C4,1 : Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

Les fonctions dont il est question dans ce chapitre sont définies sur un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans F, espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. De nouveau, comme pour les fonctions numériques, seules les propriétés de l'intégrale sont à connaître, la construction n'est pas exigible.

I Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

I.1 Définition

On dit que ϕ est une application en escalier sur le segment $J = [a,b]$, à valeurs dans F lorsqu'il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_n)$ de $[a,b]$ et une famille $(v_0,\dots,v_{n-1})$ d'éléments de F telle que, sur chaque intervalle ouvert $]a_i,a_{i+1}[$, ϕ soit constante et égale à v_i. On définit alors l'intégrale de f sur J :

$$\int_J \phi = \int_{[a,b]} \phi = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\, v_i \ .$$

C'est un élément de F. On essaiera d'éviter d'écrire $v_i(a_{i+1}-a_i)$: on est censé écrire le scalaire avant le vecteur.
On vérifie que la définition ne dépend pas de la subdivision choisie adaptée à ϕ.

I.2 Propriétés

Ces propriétés sont des intermédiaires, on les étend au cas plus général des fonctions continues par morceaux. Donc ce n'est pas essentiel de les retenir sous cette première forme.

Si ϕ et ψ sont en escalier sur J, si λ est un élément de $\mathbf{K}$, $\phi+\lambda\psi$ est en escalier sur J, et

$$\int_J(\phi+\lambda\psi) \;=\; \int_J\phi \;+\; \lambda\int_J\psi\ .$$

(c'est la linéarité de l'intégrale).

Si u est une application linéaire de F dans G, autre espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K}$, alors $u\circ\phi$ est en escalier sur J, et

$$\int_J(u\circ\phi) = u\Big(\int_J\phi\Big)\ .$$

(propriété intéressante à noter car nouvelle par rapport au cas réel ou complexe, et qui se montre facilement : avec les notations de la section précédente, $u\circ\phi$ est constante sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$, et vaut $u(v_i)$ sur cet intervalle. Donc

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} u\circ\phi &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,u(v_i)\\ &= u\left(\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,v_i\right)\\ &= u\left(\int_a^b\phi\right)\end{aligned}$$

ce qui est ce qu'on voulait).

Si ϕ est en escalier sur J, si $\|.\|$ est une norme sur F, alors

$$\left\|\int_J\phi\right\| \leq \int_J \|\phi|\|\,.$$

(simple conséquence de l'inégalité triangulaire).

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

II.1 Définition

On rappelle que toute fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier (il suffit d'approcher chaque fonction composante dans une base donnée). On peut construire donc une théorie de l'intégration sur un segment de la manière suivante :

Soit f continue par morceaux sur le segment $J = [a,b]$, soit $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. On démontre que la suite $\left(\int_J \phi_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge (on montre qu'elle est bornée, on en extrait une suite convergente, on appelle ℓ sa limite, on montre que la suite elle-même converge vers ℓ). On démontre de plus que pour toute suite $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$, la suite $\left(\int_J \psi_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la même limite que la suite $\left(\int_J \phi_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
Cette limite commune est appelée intégrale de f sur J. En résumé, pour toute suite $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$,

$$\int_J f = \int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_J \phi_n\right) .$$

On peut plus paresseusement définir l'intégrale comme ayant pour composantes dans une base les intégrales des fonctions composantes (il faut vérifier que la définition est indépendante du choix de la base, mais ce n'est pas trop dur).

III Propriétés de l'intégrale

On désigne par a et b deux réels. On peut utiliser la notation $\int_{[a,b]}$, $\int_a^b$, dans le deuxième cas il faudra parfois (pas toujours) supposer $a \leq b$. La définition de l'intégrale « d'une borne à une borne » se fait à partir de l'intégrale « sur un segment » exactement comme dans le cas réel.

Proposition 1 : Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, si λ est un élément de $\mathbf{K}$, $f+\lambda g$ est continue par morceaux sur J, et

$$\int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g\,.$$

(**linéarité de l'intégrale**)

Proposition 2 : image de l'intégrale par une application linéaire

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "u\circ f"'] & E \arrow[r, "u"] & F \end{tikzcd}$$

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans un evn de dimension finie E, si u est une application linéaire de E dans l'evn F (lui aussi de dimension finie), alors $u\circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ (et à valeurs dans F), et

$$\int_a^b u\circ f = u\left(\int_a^b f\right)$$

Démonstration Toutes les démonstrations se font de la même manière :

• Le résultat est vrai de façon simple pour les fonctions en escalier.

• On prend une fonction continue par morceaux, on considère une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers cette fonction, et on conclut avec des arguments de limite…

Mais pour la proposition 2, c'est un peu intéressant, rédigeons donc :

Soit $f\ :\ [a,b]\to E$, continue.

Soit $u\in L(E,F)$.

Soit (ϕ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$, qui converge uniformément vers f.

On a, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u\circ\phi_n$ en escalier sur $[a,b]$, et

$$u\left(\int_a^b \phi_n\right)=\int_a^b u\circ\phi_n \tag{1}$$

Le membre de gauche tend, quand $n\to+\infty$, vers $u\left(\int_a^b f\right)$, car u est continue (linéaire sur E qui est de dimension finie).

Si la suite $(u\circ\phi_n)$ converge uniformément vers $u\circ f$, on pourra conclure.

Or, plus que la continuité de u, on peut affirmer l'existence d'un α tel que

$$\forall x\in E\qquad \|u(x)\|_F\leq\alpha\|x\|_E \tag{2}$$

(on choisit une norme sur E et une norme sur F, peu importe lesquelles, toutes les normes sur E sont équivalentes, même chose sur F). Donc

$$\forall t\in[a,b]\qquad \|(u\circ\phi_n)(t)-(u\circ f)(t)\|_F\leq\alpha\|\phi_n(t)-f(t)\|_E$$

Notons comme d'habitude, si $g\ :\ [a,b]\longmapsto E$,

$$\|g\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\big(\|g(t)\|_E\big)$$

(cette $\|.\|_\infty$ dépend de $\|.\|_E$, mais si on change de $\|.\|_E$, on changera pour une $\|.\|_\infty$ équivalente). Et, si $h\ :\ [a,b]\longmapsto f$,

$$\|h\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}(\|h(t)\|_F)$$

Alors on déduit de (2) que

$$\|u\circ\phi_n-u\circ f\|_\infty\leq\alpha\|\phi_n-f\|_\infty$$

et donc, comme (ϕ_n) converge uniformément vers f, $(u \circ \phi_n)$ converge uniformément vers $u \circ f$, donc, par définition de l'intégrale,

$$\int_a^b u \circ \phi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b u \circ f$$

ce qui permet d'obtenir le résultat voulu, par passage à la limite dans (1).

Utilisation

Exercice 1 (dans un écrit d'ens) Soit $f \in C_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$ où $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien. Soit $u \in E$. Montrer que

$$\langle u, \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \rangle = \int_a^b \langle u, f(t) \rangle\, \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit $f \in C_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$ où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que

$$\mathrm{Tr}\left(\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right) = \int_a^b \mathrm{Tr}\big(f(t)\big)\, \mathrm{d}t$$

Exercice 3 Soit $f \in C_{\mathrm{pm}}([a,b],E)$ où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, dont $(e_1, \dots, e_n)$ est une base. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ on note $\pi_i(x) = x_i$. Que dit alors la proposition 2 ?

Proposition 3 : Si f est continue par morceaux sur J, à valeurs dans l'espace vectoriel normé de dimension finie E, si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, on note, pour tout x de J :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i\ .$$

Alors :

$$\int_J f=\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_J f_i\Big)e_i\ .$$

(**les composantes de l'intégrale sont les intégrales des fonctions composantes**).

En particulier, si f est à valeurs dans $\mathbf{C}$:

$$\mathrm{Re}\Big(\int_J f\Big)=\int_J \mathrm{Re} f \quad , \quad \mathrm{Im}\Big(\int_J f\Big)=\int_J \mathrm{Im} f\ .$$

Et ainsi : $\overline{\int_J f}=\int_J \overline{f}$.

Exemple Si $A(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, calculer

$$\int_0^{\pi/2} A(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 4 : Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans E (espace de dimension finie), si $\|.\|$ désigne une norme quelconque sur E, et si $a\leq b$,

$$\left\|\int_a^b f\right\|\leq\int_a^b \|f\|$$

(appelée parfois inégalité de la norme, mais en fait elle n'a pas vraiment de nom). En particulier, si f est à valeurs complexes,

$$\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b |f|$$

Pas de « positivité » de l'intégrale : pour une fonction vectorielle, cela n'aurait aucun sens...

Ce qui a été dit pour les fonctions réelles vaut encore ici : si on doit majorer une norme d'intégrale, ce qui est assez fréquent, on commence alors, dans la plupart des cas, par « rentrer » la norme sous l'intégrale, après avoir vérifié que les bornes sont « dans le bon sens » :

$$\text{si } a \leq b \quad , \quad \left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \,.$$

Ensuite, on majore $\|f\|$. En revanche, il ne faut pas croire que $\|f\| \leq \|g\|$ implique

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \left\| \int_a^b g \right\| \,.$$

Proposition 5 : Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a \leq b$, si $\|.\|$ désigne une norme quelconque sur E,

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \|f\| \,.$$

(**inégalité de la moyenne**). On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ l'élément μ de E défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$$

L'inégalité ci-dessus s'écrit alors

$$\|\mu\| \leq \sup_{[a,b]} \|f\|$$

Si f est continue sur $[a,b]$, on retrouve l'inégalité entre les normes N_1 et N_∞ sur $\mathscr{C}([a,b],E)$:

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq N_1(f) \leq (b-a) N_\infty(f) \,.$$

Ce dernier résultat s'interprète de la manière suivante : la convergence uniforme (c'est-à-dire pour la norme N_∞) d'une suite de fonctions continues implique la convergence en moyenne (c'est-à-dire pour N_1) de cette même suite. Rappelons que, si N_∞ reste une norme sur $C_{\text{pm}}([a,b],E)$, N_1 n'est qu'une « seminorme » (vocabulaire hors-programme : mêmes propriétés qu'une norme, sauf $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$) sur ce même espace. On déduit en particulier :

Proposition 6 : Si $[a,b]$ est un segment, si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction continue par morceaux f, alors il y a convergence en moyenne : $\displaystyle\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$

Proposition 7 : Relation de Chasles : $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.

IV Sommes de Riemann

Même énoncé que pour les fonctions à valeurs réelles !

Proposition Soit f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition bis Soit f continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Table des matières