

S8 : Séries dans les evn de dimension finie

La théorie n'est pas très compliquée : on reprend la théorie des séries à termes réels ou complexes, on adapte aux espaces vectoriels normés.

L'application la plus fréquente est l'étude de séries matricielles (ou d'endomorphismes) qu'on rencontre dans d'assez nombreux énoncés.

I Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

I.1 Sommes partielles; convergence; divergence; somme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E .

Etudier la série de terme général u_n , c'est étudier la suite de terme général S_n (qui est une suite d'éléments de E), où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k .$$

S_n est la somme partielle d'ordre n (ou de rang n) de la série.

Lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, on dit que la série de terme général u_n converge.

Pour abrégé, on écrit souvent que la série $\sum u_n$ converge, ou que la série $\sum_n u_n$ converge (si plusieurs lettres interviennent dans l'expression de u_n), ou que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge.

Etudier la nature de la série $\sum u_n$, c'est déterminer si cette série converge ou diverge.

Dans le cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée somme de la série $\sum u_n$, et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^p u_n \right)$$

lorsque cette limite existe.

Une série divergente n'a pas de somme. Le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a alors pas de sens. On ne devrait d'ailleurs se permettre d'écrire ce symbole qu'une fois démontrée la convergence de la série.

I.2 Condition nécessaire de convergence; divergence grossière

Proposition Pour que $\sum u_n$ converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 0_E . Si ce n'est pas le cas, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

I.3 Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent dans le \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, si $\lambda \in \mathbf{K}$, alors la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Autrement dit, l'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\sum u_n$ converge est un espace vectoriel, sous-espace de l'espace vectoriel des suites d'éléments de E , et l'application qui à une telle suite (u_n) associe la somme de la série $\sum u_n$ est linéaire.

I.4 Indépendance par rapport à la norme

Tout ce qui précède ne dépend pas du choix de la norme sur E , car elles sont toutes équivalentes. On peut donc parler de convergence d'une suite d'éléments d'un espace vectoriel de dimension finie, sans faire référence à une norme particulière.

Dans un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie, une série peut converger pour une norme et diverger pour une autre norme, converger vers deux limites différentes pour deux normes différentes... Mais c'est hors-programme.

I.5 Caractérisation par les composantes dans une base

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ; pour tout n , on peut décomposer u_n dans la base \mathcal{B} :

$$u_n = \sum_{i=1}^p u_n^{(i)} e_i$$

Ainsi, pour chaque i entre 1 et p , $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des i -èmes composantes de la suite (u_n) .

Proposition La série $\sum u_n$ converge si et seulement si, pour chaque i dans $\{1, \dots, p\}$, la série $\sum u_n^{(i)}$ converge. Et, le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right] e_i$$

Autrement dit, la somme de la série a pour composantes les sommes des séries des composantes (dans le cas de convergence, bien entendu).

En particulier, si (u_n) est une suite de nombres complexes, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent, et si c'est le cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$$

I.6 Restes d'une série convergente

On considère ici une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, qui converge donc vers S , somme de la série.

Définition On appelle reste d'ordre n (ou : de rang n) de la série convergente $\sum u_n$ l'élément de E :

$$R_n = S - S_n$$

La suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite des restes de la série convergente $\sum u_n$.

Proposition La suite des restes d'une série convergente converge vers 0_E .

On peut écrire :

$$\begin{aligned} R_n &= S - S_n \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p u_k \right) - \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p u_k - \sum_{k=0}^n u_k \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^p u_k \right) \end{aligned}$$

R_n s'écrit donc comme somme d'une série (convergente, bien entendu) :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Pour une série divergente, on ne peut pas définir de restes.

I.7 Convergence absolue

a. Définition

Définition On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$ lorsque la série $\sum \|u_n\|$ converge.

Remarque Une fois de plus, cette définition est « intrinsèque » : si $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur E , elles sont équivalentes, donc $\sum \|u_n\|$ converge si et seulement si $\sum N(u_n)$ converge. On a donc le droit de dire, si E est de dimension finie, « dans E , la série $\sum u_n$ est absolument convergente » sans faire référence à une norme particulière.

Remarque On ne confondra pas cette définition avec celle de la convergence normale pour les séries de fonctions... Dans l'expression « convergence normale », la norme dont on parle est la norme $\|\cdot\|_\infty$, alias norme « de la convergence uniforme ».

Cas particulier Dans le cas fréquent où la suite est à termes réels ou complexes ($E = \mathbf{R}$ ou $E = \mathbf{C}$), la série de terme général u_n converge absolument lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge.

b. La convergence absolue implique la convergence

Théorème Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration 1 On considère un espace de dimension finie E . Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente d'éléments de E , on veut montrer qu'elle converge.

Une première idée est classique : si on est en dimension finie, il existe des bases. Soit donc, dans E , une base (e_1, \dots, e_p) . Les normes sur E étant toutes équivalentes, on peut par exemple considérer la norme définie par

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_i e_i \right\| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$$

On décompose alors chaque u_n dans la base :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^p u_n^{(i)} e_i$$

On constate alors que, pour tout i entre 1 et p ,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|$$

Ce qui permet de conclure assez facilement à partir du résultat « la convergence absolue implique la convergence » vu dans **R** ou **C**.

Démonstration 2 Cette démonstration ne sera pas demandée aux concours, mais elle est intéressante, car les idées que l'on va utiliser peuvent se retrouver dans un énoncé d'écrit pour pallier la disparition du programme de la « complétude ».

On munit E d'une norme quelconque $\|\cdot\|$. On suppose que $\sum \|u_n\|$ converge.

On note, pour tout n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que (S_n) est bornée.

On peut donc extraire de (S_n) (on est en dimension finie) une suite $(S_{\phi(n)})$ qui converge vers une limite ℓ .

2. Montrer que la suite $(S_n - S_{\phi(n)})$ converge vers 0_E .

3. Conclure que $\sum u_n$ converge.

I.8 Correspondance suites-séries

Etudier la convergence d'une série, c'est étudier la convergence d'une suite : la suite de ses sommes partielles.

Réciproquement, toute suite peut être écrite comme suite des sommes partielles d'une certaine série. Considérons en effet une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, et cherchons une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que les u_n soient les sommes partielles de la série de terme général v_n . Autrement dit, cherchons $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

Ceci équivaut à $v_0 = u_0$ et, pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - u_{n-1}$. On pose parfois $u_{-1} = 0$ pour que cette formule soit vraie pour tout n . On retiendra :

Proposition La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

On parle souvent de « série télescopique » pour ces séries.

L'utilisation de cette proposition permet, combinée aux critères de convergence de séries, d'étudier des suites.

Proposition Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel de dimension finie. Une condition suffisante pour que la suite (u_n) converge est que la série $\sum \|u_{n+1} - u_n\|$ converge.

Exemple-exercice important Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie fermée de E . On considère f une application k -lipschitzienne de A dans A , avec $0 < k < 1$ (on dit que f est « contractante »). La stabilité de A par f permet, si $c \in A$, de définir une suite (u_n) par

$$u_0 = c \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que la suite (u_n) converge, et que sa limite est l'unique point fixe de f .

II Application : séries matricielles, séries d'endomorphismes

II.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

Proposition Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $\sum \frac{1}{n!} A^n$ converge; on définit

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Proposition bis Si $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\sum \frac{1}{n!} u^n$ converge; on définit

$$\exp(u) = e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

Remarque On prend traditionnellement n pour noter le nombre de lignes (et de colonnes) de la matrice A . On prend aussi traditionnellement n pour désigner l'indice de sommation. Il faut choisir...

Le choix d'une norme N d'opérateur dans $L(E)$ permet d'avoir la propriété très utile ici :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \forall u \in \mathcal{L}(E) \quad N(u^k) \leq N(u)^k$$

qui laisse voir que $\sum \frac{1}{k!} u^k$ converge absolument.

Pour les matrices, même chose.

II.2 Quelques exponentielles

Ne sont au programme que la définition (que l'on vient de voir) et les propriétés fonctionnelles ($A \mapsto \exp(A)$ est continue, $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$) que l'on verra plus tard. Néanmoins, l'exponentielle de matrice apparaît souvent dans les énoncés à l'écrit et à l'oral.

a. Exponentielle d'une matrice diagonale (au programme)

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_p \end{pmatrix} \text{ alors } e^D =$$

b. Exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure

$$\text{Si } T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{p,p} \end{pmatrix} \text{ alors } e^T = \begin{pmatrix} & ** & \dots & ** \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ** \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

Exercice très classique : Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$$

c. Exponentielle d'une matrice nilpotente

Si $N \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, on a

$$e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$$

d. Une exponentielle « calculable »

Soit $a \in \mathbf{R}$, calculer l'exponentielle de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

e. Exponentielles de matrices semblables (au programme)

Si $A = PBP^{-1}$ ($A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), P \in GL_n(\mathbf{K})$),

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

Démonstration à savoir bien rédiger

Corollaire (au programme) Les valeurs propres de $\exp(A)$ sont, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, les exponentielles des valeurs propres de A .

f. Une remarque

Exercice : En utilisant un résultat de topologie, montrer que, pour tout $u \in L(E)$ (où E est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie), il existe un polynôme Q_u de degré $\leq \dim(E) - 1$ tel que $Q_u(u) = \exp(u)$.

g. Un point commun avec les exponentielles réelles et complexes

Exercice : Montrer que, si $u \in L(E)$ (où E est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie),

$$\left(\text{Id}_E + \frac{1}{n} u \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(u)$$

[On pourra commencer par comparer, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{k!}$ et $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$].

II.3 Exponentielle d'une somme de matrices (ou d'endomorphismes) qui commutent

Ceci est bien au programme.

Proposition Si $AB = BA$, $\exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.

Proposition Si $u \circ v = v \circ u$, $\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$

Corollaire Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\exp(A) \in GL_n(\mathbf{K})$, et $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(u) \in GL(E)$, et $[\exp(u)]^{-1} = \exp(-u)$.

Les démonstrations ne sont pas exigibles.

II.4 Série « géométrique »

On écrit les résultats sur les matrices, on peut les réécrire pour les endomorphismes.

Proposition (h.p.) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on ait

$$N(A^k) \leq (N(A))^k$$

(c'est en particulier le cas pour une norme d'opérateur). Si $N(A) < 1$, alors $I_n - A \in GL_n(\mathbf{K})$, $\sum A^k$ est absolument convergente, et

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

Table des matières

I	Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie	1
I.1	Sommes partielles; convergence; divergence; somme	1
I.2	Condition nécessaire de convergence; divergence grossière	2
I.3	Espace vectoriel des séries convergentes	2
I.4	Indépendance par rapport à la norme	3
I.5	Caractérisation par les composantes dans une base	3
I.6	Restes d'une série convergente	3
I.7	Convergence absolue	5
a.	Définition	5
b.	La convergence absolue implique la convergence	5
I.8	Correspondance suites-séries	6
II	Application : séries matricielles, séries d'endomorphismes	8
II.1	Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie	8
II.2	Quelques exponentielles	9
a.	Exponentielle d'une matrice diagonale (au programme)	9
b.	Exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure	9
c.	Exponentielle d'une matrice nilpotente	9
d.	Une exponentielle « calculable »	9
e.	Exponentielles de matrices semblables (au programme)	10
f.	Une remarque	10
g.	Un point commun avec les exponentielles réelles et complexes	10
II.3	Exponentielle d'une somme de matrices (ou d'endomorphismes) qui commutent	10
II.4	Série « géométrique »	11