S9 : Suites et séries de fonctions (extension aux espaces vectoriels normés)

Une grande partie de ce chapitre est une copie de S3-S4 sur laquelle on a remplacé la valeur absolue ou le module par une norme.

I Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions

On considère une suite (f_n) de fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie, à valeurs dans un espace F de dimension finie. *On choisit de se placer sur des espaces de dimension finie afin que toutes les normes y soient équivalentes.*

I.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

a. Définition

On dit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f sur A lorsque, pour tout élément x de A,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

c'est-à-dire lorsque

$$\forall x \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \qquad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon\,.$$

Etudier la convergence simple de la suite (f_n), c'est donc étudier, pour chaque $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$. On fixe x, qui joue le rôle d'un paramètre, et on regarde ce qui se passe quand $n \to +\infty$.

I.2 Convergence uniforme

a. Définition

On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A lorsque, pour tout réel strictement positif ϵ, il existe un rang N tel que,

$$\forall n \geq N \ \forall x \in A \qquad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon \ .$$

b. Proposition

La convergence uniforme vers f implique la convergence simple vers f.

c. Définition

On définit, si

$$g \ : \ A \subset E \to F$$

est bornée sur A,

$$N_\infty(g) = \mathrm{Sup}\left(\{\|g(x)\|_F \ ; \ x \in A\}\right) = \sup_{x \in A}\left(\|g(x)\|_F\right)$$

Bien entendu, si on change de norme sur F, on change de norme sur $\mathscr{B}(A,F)$. Mais on garde une norme équivalente, non que $\mathscr{B}(A,F)$ soit de dimension finie, mais F, lui, l'est...

En effet, si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes sur F, si $\|.\|_1 \leq \alpha\|.\|_2$, définissons $N_{\infty,k}(g) = \mathrm{Sup}\left(\{\|g(x)\|_k \ ; \ x \in A\}\right)$. Alors $\|.\|_{\infty,1} \leq \alpha\|.\|_{\infty,2}$.

d. Etude pratique

En général, pour montrer la convergence uniforme, on commence par la convergence simple (pour trouver, si elle existe, la limite simple f).
Si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée, et si on sait calculer $N_\infty(f_n - f)$, on n'a plus qu'à vérifier que $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Mais, parfois, ce calcul est inabordable ; on peut essayer alors de majorer $\|f_n(x) - f(x)\|_F$ indépendamment de x :

$$\forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \alpha_n$$

Si la suite (α_n) converge vers 0, la convergence est bien uniforme.
Pour montrer que la convergence n'est pas uniforme, plusieurs méthodes sont envisageables.

— S'il n'existe pas de rang à partir duquel $f_n - f$ est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme. Si les f_n sont continues et pas f, même conclusion (voir plus loin).

— Plus technique, si aucune des deux méthodes précédentes ne marche : on peut par exemple essayer de trouver une suite (x_n) telle que la suite $\big(f(x_n) - f_n(x_n)\big)$ ne converge pas vers 0. On choisira une suite x_n qui tend vers « là où est le problème ».

— La représentation graphique des fonctions f_n (lorsqu'elle est possible) est souvent utile.

I.3 Cas particulier des fonctions bornées

Lemme Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, et si chaque f_n est bornée, f l'est.

Démonstration demandée à l'oral CCP. Voir S3.

On a vu plus haut qu'on munissait comme d'habitude l'espace vectoriel $\mathscr{B}(A, F)$ des applications bornées sur A à valeurs dans F de la norme N_∞ :

$$N_\infty(g) = \sup_{x \in A} \| g(x) \|_F$$

Sur $\mathscr{B}(A, F)$, la convergence uniforme est la convergence pour N_∞ :

$$\left(f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{C.U.} f \right) \iff \left(N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right)$$

Remarque Comme déjà évoqué plus haut, si on remplace la norme sur $\|.\|$ sur F par une norme $\|.\|'$, N_∞ est remplacée par N'_∞. Mais N'_∞ et N_∞ sont équivalentes sur $\mathscr{B}(A,F)$, c'est une conséquence du fait que $\|.\|$ et $\|.\|'$ le sont sur F. Si $F = \mathbf{R}$ ou $F = \mathbf{C}$, on n'a pas ce problème puisque la norme choisie est systématiquement $|.|$.

I.4 Convergence uniforme, convergence pour la norme N_∞

La convergence pour N_∞ est appelée convergence uniforme, et on appelle parfois « norme uniforme » la norme N_∞…oui, mais à condition de se situer sur un espace de fonctions bornées (sinon, N_∞ n'est pas définie). Or une suite de fonctions non bornées (exemple : la suite de fonctions (f_n), définies sur **R** par $f_n(x) = x + 1/n$) a le droit de converger uniformément. On n'est alors plus sur un espace de fonctions bornées, ce n'est donc plus de la convergence pour N_∞, mais c'est de la convergence uniforme.
Conclusion : la convergence pour N_∞ est de la convergence uniforme, mais on peut aussi avoir convergence uniforme d'une suite de fonctions non bornées, qui n'ont donc pas de N_∞.

I.5 Convergence uniforme sur tout compact

On dit que la suite (f_n) de fonctions (définies sur une partie A d'un evn de dimension finie E, à valeurs dans un evn de dimension finie F) converge uniformément vers f sur tout compact lorsque, pour tout compact K inclus dans A, la suite $(f_n|_K)$ converge uniformément sur K vers $f|_K$.
Dans la pratique, on est très souvent contraint de se contenter de la convergence uniforme sur tout compact.
Si l'ensemble de départ est un intervalle de **R**, « sur tout compact » peut être remplacée par « sur tout segment ». Non que tout compact soit un segment, mais tout segment est un compact et tout compact est inclus dans un segment.

II Transmission de la continuité par convergence uniforme

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A (ou seulement sur un voisinage de a), et si chaque f_n est continue au point a de A, f l'est aussi.

Démonstration *C'est exactement la même que pour les fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles ou complexes, on remplace simplement les* $|.|$ *par des* $\|.\|_E$ *ou* $\|.\|_F$.

Précisons les notations : les f_n ($n \in \mathbf{N}$) sont des fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, à valeurs dans un espace vectoriel normé F lui aussi de dimension finie.

Soit $\epsilon > 0$; fixons un entier naturel N tel que

$$\forall y \in A \qquad \|f_N(y) - f(y)\|_F \leq \epsilon/3$$

(l'existence d'un tel N est assurée par l'hypothèse de convergence uniforme). Pour tout $x \in A$, on peut alors majorer, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\|_F &\leq \|f(x) - f_N(x)\|_F + \|f_N(x) - f_N(a)\|_F + \|f_N(a) - f(a)\|_F \\ &\leq 2\epsilon/3 + \|f_N(x) - f_N(a)\|_F \end{aligned}$$

Par continuité de f_N en a, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A \qquad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(a)\|_F \leq \epsilon/3$$

et on aura alors

$$\forall x \in A \qquad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \epsilon/3$$

ce qui conclut.

Remarque : Ce théorème peut donc servir à démontrer qu'une convergence n'est pas uniforme, aussi bien qu'à établir une continuité. Si les f_n sont continues en a et pas f, la convergence ne peut pas être uniforme.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, et si chaque f_n est continue sur A, f l'est aussi.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans A, et si chaque f_n est continue sur A, f l'est aussi.

Théorème On suppose ici que A est un intervalle de $\mathbf{R}$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans A, et si chaque f_n est continue sur A, f l'est aussi.

Corollaire : Si A est compact, $\mathscr{C}(A,F)$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(A,F), N_\infty)$.

III Théorème de la double limite

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, si a est un point adhérent à A (éventuellement $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ si A est une partie non majorée ou non minorée de $\mathbf{R}$) en lequel chaque f_n a une limite b_n, alors

1. la suite (b_n) converge ;
2. f a une limite en a ;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)$.

Utilisation : Surtout dans le cadre des séries de fonctions. On peut aussi l'utiliser pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme.
Démonstration : *Que l'on peut passer...*
Notons F l'espace d'arrivée, $\|.\|_F$ la norme sur F. Fixons un $\epsilon > 0$. L'hypothèse de convergence uniforme assure l'existence d'un rang N tel que

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in A \qquad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon/2$$

Mais alors par inégalité triangulaire,

$$\forall p, q \geq N \quad \forall x \in A \qquad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \epsilon$$

et, en prenant les limites quand $x \to a$, on obtient l'énoncé suivant :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall p, q \geq N \qquad \|b_p - b_q\|_F \leq \epsilon$$

On en déduit succesivement que (b_n) est bornée, qu'il existe une application strictement croissante ϕ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $\left(b_{\phi(n)}\right)$ converge, que la suite $\left(b_n - b_{\phi(n)}\right)$ converge, et donc en définitive que la suite (b_n) converge.
Notons ℓ la limite de la suite (b_n).
Pour tout $x \in A$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on écrit

$$\|f(x)-\ell\|_F \leq \|f(x)-f_n(x)\|_F + \|f_n(x)-b_n\|_F + \|b_n-\ell\|_F$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang N tel que

$$\forall x \in A \quad \|f_N(x)-f(x)\|_F \leq \epsilon/3 \qquad \text{et} \qquad \|b_N-\ell\|_F \leq \epsilon/3$$

On a alors

$$\forall x \in A \quad \|f(x)-\ell\|_F \leq 2\epsilon/3 + \|f_N(x)-b_N\|_F$$

ce qui amène rapidement la conclusion.

IV Théorèmes d'approximation uniforme

IV.1 Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier sur un segment

Définition Une application f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel F est dite **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit constante. Une telle subdivision est dite subordonnée (ou adaptée) à f.

Définition Une application f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie est dite **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$, ce qui revient à dire que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est continue et que f admet une limite à gauche et une limite à droite en chacun des x_i.

Définition On dit qu'une application est continue par morceaux sur un intervalle I lorsque sa restriction à chaque segment inclus dans I est continue par morceaux.

Proposition Toute application continue par morceaux d'un segment de $\mathbf{R}$ dans un espace vectoriel de dimension finie est limite uniforme sur ce segment d'une suite d'applications en escalier sur ce segment.

Autre formulation Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout réel strictement positif ϵ, il existe ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que $N_\infty\big(f - \phi\big) \leq \epsilon$.

Démonstration

f est supposée à valeurs dans F, espace vectoriel de dimension finie. On note $\|.\|_F$ une norme sur F...peu importe laquelle.

On suppose d'abord que f continue.

D'après le théorème de Heine, f est alors uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon$$

Soit N un entier naturel non nul tel que $\dfrac{b-a}{N} \leq \eta$. On considère alors la subdivision $\left(a + k\dfrac{b-a}{N}\right)_{0\leq k\leq N}$ régulière de pas constant $\dfrac{b-a}{N} \leq \eta$ et on considère la fonction ϕ en escalier définie de la manière suivante, en notant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$ $(0 \leq k \leq N)$:

$\forall k \in [\![0, N-1]\!] \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\qquad \phi(x) = f(x_k)$

On a alors $\forall x \in [a, b] \quad \|f(x) - \phi(x)\|_F \leq \epsilon$ ce qui conclut.

Si f n'est que continue par morceaux :

Soit $(y_j)_{0\leq j\leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Pour tout j dans $[\![0, p-1]\!]$, soit f_j continue sur $[y_j, y_{j+1}]$ qui coïncide avec f sur $]y_j, y_{j+1}[$. Soit $\epsilon > 0$; par le cas précédent, il existe pour chaque j dans $[\![0, p-1]\!]$ une fonction ϕ_j en escalier sur $[y_j, y_{j+1}]$ telle que

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall x \in [y_j, y_{j+1}] \qquad \|f_j(x) - \phi_j(x)\|_F \leq \epsilon$$

Soit alors ϕ définie sur $[a, b]$ par

$\forall j \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall x \in]y_j, y_{j+1}[\qquad \phi(x) = \phi_j(x)$

$\forall j \in [\![0, p]\!] \qquad \phi(x) = f(x)$

Alors ϕ est en escalier sur $[a, b]$, et $\forall x \in [a, b] \quad \|f(x) - \phi(x)\|_F \leq \epsilon$.

IV.2 Théorème de Weierstrass

Dans le cadre du programme, énoncés seulement pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, donc pas d'extension aux evn de dimension finie. Une fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales…

V Convergence simple, convergence uniforme des séries de fonctions

V.1 Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel de dimension finie (evndf) E, à valeurs dans un evndf F. On définit la suite de fonctions (S_n), définies sur A et à valeurs dans F,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

On dira que S_n est la fonction somme partielle d'ordre n de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Définition : On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A lorsque, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.

Autrement dit lorsque, pour tout $x \in A$, la **série** de terme général $f_n(x)$ converge.

Autrement dit lorsque, pour tout $x \in A$, la **suite** $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Autrement dit lorsque la suite (S_n) converge simplement sur A.

Lorsqu'il y a convergence simple, on peut définir la fonction

$$S\ :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

que l'on nomme **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$. C'est la limite (pour la convergence simple) de la suite de fonctions (S_n). On peut alors définir la suite de fonctions (R_n) par

$$R_n = S - S_n$$

On a, pour tout $x \in A$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Pour tout x, la suite $\left(R_n(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$, comme toute suite de restes qui se respecte, converge vers 0_E. Autrement dit, la suite (R_n) converge simplement vers la fonction nulle $(\widetilde{0_F})$.

Conclusion : Etudier la convergence simple d'une série de fonctions, c'est étudier une série dont le terme général dépend d'un paramètre (x).

V.2 Convergence uniforme

a. Définition

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A lorsque la suite (S_n) converge uniformément sur A.

b. Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide des restes

Proposition La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement et la **suite** de fonctions (R_n) converge uniformément (vers sa limite simple, $\widetilde{0_E}$).

Utilisation On se sert de cette proposition pour établir le résultat sur la convergence normale (voir plus loin). On l'utilise aussi lorsque le théorème spécial sur les séries alternées s'applique à la série de fonctions $\sum f_n(x)$ (mais alors il s'agit de séries à valeurs réelles, non pas vectorielles).

V.3 Convergence normale

On rappelle que l'on peut définir, si f est une fonction bornée sur A à valeurs dans F,

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F = \sup\left(\left\{\|f(x)\|_F \; ; \; x \in A\right\}\right)$$

et que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{B}(A,F)$.

Définition Lorsque, au moins à partir d'un rang n_0, f_n est bornée, et lorsque la série $\sum_{n\geq n_0} N_\infty(f_n)$ converge, on dit que la série $\sum f_n$ est **normalement convergente**.

Remarque Pour une série à termes dans un espace vectoriel normé, la convergence absolue est la convergence d'une série de normes. Il faut donc être attentif à ne pas confondre la convergence normale et la convergence absolue. Et se souvenir que la norme à laquelle fait allusion l'adjectif « normale » est la norme ∞.

Proposition Si $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est uniformément convergente : la convergence normale implique la convergence uniforme.

VI Etude de continuité et de limites

VI.1 Théorème de continuité

Théorème Si les f_n sont continues en a, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A (ou seulement sur un voisinage de a), alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Théorème (bis) Si les f_n sont continues sur A, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A ou seulement sur tout compact inclus dans A, alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Application importante : continuité de l'exponentielle

Proposition : exp est continue sur $\mathbf{C}$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, sur $\mathscr{L}(E)$ où E est de dimension finie…

VI.2 Théorème de la double limite

Théorème : Si a est adhérent à A, si chaque f_n a une limite ℓ_n en a, si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ a une limite en a, et cette limite est $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$. Autrement dit, **sous les hyptohèses précédentes**,

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

VII Convergence uniforme et intégration sur un segment

VII.1 Suites de fonctions

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f, et que f est continue par morceaux. Alors la suite $\left(\int_{[a,b]} f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\int_{[a,b]} f$.

VII.2 Séries de fonctions

Théorème : Si les f_n sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$, si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, et si la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors la série de terme général $\int_{[a,b]} f_n$ converge, et

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\right) dt$$

Remarque : Si les f_n sont continues (ce qui sera en général le cas), si la convergence est uniforme, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$, sans que l'on ait besoin de le vérifier.

Les autres théorèmes (convergence dominée, interversion série-intégrale avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$) sont au programme seulement pour des fonctions à valeurs réelles ou complexes, comme tout ce qui concerne l'intégration sur un intervalle quelconque).

VIII Primitivation de la somme d'une suite ou d'une série de fonctions, suites et séries de fonctions de classe C^1

VIII.1 Convergence uniforme et primitivation d'une suite de fonctions

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose que la suite (f_n) converge **uniformément sur tout segment inclus dans** I vers une fonction f (qui est donc continue). Soit $a \in I$, F la primitive de f qui s'annule en a, et, pour $n \in \mathbf{N}$, F_n la primitive de f_n qui s'annule en a. Alors la suite (F_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers F.

Autrement dit, la convergence uniforme sur tout segment se transmet par primitivation (à condition de prendre les primitives s'annulant toutes en un même point donné).

VIII.2 Convergence uniforme et primitivation d'une série de fonctions

Proposition Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Soit a un point de I et, pour tout n, F_n la primitive de f_n qui s'annule en a. Alors la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment, et sa somme $(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n)$ est la primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ qui s'annule en a.

VIII.3 Suite de fonctions de classe C^1

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I
3. La suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors f, limite de la suite (f_n), est de classe C^1 sur I. Sa dérivée est la limite de la suite (f_n'). Et la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.

VIII.4 Série de fonctions de classe C^1

Proposition Soit Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un evndf. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, et que $\sum f_n$ converge simplement sur I. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I, et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

VIII.5 Suites et séries de fonctions de classe C^k

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^k sur I
2. Chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbf{N}}$ $(0 \leq j \leq k-1)$ converge simplement sur I
3. La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors f, limite de la suite (f_n), est de classe C^k sur I. Sa dérivée j-ième est, pour tout j entre 1 et k, la limite de la suite $(f_n^{(j)})$.

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur I
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I
3. Chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbf{N}}$ $(j \geq 1)$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors f, limite de la suite (f_n), est de classe C^∞ sur I. Sa dérivée j-ième est, pour tout j, la limite de la suite $(f_n^{(j)})$.

Proposition Soit Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^p sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un evndf F. On suppose que les séries de fonctions $\sum\limits_n f_n$, $\sum\limits_n f'_n$,..., $\sum\limits_n f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I, et que $\sum\limits_n f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I, et, pour tout $j \in [1, p]$, sa dérivée j-ième est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Proposition Soit Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un evndf. On suppose que la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ convergent simplement sur I pour tout $j \in \mathbf{N}$, et que $\sum\limits_n f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I pour $j \geq 1$. Alors

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I, et, pour tout $j \in \mathbf{N}_*$, sa dérivée j-ième est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

VIII.6 Application à l'exponentielle de matrice

L'exponentielle a une propriété fondamentale (voir résolution des systèmes linéaires à coefficients constants) :

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$; sa dérivée est l'application $t \mapsto A\ \exp(tA)$ ou, autre manière d'écrire la même chose, $t \mapsto \exp(tA)\ A$.

Proposition Soit u un élément de $\mathscr{L}(E)$, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. L'application $t \mapsto \exp(tu)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$; sa dérivée est l'application
$t \mapsto u\ \exp(tu)$ ou, autre manière d'écrire la même chose, $t \mapsto \exp(tu)\ u$.

En résumé,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tu) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$$

Table des matières

I Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions **1**
- I.1 Convergence simple d'une suite de fonctions 1
  - a. Définition 1
- I.2 Convergence uniforme 2
  - a. Définition 2
  - b. Proposition 2
  - c. Définition 2
  - d. Etude pratique 2
- I.3 Cas particulier des fonctions bornées 3
- I.4 Convergence uniforme, convergence pour la norme N_∞ 4
- I.5 Convergence uniforme sur tout compact 4

II Transmission de la continuité par convergence uniforme **5**

III Théorème de la double limite **6**

IV Théorèmes d'approximation uniforme **8**
- IV.1 Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier sur un segment 8
- IV.2 Théorème de Weierstrass 9

V Convergence simple, convergence uniforme des séries de fonctions **10**
- V.1 Convergence simple 10
- V.2 Convergence uniforme 11
  - a. Définition 11
  - b. Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide des restes 11
- V.3 Convergence normale 11

VI Etude de continuité et de limites **12**
- VI.1 Théorème de continuité 12
- VI.2 Théorème de la double limite 13

VII Convergence uniforme et intégration sur un segment **14**
- VII.1 Suites de fonctions 14

VII.2 Séries de fonctions 14

VIII Primitivation de la somme d'une suite ou d'une série de fonctions, suites et séries de fonctions de classe C^1 15

VIII.1 Convergence uniforme et primitivation d'une suite de fonctions . 15

VIII.2 Convergence uniforme et primitivation d'une série de fonctions . 15

VIII.3 Suite de fonctions de classe C^1 16

VIII.4 Série de fonctions de classe C^1 16

VIII.5 Suites et séries de fonctions de classe C^k 17

VIII.6 Application à l'exponentielle de matrice 18