

Remarque : les parties IV et V étaient plutôt plus faciles que les parties I, II, III. A remarquer le jour du concours !

**Rapport :** le jury a remarqué un relâchement dans l'exigence de rédaction. La présence massive d'abréviations, de phrases dans verbe, de ratures (...) compliquent la tâche du correcteur, qui doit parfois interpréter ce qu'il lit. Et cette interprétation est rarement favorable au candidat. Le jury est toujours plus conciliant avec des copies bien présentées et des résultats encadrés.

---

**I.A.** Les coefficients de  $A^n$  sont fonctions polynomiales des coefficients de  $A$ , donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_{X^n}$  est continue. Combinaison linéaire de fonctions continues,  $f_P$  est continue

Bien sûr on pouvait sophistiquer, considérer  $\psi : (M, N) \mapsto MN$  qui est continue car bilinéaire sur le produit d'espaces de dimension finie  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})^2$ , écrire que

$$f_{X^{n+1}}(A) = \psi(f_{X^n}(A), A)$$

et montrer alors la continuité de  $f_{X^n}$  par récurrence. C'est élégant, mais plus long.

---

**I.B.** Pas de problème de définition (mais dire quand même que cette application est bien définie sur  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})^2$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . La symétrie et la bilinéarité sont des propriétés de la trace. Pour la définie-positivité, en revanche, l'expression analytique

$$(A | A) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)$$

est plus intéressante...

---

**I.C.** ...et donne aisément  $A_{i,j}^2 \leq \|A\|^2$ , donc  $|A_{i,j}| \leq \|A\|$

---

**I.D.** Première question technique. Les candidat(e)s habiles savent que manipuler les carrés des normes euclidiennes est plus agréable que manipuler les normes elles-mêmes. Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})^2$ .

$$\begin{aligned} \|A \times B\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (AB)_{i,j}^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right]^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2 \right] \left[ \sum_{k=1}^n B_{k,j}^2 \right] \right) \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \left[ \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2 \right] \left( \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n B_{k,j}^2 \right] \right) \right) \\ &= \|B\|^2 \sum_{i=1}^n \left( \left[ \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2 \right] \right) \\ &= \|B\|^2 \|A\|^2 \end{aligned}$$

d'où, par positivité de la norme,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

---

**I.E.** Première récurrence... donc il faut la rédiger, même si elle est simple, et ne pas se contenter d'un « par récurrence ».

On a  $\|A^1\| \leq \|A\|^1$  (=, même). Si  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ , alors

$$\begin{aligned} \|A^{n+1}\| &\leq \|A^n\| \|A\| && \text{(D.)} \\ &\leq \|A\|^n \|A\| && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \|A\|^{n+1} \end{aligned}$$

et donc par récurrence  $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{C}) \forall n \in \mathbf{N}_* \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n}$

---

**II.A.** Soit  $r \in ]0, R[$ . On sait que  $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$  converge. Pour tout  $n$ , l'application

$$\phi_n : A \longmapsto a_n A^n$$

est, par **I.A.**, continue sur la boule fermée  $B'_r = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R}) ; \|A\| \leq r\}$ . De plus

$$\forall n \in \mathbf{N}_* \quad \forall A \in B'_r \quad \|\phi_n(A)\| = |a_n| \|A^n\| \leq |a_n| r^n$$

par **I.E.**. Donc, notant

$$N_\infty(\phi_n|_{B'_r}) = \sup_{A \in B'_r} \|\phi_n(A)\|$$

on a  $\sum_n N_\infty(\phi_n|_{B'_r})$  convergente;  $\sum_n \phi_n$  converge donc uniformément, car normalement, sur  $B'_r$ , et donc par théorème, la restriction de  $\phi$  à  $B'_r$  est définie et continue pour tout  $r \in ]0, R[$ , ce qui implique que

$$\boxed{\phi \text{ est définie et continue sur } \mathcal{B}}$$

On peut bien sûr parler de « sur tout compact » : soit  $K$  un compact inclus dans  $\mathcal{B}$ ; l'application  $A \longmapsto \|A\|$ , continue, atteint un maximum sur  $K$ . Soit  $r$  ce maximum. Alors  $r < R$ , etc...

On peut aussi commencer par la définition, mais la convergence normale donne directement la convergence simple (donc la définition) par convergence absolue.

Le rapport dit :

*Dans la question II.A, on retrouve très souvent une confusion de vocabulaire entre la convergence absolue (de la série des normes des matrices) et la convergence normale (d'une suite de fonctions). Une autre erreur classique consiste à penser que si  $R$  est le rayon de la série  $\sum a_n z^n$ , alors  $\sum a_n R^n$  converge.*

---

**II.B.1)**  $\dim(\mathcal{M}_d(\mathbf{R})) = d^2$ , donc la famille  $(A^0, A, \dots, A^{d^2})$  est liée (elle comporte  $d^2 + 1$  éléments).  $\{n \in \mathbf{N} ; (A^0, A, \dots, A^n) \text{ liée}\}$  est une partie non vide de  $\mathbf{N}$ , elle a un plus petit élément  $r$ . Et  $r \in \mathbf{N}_*$  car la famille  $(A^0)$  est libre ( $I_d \neq (0)$ ). On a bien démontré  $\boxed{\text{l'existence d'un } r \in \mathbf{N}_* \text{ ayant la propriété souhaitée}}$   
On pouvait aussi parler du polynôme minimal de  $A$ , bien sûr.

---

**II.B.2)** Commençons par remarquer que si un tel  $r$ -uplet existe, il est unique, car la famille  $(A^0, A, \dots, A^{r-1})$  est libre. Reste à montrer l'existence, on va le faire par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n \in \{0, \dots, r-1\}$ , les  $\lambda_{k,n}$  définis par  $\lambda_{k,n} = 0$  si  $k \neq n$ ,  $\lambda_{n,n} = 1$  conviennent.

Par définition de  $r$ , il existe  $\mu_0, \dots, \mu_r$  non tous nuls tels que

$$\sum_{j=0}^r \mu_j A^j = 0$$

Mais  $\mu_r \neq 0$ , sinon la famille  $(A^0, A, \dots, A^{r-1})$  est liée. Donc

$$A^r = - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\mu_j}{\mu_r} A^j$$

L'existence est montré pour  $n = r$ .

Si l'existence est vraie pour  $n$ , alors

$$A^{n+1} = \sum_{k=0}^{r-2} \lambda_{k,n} A^{k+1} + \lambda_{r,n} A^r$$

et l'existence pour  $n = r$  permet d'écrire  $A^{n+1}$  comme combinaison linéaire de  $A^0, \dots, A^{r-1}$ , d'où l'existence pour  $n + 1$ . Par récurrence, on a bien l'existence pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , et donc

Il y a existence et unicité d'un tel  $r$ -uplet

*On peut bien sûr utiliser encore ici le polynôme minimal.*

*Rapport : Beaucoup de candidats pensent que si une famille est liée, alors le dernier vecteur est forcément combinaison linéaire des autres.*

**II.B.3)** Une inégalité triangulaire... dans le mauvais sens! *Question pas évidente...*

La question précédente montre que  $(A_0, \dots, A^{r-1})$  est une base de  $\mathbf{R}[A]$ . L'application qui à un élément  $B = \sum_{j=0}^{r-1} b_j A^j$  de  $\mathbf{R}[A]$  associe  $N(B) = \sum_{k=0}^{r-1} |b_j|$  est donc une norme sur  $\mathbf{R}[A]$  (même preuve que pour la norme  $\|\cdot\|_1$  usuelle sur  $\mathbf{R}^n$ ). Comme  $\mathbf{R}[A]$  est de dimension finie,  $N$  est équivalente à  $\|\cdot\|$ . Soit alors  $C > 0$  telle que  $N \leq C\|\cdot\|$ , on a alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C \|A^n\|$$

Autre preuve : les « applications composantes » (celles que l'on note en général les  $\pi_k$ , dans le cours) associées à la base  $(A_0, \dots, A^{r-1})$  de  $\mathbf{R}[A]$  sont linéaires sur  $\mathbf{R}[A]$  qui est de dimension finie, elles sont donc continues. Et on conclut !

**II.B.4)** Alors, pour tout  $k$  entre 0 et  $r - 1$ , si  $n \geq 1$  on a

$$|a_n| |\lambda_{k,n}| \leq C |a_n| \|A^n\| \leq C |a_n| \|A\|^n$$

Mais comme  $\|A\| < R$ ,  $\sum_{n \geq 1} |a_n| \|A\|^n$  converge, donc par comparaison de séries à termes réels positifs,  $\sum_{n \geq 1} |a_n \lambda_{k,n}|$  converge, et donc

$$\sum_{n \geq 0} a_n \lambda_{k,n} \text{ est absolument convergente}$$

**II.B.5)** Dans le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathbf{C}[A]$  muni de sa base  $(A^0, \dots, A^{r-1})$ , on sait (caractérisation de la convergence par les composantes dans une base) que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n A^n$  converge si

et seulement si chaque série  $\sum_{n \geq 0} a_n \lambda_{k,n}$  ( $0 \leq k \leq r - 1$ ) converge et, comme c'est le cas ici,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_{k,n} \right) A^k$$

Comme par ailleurs  $(A^0, \dots, A^{r-1})$  est libre, on a bien montré que

Il existe un unique polynôme  $P \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $\phi(A) = P(A)$  et  $\deg(P) < r$

On arrive au même résultat plus simplement en utilisant le fait que  $\mathbf{C}[A]$  est fermé, mais la méthode proposée, si elle n'est pas très facile, est plutôt intéressante.

**II.B.6)** On calcule  $A^2 = A$  ( $A$  est un projecteur, donc...), donc  $(I_3, A, A^2)$  est liée, or  $(I_3, A)$  est libre, donc  $r = 2$ , de plus  $\forall n \geq 1 \quad A^n = A$ , donc

$$\exp(A) = I_3 + (e - 1)A$$

et  $\boxed{P = 1 + (e - 1)X}$

**II.C)** Le rapport dit :

*La quasi-totalité des candidats commettent une erreur de logique, liée aux quantificateurs utilisés.*

Il suffit clairement que les  $a_n$  soient nuls à partir d'un certain rang (*ne pas hésiter à l'écrire même si vous ne savez pas faire la réciproque, même si vous trouvez cette implication ridiculement facile... toute fraction de points « honnêtement » gagnée est bonne à prendre.*)

Supposons, pour tout  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ ,  $\phi(A) = P(A)$ . En particulier, pour toute matrice  $\lambda I_n$ , avec  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$\phi(\lambda I_n) = P(\lambda I_n)$$

Donc  $\sum a_n z^n$  a un rayon de convergence infini et, pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n = P(\lambda)$$

Mais alors, par unicité du développement en série entière, les  $a_n$  sont nuls à partir d'un certain rang. La condition suffisante est donc nécessaire.

**III.A.1)** Si  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  sont deux séries absolument convergentes, si, pour tout  $n \geq 0$ ,

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , alors  $\sum_{n \geq 0} c_n$  est absolument convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$  Rapport : le produit de Cauchy est souvent mentionné uniquement dans le cadre des séries entières.

**III.A.2)** La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} z^n$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ . Ce qu'on a vu dans le **II.A.** montre alors

que les séries  $\sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} A^n$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} B^n$  sont absolument convergentes. Définissons, pour  $n \geq 0$ ,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{k!} A^k \frac{i^{n-k}}{(n-k)!} B^{n-k} = \frac{i^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \text{ Comme } A \text{ et } B \text{ commutent, } C_n = \frac{i^n}{n!} (A + B)^n.$$

L'extension admise à la question précédente montre alors que

$$\exp(iA) \exp(iB) = \exp(i(A + B))$$

**III.A.3)** Pour les mêmes raisons que dans la question précédente (ces séries sont associées à des séries entières de rayon de convergence  $+\infty$ ) les deux séries définissant  $\cos(A)$  et  $\sin(A)$  sont absolument convergentes. Et, en séparant les séries des termes d'indices pairs et les séries des termes d'indices impairs (ce qui est possible puisqu'elles convergent) on a

$$\exp(iA) = \cos(A) + i \sin(A) \quad \text{et} \quad \exp(-iA) = \cos(A) - i \sin(A)$$

Comme  $A$  et  $-A$  commutent, on a

$$(\cos(A) + i \sin(A))(\cos(A) - i \sin(A)) = \exp(iA - iA) = \exp(0) = I_n$$

Mais par **II.B.5)**  $\cos(A)$  et  $\sin(A)$  sont dans  $\mathbf{R}[A]$  donc commutent. On développe donc, et on obtient

$$\boxed{\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_n}$$

**III.B.1)** Supposons  $R > \|A\|$ . La série entière  $\sum_{n \geq 0} (Re^{i\theta})^{-n} z^n$  a pour rayon de convergence  $R$ . En effet, si on définit, pour tout  $z \neq 0$ ,

$$a_n = |(Re^{i\theta})^{-n} z^n| = \left(\frac{|z|}{R}\right)^n$$

donc  $\sum a_n$  converge si et seulement si  $|z| < R$ .

Et donc, comme  $\|A\| < R$ , la série  $\sum_{n \geq 0} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$  converge (voir **II.A**). On écrit alors

$$(Re^{i\theta} I_d - A)(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n - A \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n-1} A^n$$

Or, pour tout  $m \geq 0$ ,

$$A \sum_{n=0}^m (Re^{i\theta})^{-n-1} A^n = \sum_{n=0}^m (Re^{i\theta})^{-n-1} A^{n+1}$$

et donc, prenant la limite quand  $m \rightarrow +\infty$ , et utilisant la continuité de l'application  $M \mapsto AM$  sur  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$  (application linéaire sur un espace de dimension finie),

$$A \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n-1} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n-1} A^{n+1}$$

Donc

$$(Re^{i\theta} I_d - A)(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n = I_d$$

L'inversibilité à gauche ou à droite équivalent à l'inversibilité dans  $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ , donc on a

$$\boxed{\text{Le résultat est valable dès que } R > \|A\|}$$

**III.B.2)** On suppose encore  $R > \|A\|$ . Si  $n \geq 1$ , comme on l'a vu,

$$(Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} h_p(\theta)$$

où  $h_p : \theta \mapsto (Re^{i\theta})^{n-p-1} A^p$ . Chaque  $h_p$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  et

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \quad \|h_p(\theta)\| \leq \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^p R^{n-1}$$

Or  $\frac{\|A\|}{R} < 1$ , donc  $\sum_p h_p$  converge normalement, donc uniformément, sur le segment  $[0, 2\pi]$ , ce qui permet d'intervertir :

$$\int_0^{2\pi} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} h_p(\theta) \right) d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} h_p(\theta) d\theta \right)$$

Or (image de l'intégrale par l'application linéaire  $\lambda \mapsto \lambda A^p$ ) :

$$\int_0^{2\pi} h_p(\theta) d\theta = R^{n-p-1} \left( \int_0^{2\pi} e^{i(n-p-1)\theta} d\theta \right) A^p$$

Donc, si  $p \neq n-1$ ,  $\int_0^{2\pi} h_p(\theta) d\theta = 0$ . On trouve donc

$$\boxed{\text{Si } R > \|A\|, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta = A^{n-1}}$$

---

**III.B.4)** Par combinaison linéaire des résultats du **III.B.2)**, si  $R > \|A\|$  toujours,

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^d a_k (Re^{i\theta})^{k+1} \right] (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta$$

ce qui donne bien la formule

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re^{i\theta} \chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta$$

Notons alors que

$$\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = (-1)^d \det(Re^{i\theta} I_d - A) (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1}$$

*NB : cela fait longtemps que les programmes essayent d'imposer la « nouvelle norme » sur le polynôme caractéristique, qui se doit d'être  $\det(XI_d - A)$ , mais il y a encore des tenants de l'ancienne façon. On n'est de toute façon pas au signe près, ici.*

Donc, utilisant la comatrice,

$$\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = (-1)^d {}^t\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A)$$

Les coefficients de  $\text{Com}(Re^{i\theta} I_d - A)$  sont des polynômes de  $e^{i\theta}$ . Multipliés par  $e^{i\theta}$ , cela donne des combinaisons linéaires des  $e^{ik\theta}$  avec  $k \geq 1$ , dont l'intégrale sur  $[0, 2\pi]$  est nulle. On en déduit bien le

Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$
---