C5,1 : Intégration et dérivation (fonctions vectorielles)

Les fonctions dont il est question dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans F, espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. *En général, F sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.*

I Intégrale et primitive

I.1 Symbole $\int_a^b f(t)dt$

Définition : Soit f continue par morceaux sur l'intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour tout couple (a,b) d'éléments de I, le segment d'extrémités a et b (que l'on note indifféremment $[a,b]$ ou $[b,a]$) est inclus dans I. On définit alors
$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f$ si $a<b$,
$\int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f$ si $a>b$,
$\int_a^b f(t)dt = 0$ si $a=b$.

Linéarité : Si f et g sont continues par morceaux sur I, si λ est un élément de $\mathbf{K}$ et si a et b sont deux éléments quelconques de I, alors

$$\int_a^b (f+\lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt\ .$$

Relation de Chasles : Si f est continue par morceaux sur I, si a, b, c sont trois points de I, alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt\ .$$

Inégalité de la moyenne Si f est continue par morceaux sur I, si a et b sont deux points de I, alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq |b-a| \sup_{[a,b]} \|f\|\ .$$

En pratique, lorsque la fonction à intégrer se présente comme un produit de fonctions, cette majoration est souvent trop grossière et on ne majore qu'une partie de la fonction ; par exemple, si f est à valeurs dans **K** *et g à valeurs dans un* **K***-espace vectoriel de dimension finie* $(E, \|.\|)$,

$$\left\| \int_a^b f(t)g(t)dt \right\| \leq \int_a^b |f(t)|\ \|g(t)\|\ dt\ \leq \sup_{[a,b]} |f|\ \int_a^b \|g(t)\| dt$$

mais aussi bien, dans le même contexte,

$$\left\| \int_a^b f(t)g(t)dt \right\| \leq \int_a^b |f(t)|\ \|g(t)\|\ dt\ \leq \sup_{[a,b]} \|g\|\ \int_a^b |f(t)| dt$$

I.2 Primitive

Définition (primitive d'une fonction continue) : Soit f une application continue de l'intervalle I de **R** dans un espace de dimension finie. On appelle primitive de f sur I toute application dérivable sur I et dont la dérivée est f (une telle application est alors nécessairement de classe C^1). Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Remarque Le fait que I soit un intervalle est très important.

I.3 Intégrale et primitive

Théorème fondamental (lien entre intégration et dérivation) : Soit f une application continue sur I, a un point de I. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Cette primitive est l'application

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt \, .$$

Pour toute primitive h de f et tous points a et x de I, on a donc

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a) \, .$$

Démonstration Voir annexe : par rapport au cas réel ou complexe, il s'agit seulement de remplacer quelques $|.|$ par des $\|.\|$.

Corollaire : Si f est de classe C^1 sur I, pour tous points a et x de I,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \, .$$

Ecriture utile pour déduire de propriétés de f' des conclusions sur f.

Notation : On note souvent $[h]_a^b$ ou $[h(t)]_{t=a}^{t=b}$ ou encore, lorsqu'il n'y a pas d'équivoque possible sur le nom de la variable, $[h(t)]_a^b$ l'expression $h(b) - h(a)$.

II Intégration par parties, changement de variables

II.1 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

On considère trois **K**-espaces vectoriels normés E, F, G.

Si f et g sont de classe C^1 sur I, à valeurs dans E et F respectivement (qui sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie), si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, si a et b sont deux points de I,

$$\int_a^b B\big(f(t), g'(t)\big)dt = [B\big(f(t), g(t)\big)]_a^b - \int_a^b B\big(f'(t), g(t)\big)dt \, .$$

Utilisation On utilise cette formule dans le cas du produit de réels ou de complexes (déjà vu, donc), rarement dans le cas où $E = F$ est un espace euclidien et B le produit scalaire sur cet espace ($G = \mathbf{R}$, donc).

II.2 Changement de variable

Théorème de changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans I. Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\phi(u)\big)\phi'(u)du\ .$$

Rappel Le changement de variable, c'est $t = \phi(u)$, pas $u = \psi(t)$.

III Inégalités des accroissements finis

III.1 Inégalités

Théorème : Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, à valeurs dans un evn de dimension finie $(E, \|.\|)$, si $\|f'\| \leq k$ sur $[a, b]$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k|b-a|$$

III.2 Classe C^n par prolongement

Théorème Soit I un intervalle, $a \in I$. Soit f une application de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$, à valeurs dans un evn de dimension finie. On suppose que $f^{(j)}$ a, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, une limite en a. Alors f se prolonge en une fonction de classe C^n sur I.

IV Formules de Taylor

IV.1 Formule de Taylor avec reste sous forme intégrale

Notation : Soit f de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ (à valeurs dans un espace de dimension finie), et soit a un point de I. Le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre k est, au point x :

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

(il s'agit d'ailleurs plutôt d'une fonction polynôme).

Théorème : Soit f de classe C^{k+1} sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ ($k \geq 0$), à valeurs dans un espace de dimension finie. Soit a un point de I. Alors, pour tout x de I,

$f(x) = T_k(x) + R_k(x) \quad$ où $\quad R_k(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \; + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration Par récurrence et intégration par parties.

IV.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème : Soit f de classe C^{k+1} sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ ($k \geq 0$), à valeurs dans un espace de dimension finie $(E, \|.\|)$. Soit a un point de I. Alors, pour tout x de I,

$$\left\| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{[a,x]} \left\| f^{(k+1)} \right\|$$

V Développements limités, formule de Taylor-Young

V.1 A propos du petit o

a. Les o dans les développements limités

Soit $f : I \longrightarrow E$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$ et E un evn de dimension finie. Soit $a \in \overline{I}$. Alors

$$\left[\; f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big) \;\right] \iff \left[\; \frac{1}{(x-a)^n} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E \;\right]$$

On peut « concrétiser » un peu cela en disant que $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$ si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow E$ telle que

$$\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$$

et telle que

$$\forall x \in I \qquad f(x) = (x-a)^n\, \varepsilon(x)$$

b. Remarque

$$\Big[\ f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)\ \Big] \iff \Big[\ \|f(x)\|_E = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)\ \Big]$$

c. Caractérisation par les composantes

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base quelconque de E. On peut alors définir les fonctions composantes de f, les f_i (qui sont à valeurs dans $\mathbf{K}$, si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé) :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$$

Alors

$$\Big[\ f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)\ \Big] \iff \Big[\ \forall i \in [\![1,p]\!] \quad f_i(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)\ \Big]$$

Et bien sûr, si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on peut aussi signaler que, si $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$,

$$\Big[\ g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)\ \Big] \iff \Big[\ \mathrm{Re}\big(g(x)\big) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big) \text{ et } \mathrm{Im}\big(g(x)\big) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)\ \Big]$$

Ces résultats sont conséquence directe des résultats sur les caractérisations des limites par les composantes.
Par exemple, si, pour tout $t \in]-a,a[$ $(a>0)$, $A(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$A(t) = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad a_{i,j}(t) = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

V.2 Définition

a. Définition

Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans un espace de dimension finie E. Soit a un point de $\overline{I}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a lorsqu'il existe des éléments $A_0, A_1, \ldots, A_n$ dans E tels que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k A_k = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

ce que l'on écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k A_k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

(même si cette deuxième écriture est encore moins claire que la première, à cause du signe = qui représente un $\in$).
Les A_k sont alors uniques ; $P(x-a) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k A_k$ est la partie régulière du développement limité.
Remarquons que l'existence d'un développement limité à l'ordre 0 en un point équivaut à l'existence d'une limite en ce point. Si f admet un développement limité en a, elle est donc prolongeable par continuité en a.

b. Remarque

Il faut bien voir qu'un développement limité est une propriété locale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k A_k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

est un résumé (en plus clair !) des propriétés successives suivantes :

$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A_0$

$\dfrac{1}{x-a}\big(f(x) - A_0\big) \xrightarrow[x\to a]{} A_1$

$\dfrac{1}{(x-a)^2}\big(f(x) - A_0 - (x-a)A_1\big) \xrightarrow[x\to a]{} A_2$

$\dfrac{1}{(x-a)^3}\big(f(x) - A_0 - (x-a)A_1 - (x-a)^2 A_2\big) \xrightarrow[x\to a]{} A_3$

$\ldots\ldots\ldots$

(successives car chaque limite écrite « contient » toutes les autres).

c. Caractérisation par les composantes

Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans un espace de dimension finie E. Soit a un point de $\overline{I}$. Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base quelconque de E. On note $f_1,\ldots,f_p$ les fonctions composantes de f sur la base $(e_1,\ldots,e_p)$. Si $(A_0,\ldots,A_n)$ sont n éléments de E, on peut les décomposer dans la base $(e_1,\ldots,e_p)$:

$$A_j = \sum_{i=1}^{p} a_j^{(i)} e_i$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k A_k + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

est équivalent à

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad f_i(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k A_k^{(i)} + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

Autrement et plus simplement dit, les développements limités des composantes sont les composantes des développements limités.

d. Exemple

L'extension des développements limités aux fonctions à valeurs vectorielles est essentiellement théorique, la pratique se situant au niveau des fonctions à valeurs réelles en général. Donnons quand même un exemple : on définit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t + \cos t) \end{array}$$

Alors, au voisinage de 0,

$$f(t) = (1,1) + t(0,1) + t^2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) + t^3\left(0,-\frac{1}{6}\right) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(t^3\right)$$

V.3 Opérations sur les développements limités :

a. Combinaison linéaire

Si f et g admettent au voisinage de a des développements limités de parties régulières respectives $\sum_{k=0}^{n}(x-a)^k A_k$ et $\sum_{k=0}^{n}(x-a)^k B_k$, alors $f+\lambda g$ admet un développement limité au voisinage de a de partie régulière
$\sum_{k=0}^{n}(x-a)^k(A_k+\lambda B_k)$.

b. Composition

Si f est une application de I dans J (I et J désignant deux intervalles de $\mathbf{R}$) admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ($a \in I$), si g est une application de J dans E admettant un développement limité à l'ordre n en $f(a)$, alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a.

V.4 Développement limité d'une primitive

Théorème : Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans un espace de dimension finie E, continue sur I et admettant un développement limité à l'ordre n en a ($a \in I$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(x-a)^k A_k \;+\; \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^n\big)$$

Soit F une primitive de f sur I. Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a, obtenu en « intégrant terme à terme » celui de f :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}A_k \;+\; \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

Démonstration : En fait, si on fait la preuve dans le cas où tous les A_k sont nuls, on a tout fait.

V.5 Théorème de Taylor-Young

Théorème Soit f une application de classe C^k d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans un espace vectoriel E de dimension finie. Soit a un point de I. Alors f admet au voisinage de a le développement limité à l'ordre k suivant :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \ + \ \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)^k\big)$$

que l'on peut aussi écrire

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) \ + \ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\big(h^k\big)$$

Démonstration Par récurrence, à partir du résultat précédent.

V.6 Développement limité d'une dérivée

Rappel : on ne dérive par un développement limité.

VI Annexe : démonstration du théorème fondamental

Théorème : Soit f une application continue sur I, à valeurs dans un evn de dimension finie $(E, \|.\|)$, a un point de I. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Cette primitive est l'application

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt\,.$$

Démonstration : Notons F l'application définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On veut démontrer que F est une primitive de f sur I. Ce qui revient à montrer que, pour tout $x \in I$, on a le développement limité au voisinage de 0 :

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

Fixons donc $x \in I$. Dans ce qui suit, on suppose que h est assez petit pour que $x + h \in I$ (si x est une borne de I, le signe de h est fixé). On peut écrire, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - hf(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt \; - \; hf(x) \\ &= \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)dt \end{aligned}$$

et donc

$$\big\|F(x+h) - F(x) - hf(x)\big\| \leq \left|\int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| dt\right|$$

Soit $\epsilon > 0$; par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in I \qquad |y - x| \leq \eta \;\Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon$$

Si $|h| \leq \eta$, on a, pour tout $t \in [x, x+h]$ (que h soit positif ou négatif n'a aucune importance), $|t - x| \leq \eta$ et donc $\|f(t) - f(x)\| \leq \epsilon$. D'où, finalement,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \big\|F(x+h) - F(x) - hf(x)\big\| \leq \epsilon|h|$$

On a montré

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \qquad |h| \leq \eta \Rightarrow \big\|F(x+h) - F(x)\big\| \leq \epsilon|h|$$

ce qui montre bien que

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

On conclut donc (l'unicité ne pose pas de difficulté).

Table des matières