan). Soit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence non nuls, de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$ est non nul. On note $h(z)$ la somme de cette série entière.
2. Montrer l'existence d'un voisinage V de 0 dans $\mathbf{C}$ tel que

$$\forall (z, z') \in V^2 \qquad h(zz') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) g(z' e^{-i\theta}) d\theta$$

---

1. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que, respectivement, les suites $(a_n z_1^n)$ et $(b_n z_2^n)$ soient bornées, la suite $(a_n b_n (z_1 z_2)^n)$ est bornée, et donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum a_n b_n z^n$ est $\geq |z_1 z_2|$. On en déduit aussi que ce rayon de convergence est $\geq R_1 R_2$ où R_1 et R_2 sont les deux rayons des séries entières de départ.
2. Soit $r = \min(R_1, R_2)$. Supposons z et z' dans $D(0, r)$. La famille

$$\left(a_n z^n e^{in\theta} b_m z'^m e^{-im\theta}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$$

est sommable (famille « produit » de deux famille sommables. Et sa somme vaut $f(ze^{i\theta}) g(z' e^{-i\theta})$. Notons

$$\phi_{m,n} \ : \ \theta \longmapsto a_n z^n e^{in\theta} b_m z'^m e^{-im\theta}$$

et notons que $\|\phi_{m,n}\|_\infty = |a_n||z|^n |b_m||z'|^m$. La famille $(\|\phi_{m,n}\|_\infty)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est donc sommable. Une bijection quelconque de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ permet de réindexer la famille $(\phi_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ et de l'écrire comme une suite $\left(\phi_{\alpha(p)}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ de fonctions normalement convergente sur le segment $[0, 2\pi]$, ce qui autorise à intervertir :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \phi_{\alpha(p)} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \phi_{\alpha(p)}$$

Mais les deux séries écrites dans cette égalité sont des sommes de familles sommables (autrement dit sont des séries absolument convergentes), donc commutativement sommables, on peut donc aussi bien écrire

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2} \phi_{m,n} \right) = \sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2} \int_0^{2\pi} \phi_{m,n}$$

ce qui donne facilement le résultat, $\int_0^{2\pi} \phi_{m,n}$ valant 0 si $m \neq n$ et $2\pi a_n z^n b_n z'^n$ si $n = m$.

Exercice 4 (Oral Centrale ; classique : développement en série entière d'une fonction rationnelle).

1. Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.
2. En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto 1/(z-a)^m$ est développable en série entière sur $D(0, |a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.
3. Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)
4. On écrit F sou forme irréductible : $F = P/Q$. En écrivant $QF = P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.
5. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit a_n le nombre de solutions de l'équation $x+2y+5z = n$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$. Montrer, si $|z| < 1$, que
$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
6. Donner un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

> Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.

On essaye de se ramener à un dse classique : celui de $\dfrac{1}{1-u}$ sur $D(0,1)$. On écrit donc
$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\frac{1}{1-z/a}$$
et donc, sur $D(0, |a|)$,
$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^n}z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n$$
Il n'est pas difficile de voir que le rayon de convergence de cette série entière est $|a|$.

En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto 1/(z-a)^m$ est développable en série entière sur $D(0,|a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.

Lorsqu'on cherche à passer du dse de $\dfrac{1}{1-z}$ à un dse de $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, on pense peut-être d'abord à la dérivation. Le problème est que dans le cadre du programme, on ne peut pas dériver des fonctions d'une variable complexe. Intéressons-nous quand même à cette dérivation :
Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, de

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on déduit

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Mais on peut dériver autant qu'on veut. On aura donc, en dérivant $m-1$ fois le dse de $1/(1-x)$ (on suppose $m \geq 2$),

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{(m-1)!}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-m+1)!} x^{n-m+1}$$

Ou encore, en arrangeant les expressions :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \binom{n}{m-1} x^{n-m+1}$$

que l'on peut réindexer en

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+m-1}{k} x^k$$

Voilà...pour une variable réelle. Il est à noter que seule notre ignorance nous empêche d'étendre ce qui vient d'être fait à une variable complexe ! mais dans le cadre du programme, une autre opération que la dérivation nous permet d'avancer : le produit de Cauchy. En effet, l'écriture

$$\frac{1}{(z-a)^{m+1}} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{(z-a)^m}$$

nous permet, par récurrence, de conclure directement à la développabilité en série entière sur $D(0,|a|)$ de $z \mapsto 1/(z-a)^m$.
En revanche, cette technique par produit de Cauchy n'est pas idéale pour le calcul des coefficients. Définissons :

$$\forall m \geq 1 \ \forall z \in D(0,|a|) \quad \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} z^n$$

On a déjà

$$\forall n \geq 0 \quad \alpha_{1,n} = \frac{-1}{a^{n+1}}$$

(dse de $1/(z-a)$, voir ce qui précède), puis, par produit de Cauchy :

$$\forall m \geq 1 \quad \forall n \geq 0 \qquad \alpha_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{m,k}\alpha_{1,n-k}$$

donc, par exemple, pour s'entraîner un peu :

$$\alpha_{2,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{a^{k+1}} \frac{-1}{a^{n-k+1}} = \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

Si on continue, les calculs sont moins pratique. Mais si on sait que

$$\forall m \geq 1 \ \forall z \in D(0,|a|) \quad \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} z^n$$

alors, de

$$\frac{1}{(z-a)^m} = \frac{(-1)^m}{a^m} \frac{1}{(1-z/a)^m}$$

on déduit

$$\forall m \geq 1 \ \forall u \in D(0,1) \quad \frac{1}{(1-u)^m} = (-a)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} a^n u^n$$

($z = au$, $u = z/a$) ; ce dse est a fortiori valable sur $]-1,1[$ et donc, **par unicité du dse**, les coefficients sont ceux qu'on a calculés par dérivation :

$$\alpha_{m,n} = \frac{(-1)^m}{a^{n+m}} \binom{n+m-1}{n}$$

Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)

Appelons $a_1 \ldots, a_p$ les pôles de F (tous non nuls), de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F(z) = E(z) + \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{j,k}}{(z-a_j)^k} \Big)$$

les $\alpha_{j,k}$ étant des nombres complexes. La partie entière est polynomiale, donc développable en série entière sur $\mathbf{C}$. Par combinaison linéaire, F est au moins développable en série entère sur $D(0,r)$ où $r = \min_{1 \leq j \leq p}(|a_j|)$. Mais s'il y a un pôle au moins double dont le module est égal à r, ou si plusieurs pôles ont

pour module r, on ne peut exclure a priori que le rayon de convergence d'une combinaison linéaire de séries entières de rayon $\geq r$ soit strictement supérieur à r.
Cependant, ici, cela ne se peut. Supposons en effet

$$\forall z \in D(0,r) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$$

et supposons que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \mu_n z^n$ soit $R > r$.
Notons alors, pour tout $z \in D(0,R)$,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$$

G coïncide avec F sur $D(0,r)$, et est bornée sur $D'(0,r)$ qui est un compact inclus dans $D(0,R)$. Soit a_{i_0} un pôle de F tel que $|a_{i_0}| = r$. Alors

$$\left|G(ta_{i_0})\right| = \left|F(ta_{i_0})\right| \xrightarrow[t\to 1, t<1]{} +\infty$$

Mais cela contredit le fait que G est bornée sur $D'(0,r)$.

> On écrit F sous forme irréductible : $F = P/Q$. En écrivant $QF = P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.

Le produit QF d'une fonction polynôme, donc développable en série entière avec pour rayon de convergence $+\infty$, par F, développable en série entière avec pour rayon de convergence $r > 0$, est développable en série entière au moins sur $D(0,r)$ par produit de Cauchy. Ecrivons

$$\forall z \in D(0,|a|) \quad Q(z)F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_n z^n$$

Comme par ailleurs $QF = P$, on peut aussi écrire, pour tout $z \in D(0,|a|)$ (et plus généralement pour tout z qui n'est pas un pôle de F)

$$Q(z)F(z) = P(z) = \sum_{n=0}^{d} p_n z^n$$

(P est polynomial). Mais un développement polynomial est un développement en série entière particulier, l'unicité du développement en série entière s'applique donc et permet d'écrire

$$\forall n > d \qquad \nu_n = 0$$

ce qui, écrivant $Q(z) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_\delta z^\delta$ et utilisant la formule qui donne le produit de Cauchy, donne

$$\forall n > d \qquad \sum_{k=0}^{\delta} q_k \mu_{n-k} \ = \ 0$$

$(\sum_{\mu=0}^{+\infty} \mu_n z^n$ désignant toujours le dse de F). Mais $q_0 \neq 0$ (0 n'est pas pôle de F), on obtient donc

$$\forall n > d \qquad \mu_n = -\sum_{k=1}^{\delta} \frac{q_k}{q_0} \mu_{n-k} \ = \ -\frac{q_1}{q_0}\mu_{n-1} - \ldots - \frac{q_\delta}{q_0}\mu_{n-\delta}$$

> Pour $n \in \mathbf{N}$, soit a_n le nombre de solutions de l'équation $x + 2y + 5z = n$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$. Montrer, si $|z| < 1$, que
>
> $$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
>
> Puis donner un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

On va calculer le dse de $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}$ de deux manières.

Par produit de Cauchy : Notons, ici,

$\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$, $\qquad \dfrac{1}{1-z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n$, $\qquad \dfrac{1}{1-z^5} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$.

On a, si on note $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n z^n$ et

$\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, pour tout n on a

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{p+q=n} \delta_p \gamma_q \\ &= \sum_{p+q=n} \Big(\sum_{r+s=p} \alpha_r \beta_s \Big) \gamma_q \\ &= \sum_{r+s+q=n} \alpha_r \beta_s \gamma_q \end{aligned}$$

(en effet, $\{(r, s, q) \in \mathbf{N}^3 \ ; \ r + s + q = n\} = \displaystyle\bigcup_{q=0}^{n} \{(r, s, q) \in \mathbf{N}^3 \ ; r + s = n - q\}$).
Mais $\alpha_r = 1$, $\beta_s = 1$ si s pair, $\beta_s = 0$ si s impair, $\gamma_q = 1$ si $5|q$, $\gamma_q = 0$ sinon. Donc $\alpha_r \beta_s \gamma_q = 1$ si et seulement si $s = 2y$ et $q = 5z$, 0 sinon. On obtient donc $c_n = a_n$.

Par décomposition en éléments simples : On écrit

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \frac{k_1}{(1-z)^3} + \frac{k_2}{(1-z)^2} + \frac{k_3}{1-z} + \frac{k_4}{1+z} + \frac{k_5}{\omega - z} + \frac{k_6}{\omega^2 - z} + \frac{k_7}{\omega^3 - z} + \frac{k_8}{\omega^4 - z}$$

avec par exemple $\omega = \exp(2i\pi/5)$. On sait développer en série entière chacun de ces éléments simples. Mais en se reportant à la question 2, on voit que le coefficients « de degré n » de ce développement est $O(n)$ pour tous les éléments simples sauf le premier, qui est équivalent à quelquechose$\times n^2$. Donc on n'a besoin que de ce premier élément simple. Or

$$\frac{(1-z)^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \frac{1}{(1+z)(1+z+z^2+z^3+z^4)}$$

. Donc $k_1 = 1/10$. Mais

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2}$$

(en dérivant deux fois le dse de $1/(1-z)$, ou en reprenant les formules vues plus haut). Donc

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$$

et, finalement,

$$a_n \sim \frac{n^2}{20}$$

Exercice 5 (Oral X, classique : développement en série entière d'une fonction rationnelle).

1. Soit $R(X)$ une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Montrer que $x \mapsto R(x)$ est développable en série entière. Quel est le rayon de convergence du développement ? On pose $R(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que la suite (u_n) vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.
2. Soit (u_n) une suite vérifiant, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire. Montrer que la série $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif et que sa somme est une fonction rationnelle.

Exercice 6 (oral X, dénombrement et série génératrice). Soit b_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3. Trouver une relation de récurrence entre les b_n ; exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$ à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 7 (Oral TPE, dénombrement et série génératrice). Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, \ldots, n\}$. On convient $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{d_n x^n}{n!}$ est ≥ 1.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, prouver : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Si x est dans $]-1, 1[$, calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$ et en déduire : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Déterminer la limite de $\frac{d_n}{n!}$. Interprétation ?

Corrigé à la fin.

Exercice 8 (Oral Paris-Lyon-Cachan, dénombrement et série génératrice). Soit $p \in \mathbf{N}_*$, $a_1, \ldots, a_p$ des éléments de $\mathbf{N}_*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit V_n le nombre de $(x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbf{N}^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = n$.

1. Si z est un complexe de module < 1, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n x^n$.
2. Donner un équivalent de V_n.

Corrigé à la fin.

Exercice 9 (Analyticité d'une somme de série entière). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme, définie sur $D(0, R)$. Soit a un point de ce disque ouvert. En utilisant une série double, démontrer qu'il existe une suite (b_n) telle que, pour tout nombre complexe h tel que $|h| < R - |a|$,

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$$

(on développera les $(a+h)^k$ dans l'écriture de $f(a+h)$ par la formule du binôme)

Si $|h| < R - |a|$, alors $|a+h| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k \right)$$

Ici, inutile de rajouter des coefficients nuls dans la suite double qu'on va considérer : on peut en effet écrire directement

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k \right)$$

Peut-on intervertir ? posons, si $(n,k) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k$$

On pourra intervertir dès lors qu'on aura montré la sommabilité de la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. C'est-à-dire la sommabilité de la famille $(|u_{n,k}|)_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. Pour laquelle on fait évidemment le chemin inverse de celui suivi pour arriver à cette famille :
Pour tout n, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |u_{n,k}|$ converge, et

$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} |u_{n,k}| = |a_n| \ (|a| + |h|)^n$$

Or $|a_n| \ (|a| + |h|)^n \leq |a_n| R^n$ donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_n |a_n| R^n$ converge. On a donc la sommabilité voulue, on peut donc intervertir et obtenir

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} \right) h^k$$

Exercice 10 (Première question d'un problème des Mines !). Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

On écrit
$$\exp(\exp x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p x^p}{n!\ p!} \right)$$
Cette écriture permet, en remplaçant x par $|x|$, d'obtenir la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{n^p |x|^p}{n!\ p!} \right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$, donc de pouvoir intervertir, ce qui conclut.

Oral X Soit b_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3. Trouver une relation de récurrence entre les b_n ; exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$ à l'aide des fonctions élémentaires.

Une partition d'un ensemble est un ensemble de parties non vides de cet ensemble, deux à deux disjointes et dont la réunion est l'ensemble. L'ensemble vide ($\emptyset$) n'ayant pas de partie non vide, on peut dire que

$$\boxed{b_0 = 0}$$

Un ensemble à un élément a une partition : l'unique partition de $\{a\}$ est $\big\{\{a\}\big\}$. Un ensemble à deux éléments a deux partitions : les partitions de $\{a, b\}$ sont $\big\{\{a\}, \{b\}\big\}$ et $\big\{\{a, b\}\big\}$.

$$\boxed{b_1 = 1\ ,\ b_2 = 2}$$

Pour un ensemble à 3 éléments, $\{a, b, c\}$, on peut commencer à ordonner les choses (suivant le slogan « ordonner, c'est classer ») ; les partitions qui contiennent $\{a\}$ sont au nombre de b_2 (une telle partition est la réunion de $\{a\}$ avec une partition de $\{b, c\}$). Les partitions qui contiennent une partie à deux éléments contenant a sont au nombre de deux : $\big\{\{a, b\}, \{c\}\big\}$ et $\big\{\{a, c\}, \{b\}\big\}$. Enfin reste la partition $\big\{\{a, b, c\}\big\}$. Au total, 5 partitions :

$$\boxed{b_3 = 5}$$

Continuons dans cette voie. Classons les partitions de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ de la manière suivante : on notera $\mathcal{A}_p$ l'ensemble des partitions de $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ dans lesquelles la partie contenant a_1 a pour cardinal p. Il est clair que $\big\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\big\}$ est une... partition de l'ensemble des partitions de $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ (remarque : on n'est pas obligé de présenter les choses de manière aussi pénible), et donc :

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{Card}(\mathcal{A}_i)$$

Or, p étant donné, il y a $\binom{n}{p-1}$ parties à p éléments dans $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ qui contiennent a_1. Chacune d'elles peut être complétée en une partition de $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$

de b_{n+1-p} manières (on l'associe à une partition des $n+1-p$ éléments restants)...à condition de rectifier la valeur de b_0 et de prendre, arbitrairement,

$$\boxed{b_0 = 1}$$

On a alors la formule de récurrence :

$$\boxed{b_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} b_{n+1-p} = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} b_{n-q}}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$(n+1)\frac{b_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} \frac{b_{n-q}}{(n-q)!}$$

On obtient une relation qui fait penser à un produit de Cauchy (au second membre) et à une dérivation (au premier membre) : si elle a un rayon de convergence R non nul, la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ a une somme $S(x)$ qui vérifie, sur $]-R, R[$,

$$S'(x) = e^x S(x)$$

D'où, avec $S(0) = 1$, l'expression :

$$\boxed{S(x) = \exp(\exp x)}$$

Pour montrer que le rayon de convergence est non nul, on essaye classiquement de trouver M et r strictement positifs tels que l'on ait, pour tout n,

$$\frac{b_n}{n!} \leq M r^n \tag{1}$$

(i.e. $r > 0$ tel que la suite $\left(\frac{b_n}{n!}(\frac{1}{r})^n\right)_{n\geq 0}$ soit bornée) car alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ sera $\geq 1/r$.

Pour qu'une telle relation soit récurrente, il suffit que l'on ait

$$\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} M r^{n-q} \leq (n+1) M r^{n+1}$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} (\frac{1}{r})^q \leq (n+1) M r$$

Or cette relation sera vraie à partir d'un certain rang (le premier membre tend vers $\exp(1/r)$, le second membre tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$). Donc (1) est pour n'importe quel $r > 0$ récurrente à partir d'un certain rang. Il ne reste qu'à prendre M assez grand pour qu'elle soit vraie jusqu'à ce rang. On a donc montré que le rayon de convergence était $+\infty$.

Oral ens Soit $p \in \mathbf{N}_*$, $a_1, \ldots, a_p$ des éléments de $\mathbf{N}_*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit V_n le nombre de $(x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbf{N}^p$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = n$.

1. Si z est un complexe de module < 1, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n z^n$.
2. Donner un équivalent de V_n.

On commence par un cas simple : $p = 1$. V_n est alors le nombre d'entiers naturels x tels que $a_1 x = n$. Donc $V_n = 1$ si a_1 divise n, $V_n = 0$ sinon. Ce qui donne, si $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} V_n z^n = \sum_{m=0}^{+\infty} z^{a_1 m} = \frac{1}{1 - z^{a_1}}$$

Continuons avec $p = 2$. V_n est alors le nombre de couples d'entiers naturels (x_1, x_2) tels que $a_1 x_1 + a_2 x_2 = n$. Notons $k_n = 1$ si a_1 divise n, $k_n = 0$ sinon. Et notons $\ell_n = 1$ si a_2 divise n, $\ell_n = 0$ sinon. Alors $V_n = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} k_q \ell_{n-q}$. Par produit de Cauchy, on obtient alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} V_n z^n = \frac{1}{(1 - z^{a_1})(1 - z^{a_2})}$$

Et, par récurrence sur p (en utilisant toujours le produit de Cauchy), la réponse à la première question est

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - z^{a_i}}$$

Notons alors

$$P(z) = \prod_{i=1}^{p} (1 - z^{a_i})$$

(c'est un polynôme) ; on a $P(z) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n z^n = 1$. Notons $P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_d z^d$. De nouveau par produit de Cauchy, on a, pour tout n,

$$\alpha_0 V_{n+d} + \alpha_1 V_{n+d-1} + \cdots + \alpha_d V_n = 0$$

et (V_n) apparaît comme vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, d'équation caractéristique $z^d P(1/z) = 0$.
Mais pour trouver un équivalent de V_n, on considère la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de la fraction

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - z^{a_i}}$$

Ces éléments simples sont de la forme $\dfrac{\alpha}{(e^{i\phi}-z)^m}$ (tous les pôles étant de module 1). Il est assez facile de calculer leur développement en série entière (voir exercice sur le développement en série entière d'une fraction rationnelle) ; pour $e^{i\phi}=1$ (1 est pôle), on a un élément simple de la forme $\dfrac{\alpha}{(1-z)^p}$, tous les autres éléments simples vérifient $m<p$ (car les a_i sont premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui permet de dire que la seule racine commune aux $1-z^{a_i}$ est 1, de plus ces polynômes sont à racines simples. Il n'est pas très difficile d'en déduire qu'un équivalent de V_n est le coefficient du terme en z^n dans le développement en série entière de $\dfrac{\alpha}{(1-z)^p}$, avec

$$\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{1-z^{a_i}}=\frac{1}{(1-z)^pQ(z)}=\frac{\alpha}{(1-z)^p}+\dots$$

donc $\alpha=\dfrac{1}{Q(1)}$ mais, en repassant à la variable réelle, $\dfrac{1}{1-x^{a_i}}\underset{x\to 1}{\sim}\dfrac{1}{a_i(1-x)}$, d'où $\alpha=\dfrac{1}{\prod a_i}$. Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient de z^n dans le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-z)^p}$, c'est $\dfrac{(p+n-1)!}{(p-1)!\ n!}$; on a donc (à vérifier ! ! ! !)

$$\boxed{V_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!\displaystyle\prod_{i=1}^{p}a_i}}$$

(Oral TPE) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, \dots, n\}$. On convient $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{d_n x^n}{n!}$ est ≥ 1.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, prouver : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Si x est dans $]-1, 1[$, calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$ et en déduire : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Déterminer la limite de $\frac{d_n}{n!}$. Interprétation ?

1. Il suffit de remarquer que $d_n \leq n!$: la suite $\left(\frac{d_n x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc bornée.
2. Soit, pour tout k entre 0 et n, $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant exactement k points fixes. Les $\mathcal{A}_k$ sont deux à deux disjoints, et leur réunion est $\mathfrak{S}_n$ (ce n'est pas vraiment une partition de cet ensemble, car $\mathcal{A}_k = \emptyset$). Il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments dans $\{1, \dots, n\}$. Pour chacune de ces parties, il y a exactement d_{n-k} permutations dont elle est l'ensemble des points fixes (il y a une bijection entre l'ensemble des permutations dont A est l'ensemble des points fixes et l'ensemble des permutations sans point fixe de $\{1, \dots, n\} \setminus A$). La formule résulte alors de
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{A}_k)$$
3. Par produit de Cauchy, pour $x \in]-1, 1[$, $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} n! = 1$ d'après la question précédente. Donc
$$e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$$
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = \frac{1}{1-x} e^{-x}$ et un nouveau produit de Cauchy donne alors
$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
qui est bien la formule attendue.
4. La limite est donc $1/e$, il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations avec point fixe.