S6,1 : Séries entières d'une variable complexe

I Convergence des séries entières

Tout ce qui concerne la convergence ponctuelle, la définition et la détermination du rayon de convergence, a été vu dans S6. Il faut relire S6 avant d'aborder S6,1.

II Convergence uniforme sur tout compact ; continuité de la somme

Proposition Une série entière converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence.

Proposition bis Une série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans son disque ouvert de convergence.

Remarque importante Une série entière ne converge en général pas uniformément sur son disque ouvert de convergence (erreur très, très classique, à éviter !)

Corollaire La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

Un cas particulier h.p. mais intéressant On suppose ici que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R qui n'est ni 0 ni $+\infty$. On suppose de plus que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ converge. Alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge uniformément (car normalement) sur le disque fermé $D'(0, R)$. Sa somme est donc continue sur ce disque fermé.

III Une formule classique (h.p.)

Cette formule est hors programme, mais très intéressante.
Soit $\sum a_n z$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ($R = +\infty$ possible). Soit f sa somme, définie sur $D(0, R)$.

1. Montrer que, pour tout $r \in]0, R[$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f\left(re^{it}\right) \mathrm{d}t$$

2. En déduire que si $R = +\infty$ et f est bornée, alors f est constante.
3. Pourquoi ne doit-on pas déduire de la question précédente que sin et cos sont constantes ?

IV Opérations algébrique sur les séries entières

Ce qui a été vu dans S6 a été vu pour le cas complexe ; le revoir, donc (combinaison linéaire, produit de Cauchy).

V Dérivation et primitivation

On peut définir la série dérivée d'une série entière, formellement. Mais la dérivation des fonctions d'une variable complexe n'est pas au programme. Il est naturel de se demander si, lorsque f est une fonction d'une variable complexe, il peut être intéressant de considérer l'existence de

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) .$$

C'est effectivement plus qu'intéressant, mais hors-programme : les fonctions analytiques, les fonctions holomorphes sont des objets très importants en mathématiques, à voir après la prépa. Rappelons quand même :

Proposition Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes ; les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence (la seconde est la « série dérivée » de la première).

VI Fonctions développables en série entière

VI.1 Définition

Même si ce n'est pas vraiment au programme, on peut facilement concevoir la définition suivante :

Définition on dit que f est développable en série entière sur $D(0,r)$ lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall z \in D(0,r) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \;;$$

on dit que f est développable en série entière, ou développable en série entière au voisinage de 0, lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D(0,r)$.

On dit que f est développable en série entière au voisinage de a lorsque la fonction $h \mapsto f(a+h)$ est développable en série entière au voisinage de 0, c'est à dire lorsqu'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall u \in D(a,r) \qquad f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u-a)^n$$

VI.2 Opérations

Une combinaison linéaire ou un produit de fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ l'est.

VII Développements usuels

Pour la quasi totalité des développements usuels, le programme se limite à la variable réelle. Signalons quand même quelques suppléments.

Définition : On définit, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition : Pour tous z et z' dans $\mathbf{C}$,

$$\exp(z + z') = \exp(z)\ \exp(z')$$

Proposition Si $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Prolongement classique (h.p.) Une fonction rationnelle dont 0 n'est pas pôle admet un développement en série entière « autour de 0 ».

Remarque Il n'est pas scandaleux, dans un énoncé, d'introduire par exemple

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et on remarque alors que

$$\sin(iz) =$$

Table des matières