C3,1 : Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Ce chapitre doit être vu comme un complément à C3. Pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas de théorème de Rolle, pas de quotient…Et il y a bien une inégalité des accroissements finis, mais elle sera vue dans le chapitre Intégration, dérivation. Ce chapitre est donc court et sans grande difficulté.

Les fonctions dont il est question dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans F, espace vectoriel normé de dimension finie sur le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$, noté souvent $\mathbf{K}$. Signalons à ce propos qu'il n'est pas stupide de vouloir dériver des fonctions d'une variable complexe, mais c'est un problème différent, qui n'est pas du tout au programme.

I Dérivabilité et dérivée des fonctions à valeurs vectorielles

I.1 Définitions

Rappel : $f\ :\ I \longrightarrow F$, I intervalle de $\mathbf{R}$, F evn de dimension finie.

Définition : Soit a un point de I. On peut définir, sur $I \setminus \{a\}$, la fonction

$$g\ :\ x \longmapsto \frac{1}{x-a}\big(f(x)-f(a)\big)\ .$$

Lorsqu'elle admet une limite en a, on dit que f est dérivable en a, et on définit la dérivée de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{x-a} \big(f(x) - f(a) \big) \right) .$$

$f'(a)$ est donc un élément de F (un « vecteur »).

Remarquons qu'il revient exactement au même de définir

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \big(f(a+h) - f(a) \big) \right)$$

lorsque cette limite existe.

On peut caractériser la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 :

Définition équivalente : f est dérivable en a si et seulement si il existe un élément ℓ de F tel que, au voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + (x-a)\ell + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x-a)$$

et alors $f'(a) = \ell$.

Autre formulation : f est dérivable en a si et seulement si il existe un élément ℓ de F tel que, au voisinage de 0,

$$f(a+h) = f(a) + h\ell + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

et alors $f'(a) = \ell$.

La seule différence ici avec les fonctions à valeurs réelles et qu'on est censé éviter $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ et privilégier $\dfrac{1}{x-a}\big(f(x) - f(a)\big)$ (penser par exemple au cas où $f(x)$ serait une matrice). En fait, dans des énoncés de concours, on rencontre fréquemment l'écriture (légèrement) incorrecte $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$.

Dérivées à gauche et à droite : Lorsque la restriction de g à $]a,+\infty[\cap I$ admet une limite en a, on dit que f est dérivable à droite en a, et on définit la dérivée à droite de f en a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \left(\frac{1}{x-a} \big(f(x) - f(a) \big) \right)$$

On définit de même la dérivée à gauche de f en a :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \left(\frac{1}{x-a} \big(f(x) - f(a) \big) \right) ,$$

lorsque cette limite existe.

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a, avec égalité des dérivées à gauche et à droite.

Définition : On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout point de I. L'application dérivée de f est alors $f' \ : \ x \mapsto f'(x)$. C'est une application de I dans F, comme f.

II Interprétations graphique et cinématique

En cinématique, on s'intéresse au mouvement d'un point mobile. On a donc une application

$$t \longmapsto M(t)$$

où $M(t)$ est un point, la variable t étant le temps. Donc t décrit un intervalle I de $\mathbf{R}$, et $M(t)$ est dans un espace affine. Le choix d'une origine O de l'espace affine permet de vectorialiser les choses : au lieu de s'intéresser à $M(t)$ on considère

$$f \ : \ t \longmapsto \overrightarrow{OM(t)}$$

qui a l'avantage d'être à valeurs dans un espace vectoriel. Si f est dérivable, en notation cinématique on écrit en général $\overrightarrow{M}'(t)$ plutôt que $\overrightarrow{OM}'(t)$, ce qui est parfaitement justifié par le fait que si Ω est une autre origine,

$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M(t)}$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\Omega M(t)}\right)$$

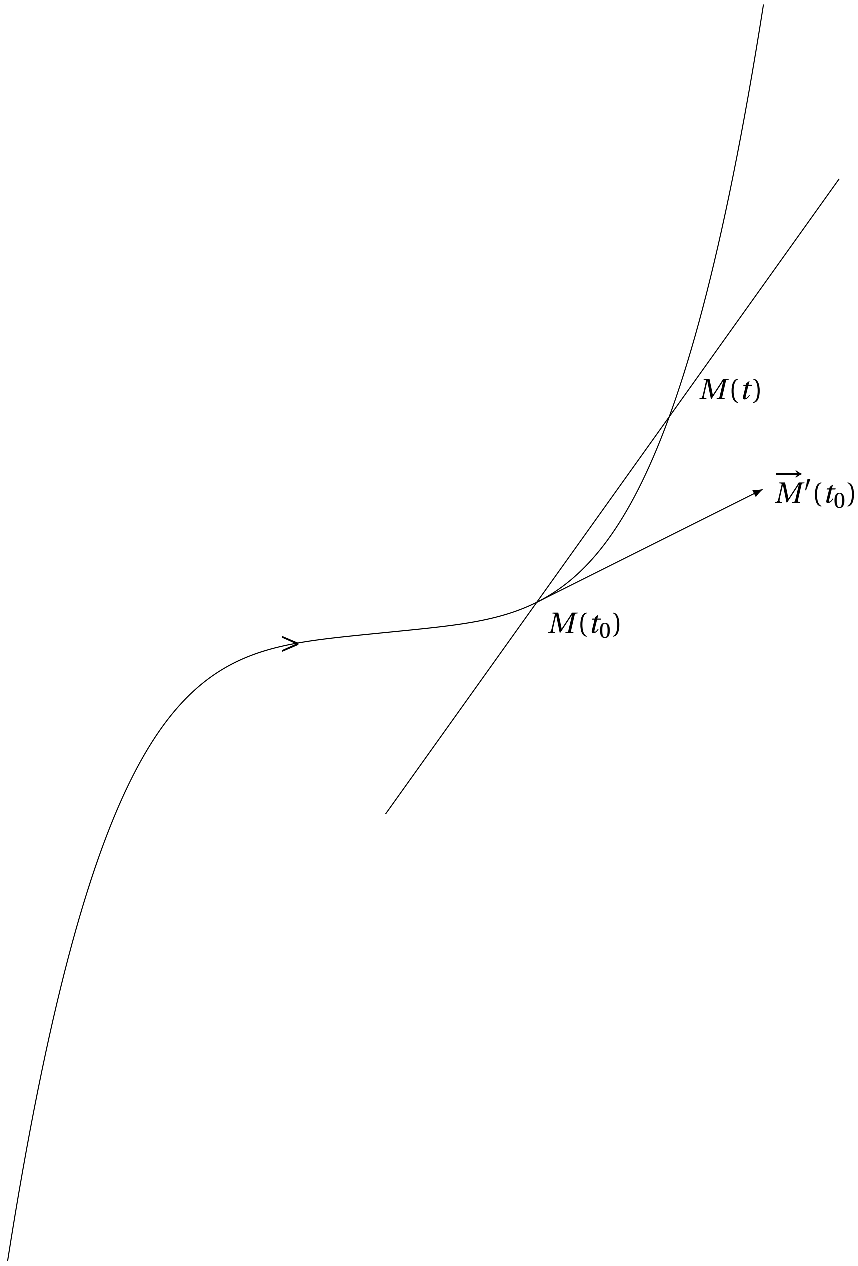
La dérivée $f'(t_0)$ est, si elle existe, la limite quand $t \to t_0$ de

$$\frac{1}{t-t_0}\left(f(t) - f(t_0)\right)$$

mais cette expression s'écrit aussi

$$\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$$

et on appelle $f'(t_0) = \overrightarrow{OM}'(t_0)$ le vecteur vitesse au temps t_0. On note que le vecteur $\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ (qui peut être interprété comme un vecteur « vitesse moyenne » entre les temps t_0 et t) dirige la droite $(M(t_0)M(t))$. Si $f'(t_0) \neq 0$, cette droite a une position limite quand $t \to t_0$, la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{M}'(t_0)$, qui est donc la tangente à la trajectoire au point $M(t_0)$.



$M(t)$
$\overrightarrow{M}'(t_0)$
$M(t_0)$

III Opérations sur les dérivées

III.1 Linéarité

a. Combinaison linéaire

Proposition On considère deux fonctions f, g définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un evn de dimension finie F.

Si f, g sont dérivables en a, si λ est un élément de $\mathbf{K}$, $\lambda f + g$ est dérivable en a, et

$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Résultat déjà vu en mpsi pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, généralisé ici.

Démonstration

Méthode 1 : Avec les taux d'accroissement.

$$\frac{1}{x-a}\big((\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(a)\big)=\lambda\frac{1}{x-a}(f(x)-f(a))+\mu\frac{1}{x-a}(g(x)-g(a))$$
$$\xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} \lambda f'(a)+\mu g'(a)$$

ce qui conclut.

Méthode 2 : partant des développements limités

$$f(a+h)=f(a)\ +\ hf'(a)\ +\ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

et

$$g(a+h)=g(a)\ +\ hg'(a)\ +\ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

on obtient

$$(\lambda f+\mu g)(a+h)=(\lambda f+\mu g)(a)\ +\ h\big(\lambda f'(a)+\mu g'(a)\big)\ +\ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

ce qui conclut aussi bien.

Proposition On reprend les notations de la proposition précédente, et on suppose f et g de classe C^1 sur I. Alors $\lambda f+\mu g$ l'est.

b. Image par une application linéaire

Proposition Si G est un espace vectoriel normé de dimension finie, si u est une application linéaire de F dans G, si f, définie sur I et à valeurs dans F, est dérivable en a, alors l'application $u\circ f\;:\;x\longmapsto u\big(f(x)\big)$, définie sur I et à valeurs dans G, est dérivable en a, et sa dérivée en a est $\big(u\circ f\big)'(a)=u\big(f'(a)\big)$.

Démonstration Par exemple avec les taux d'accroissement, en remarquant que

$$\frac{1}{h}\left[u\big(f(a+h)\big)-u\big(f(a)\big)\right]=u\left[\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)\right]$$

et en utilisant la continuité de u.

Proposition On reprend les notations de la proposition précédente. Si f est de classe C^1 sur I, alors $u\circ f$ l'est.

Résultat très simple, mais utile, ne pas confondre avec la formule générale sur le composée de deux applications. Ici u n'est pas du tout une fonction d'une variable réelle, on ne peut donc pas parler de sa dérivée (on peut parler de sa différentielle, voir plus tard, chapitre sur les fonctions de plusieurs variables).

Exercice 1 : On suppose que l'application $A\;:\;t\longmapsto A(t)$ est une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$). Montrer que l'application $t\longmapsto \mathrm{Tr}\,(A(t))$ est dérivable sur I. Exprimer sa dérivée à l'aide de A'.

Exercice 2 : On suppose que l'application $x\;:\;t\longmapsto x(t)$ est une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace euclidien E. Soit $a\in E$. Montrer que l'application $t\longmapsto (a|x(t))$ est dérivable sur I, calculer sa dérivée (l'exprimer à l'aide de x').

III.2 Bilinéarité, dérivée d'un produit

Rappel de topologie Si $B : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire, si E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie, alors B est continue.

Proposition

Si I est un intervalle et E, F, G des espaces vectoriels normés de dimension finie,
si $B : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire,
si $f : I \longrightarrow E$ est dérivable en a,
si $g : I \longrightarrow F$ est dérivable en a,
alors l'application

$$B(f,g) : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & B\big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

est dérivable en a, et

$$\big(B(f,g)\big)'(a) = B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right)$$

Démonstration Plus courte avec taux d'accroissement qu'avec développements limités. Mais les deux méthodes sont envisageables.
Notant $\delta(h) = \dfrac{1}{h}\left[B\left(f(a+h), g(a+h)\right) - B\left(f(a), g(a)\right)\right]$
on a

$$\delta(h) = \frac{1}{h}\Big[B\left(f(a+h), g(a+h)\right) - B\left(f(a+h), g(a)\right) \\ + B\left(f(a+h), g(a)\right) - B\left(f(a), g(a)\right)\Big]$$

d'où, par bilinéarité :

$$\delta(h) = B\left(f(a+h), \frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right) + B\left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)), g(a)\right)$$

Il n'y a plus qu'à se souvenir de la continuité de B le résultat en découle.

Proposition

On reprend les notations de la proposition précédente. Si f et g sont de classe C^1 sur I, $B(f,g)$ l'est.

Cas particulier Cette dernière proposition contient la règle sur la dérivation d'un produit de fonctions : si f, g sont à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, si f et g sont dérivables en a, fg l'est et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Quelques exemples d'applications

Remarquons préalablement que tout ce qu'on appelle couramment « produit » est bilinéaire. On peut donc appliquer le résultat précédent dans une assez grande variété de contextes.

a. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications de classe C^1 définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ respectivement. Alors l'application $t \mapsto A(t)B(t)$ est de classe C^1 sur I, et sa dérivée est l'application

$$t \longmapsto$$

b. Soit $t \mapsto A(t)$ une application de classe C^1 définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors l'application $t \mapsto \big(A(t)\big)^2$ est de classe C^1 sur I, et sa dérivée est l'application

$$t \longmapsto$$

c. Soit $t \mapsto \lambda(t)$ et $t \mapsto f(t)$ deux applications de classe C^1 définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ et F respectivement. Alors l'application $t \mapsto \lambda(t) f(t)$ est de classe C^1 sur I, et sa dérivée est l'application

$$t \longmapsto$$

d. Soit F un espace euclidien, le produit scalaire sur F étant noté $(.|.)$. Soit $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t)$ deux applications de classe C^1 définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans F. Alors l'application $t \mapsto \big(f(t)|g(t)\big)$ est de classe C^1 sur I, et sa dérivée est l'application

$$t \longmapsto$$

L'application $t \mapsto \big(f(t)|f(t)\big) = ||f(t)||^2$ est de classe C^1 sur I, et sa dérivée est

$$t \longmapsto$$

En particulier, on retrouve un résultat « évident » de cinématique : si $f(t)$ est, pour tout t, un vecteur unitaire ($\forall t \in I \quad \|f(t)\| = 1$), $f'(t)$ est en tout point orthogonal à ......

Question Soit B une base d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose $\dim(E) = n$, et on considère des applications $t \longmapsto x_k(t)$ $(1 \leq k \leq n)$ dérivables sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans E. Conjecturer une formule pour la dérivée de

$$t \longmapsto \det_B\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)$$

III.3 Dérivation d'une fonction composée

Proposition

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "g \circ \phi"'] & J \arrow[r, "g"] & F \end{tikzcd}$$

On considère deux intervalles I et J de $\mathbf{R}$.

Soit $\phi : I \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur I et à valeurs réelles.

Soit $g : J \longrightarrow F$ définie sur J et à valeurs dans un evn de dimension finie F.

On suppose $\phi(I) \subset J$ (pour que $g \circ \phi$ soit bien définie).

Soit $a \in I$. Si ϕ est dérivable en a, et si g est dérivable en $\phi(a)$, alors $g \circ \phi$ est dérivable en a et

$$(g \circ \phi)'(a) = \phi'(a) g'(\phi(a))$$

Il est souhaitable de faire attention à l'ordre des facteurs, indifférent pour des fonctions réelles d'une variable réelle, mais pas si g est vraiment à valeurs vectorielles. Il faut bien écrire $\underbrace{\phi'(a)}_{\in \mathbf{R}}\ \underbrace{g'\left(\phi(a)\right)}_{\in F}$, le scalaire avant le vecteur.

Démonstration On peut être tenté d'écrire

$$\frac{1}{x-a}\left(g\left(\phi(x)\right) - g\left(\phi(a)\right)\right) = \frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a} \frac{1}{\phi(x)-\phi(a)}\left(g\left(\phi(x)\right) - g\left(\phi(a)\right)\right)$$

mais ce n'est pas vraiment satisfaisant (pourquoi ?). On écrira donc des développements limités...

Au voisinage de 0 (dans $\mathbf{R}$),

$$\phi(a+h) = \phi(a) + h\phi'(a) + h\alpha(h)$$

où α est une fonction qui vérifie $\lim_{h\to 0}(\alpha(h)) = 0$.
Au voisinage de 0 (dans **R** aussi),

$$g\big(\phi(a)+k\big) = g\big(\phi(a)\big) + kg'\big(\phi(a)\big) + k\beta(k) \tag{1}$$

où β est une fonction qui vérifie $\lim_{k\to 0}(\beta(k)) = 0_F$.
Il est légitime, dans (1), de substituer à k l'expression $h\phi'(a) + h\alpha(h)$; en effet, $h\phi'(a) + h\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. On obtient

$$g\big(\phi(a+h)\big) = g\big(\phi(a)\big) + h\phi'(a)g'\big(\phi(a)\big) + \eta(h)$$

avec $\eta(h) = h\alpha(h)g'\big(\phi(a)\big) + \big(h\phi'(a) + h\alpha(h)\big)\beta\big(h\phi'(a) + h\alpha(h)\big)$. On voit que $\eta(h) = h\xi(h)$, où $\xi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0_F$, ce qui montre que $\eta(h) = \mathrm{o}_{h\to 0}(h)$. Et donc que $g\circ\phi$ est dérivable en a, de dérivée $\phi'(a)g'\big(\phi(a)\big)$. Ceci est vrai pour tout a, on en déduit que $g\circ\phi$ est dérivable sur I, de dérivée ce qu'on voulait.

Proposition

On reprend les notations de la proposition précédente, on suppose de plus que g et ϕ sont de classe C^1. Alors $g\circ\phi$ l'est.

III.4 Remarque

Il y a des opérations qui n'ont pas de sens dans un espace vectoriel : on ne peut pas parler de la dérivée d'un quotient, parce qu'il n'y a pas de quotient de vecteurs.

III.5 Caractérisation par les fonctions composantes

a. Le résultat

Proposition

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de F. Pour tout élément x de I, on note $f_i(x)$ la

i-ème composante de $f(x)$ sur cette base. Ainsi,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Alors f est dérivable en a si et seulement si chaque f_i l'est, et lorsque c'est le cas

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

Autrement dit, les composantes de la dérivée de f en a sont les dérivées en a des composantes de f.

Proposition Avec les notations précédentes, f est de classe C^1 sur I si et seulement si chaque f_i $(1 \leq i \leq n)$ l'est.

Démonstration Les « applications composantes » π_k définies par

$$\pi_k\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = x_k$$

sont linéaires sur l'espace vectoriel de dimension finie F. Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$f_i = \pi_i \circ f$$

Donc d'après le résultat sur l'image par une application linéaire, si f est dérivable en a, chaque f_i l'est, et $f_i'(a) = \pi_i\big(f'(a)\big)$, ce qui montre que

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

Supposons réciproquement chaque f_i dérivable en a. L'application

$$\lambda \longmapsto \lambda e_i$$

est linéaire (de $\mathbf{K}$ dans F), donc, encore d'après le résultat sur l'image par une application linéaire, chaque

$$t \longmapsto f_i(t) e_i$$

est dérivable en a, de dérivée $t \mapsto f_i'(t) e_i$. Comme somme d'applications dérivables en a, f l'est donc, et on a la formule voulue.

Exemple Justifier que l'application

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée.

Cas particulier Si f est à valeurs complexes, elle est de classe C^1 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, et, si c'est le cas :

$$f' = \big(\mathrm{Re}(f)\big)' + i\,\big(\mathrm{Im}(f)\big)' \ .$$

On en déduit que que f est de classe C^1 si et seulement si $\overline{f}$ l'est, et dans ce cas

$$\overline{f}' = \overline{f'} \ .$$

b. Caractérisation des fonctions constantes

Le résultat précédent permet d'étendre aux fonctions à valeurs vectorielles un résultat déjà connu pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes. Par exemple :

Théorème

Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I, à valeurs dans un evn de dimension finie. Alors f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur l'intérieur de I.

Néanmoins, comme on l'a vu avec le théorème de Rolle, les résultats sur la dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes ne s'étendent pas tous aux fonctions à valeurs vectorielles.

IV Fonctions de classe C^k

[Rappel : on considère toujours des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie F.]

IV.1 Définition

Lorsque l'application f' est continue sur I, on dit que f est de classe C^1 sur I.
La définition de la classe C^k et de la dérivée $k$ième se fait par récurrence : la dérivée « première », c'est la dérivée. On dira que f est de classe C^{k+1} sur I lorsque f' est de classe C^k sur I. La dérivée $(k+1)$ième de f est la dérivée $k$ième de f'. Mais c'est aussi la dérivée de la dérivée $k$ième de f.
La dérivée $k$ième de f se note $f^{(k)}$ ou $\mathrm{D}^k f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsqu'elle est de classe C^k sur I pour tout entier naturel k, ce qui signifie que f est indéfiniment dérivable sur I.

IV.2 Opérations sur les applications de classe C^k

On reprend les opérations sur les dérivées, on rajoute les résultats sur la continuité, on obtient facilement des résultats sur la classe C^k par récurrence sur k.

Proposition 1 : Si f et g sont de classe C^k sur I, si λ est un élément de $\mathbf{K}$, $f+\lambda g$ est de classe C^k sur I, et $(f+\lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$.

$\mathscr{C}^k(I,F)$, ensemble des applications de classe C^k sur I à valeurs dans F, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (k entier naturel ou $+\infty$).

Proposition 2 : Si f et g sont de classe C^k sur I, à valeurs dans E et F respectivement, si B est bilinéaire de $E \times F$ dans G, alors
$t \longmapsto B\big(f(t), g(t)\big)$ est de classe C^k sur I, et

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\Big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\Big)$$

(formule de Leibniz). $\mathscr{C}^k(I,\mathbf{K})$, ensemble des applications de classe C^k sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, est donc une $\mathbf{K}$-algèbre.

Démonstration La formule de Leibniz se montre par récurrence, en utilisant la relation « du triangle de Pascal »

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

exactement comme pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Proposition 3 : Si f est une application de classe C^k sur I, à valeurs dans F, si ϕ est une application de classe C^k sur J, à valeurs dans I (J est un intervalle de **R**, comme I), alors $f\circ\phi$ est de classe C^k sur J. De plus, $(f\circ\phi)'(t)=\phi'(t)f'\big(\phi(t)\big)$.

Démonstration Là aussi, même preuve que pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.

IV.3 Caractérisation par les fonctions composantes

Proposition

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de F. Pour tout élément x de I, on note $f_i(x)$ la i-ème composante de $f(x)$ sur cette base. Ainsi,

$$\forall x\in I \qquad f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$$

Alors f est de classe C^k sur I si et seulement si chaque f_i l'est, et lorsque c'est le cas

$$f'(a)=\sum_{i=1}^{n} f_i'(a)e_i$$

V Limite de la dérivée, classe C^k par prolongement

Théorème

Si f est continue sur un intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ ($a \in I$) et si f' a une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$ (donc f' est continue en a).

Théorème

Si f est de classe C^k sur $I \setminus \{a\}$ ($k \geq 1$), si chaque $f^{(j)}$ ($0 \leq j \leq k$) a une limite en a, alors f se prolonge à I en une fonction de classe C^k.

Table des matières