Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Calculer, en fonction de g_X (fonction génératrice de X) :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X\leq n)t^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X<n)t^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X\geq n)t^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X>n+2)t^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=2n)t^n$

Les quatre premières sont définies sur $]-1,1[$, la dernière au moins sur $[-1,1]$. Notons $h(t)$ la somme de la première série entière. On peut écrire

$$\mathbf{P}(X\leq n)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(X=j)$$

et ainsi reconnaître un produit de Cauchy :

$$h(t)=\frac{1}{1-t}g_X(t)$$

On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n)t^n&=\mathbf{P}(X=0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathbf{P}(X\leq n)-\mathbf{P}(X\leq n-1)\right]t^n\\&=\mathbf{P}(X=0)+(h(t)-\mathbf{P}(X=0))-th(t)\end{aligned}$$

La seconde (on peut faire démarrer la somme à $n=1$) est $th(t)$.
La troisième peut se calculer directement ou s'obtenir comme $\dfrac{1}{1-t}-th(t)$.
La quatrième est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=n+3}^{+\infty}\mathbf{P}(X=i)t^n\right)$ et on peut intervertir par sommabilité, on trouve $\displaystyle\sum_{i=3}^{+\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{i-3}t^n\right)\mathbf{P}(X=i)\right]$. Et la somme est donc $\dfrac{1}{1-t}\left(1-\dfrac{1}{t^2}(g_X(t)-\mathbf{P}(X=0))\right)$. Pour la dernière, on peut ajouter

$$\frac{1}{2}\left(g_X(t)+g_X(-t)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=2n)t^{2n}$$

Pour $t>0$, on replace ci-dessus t par $\sqrt{t}$. Si $t<0$ c'est plus embêtant. Mais, si $t<0$, $t=-(\sqrt{-t})^2$, on cherche alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathbf{P}(X=2n)(\sqrt{-t})^{2n}$$

Or la partie réelle de $g_X(it)$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=2n)(-1)^nt^{2n}$$

[Convergence en loi et séries génératrices]

On ne considère dans ce problème que des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbf{N}$. Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, on dira que la suite (X_n) converge en loi vers X lorsque, pour tout entier naturel k,

$$\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X = k)$$

1. Soit $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$ une famille de réels telle que

$$\forall (k,n) \in \mathbf{N}^2 \qquad |a_{k,n}| \leq M \tag{1}$$

où M est un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la série entière $\displaystyle\sum_k a_{k,n}x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

La suite $(a_{k,n}1^k)$ est bornée, ce qui implique le résultat.

---

2. On suppose encore que $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$ vérifie (1), et que, de plus, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $(a_{k,n})_{n\geq 0}$ converge vers une limite ℓ_k.

Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_k \ell_k x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k x^k$$

Par conservation des inégalités larges à la limite, $|\ell_k| \leq M$ pour tout k, ce qui implique bien que le rayon de convergence est ≥ 1. Fixons $x \in]-1,1[$. Si $q \in \mathbf{N}_*$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k x^k\right| &\leq \sum_{k=0}^{q} |a_{k,n} - \ell_k|\,|x|^k + 2M \sum_{k=q+1}^{+\infty} |x|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{q} |a_{k,n} - \ell_k|\,|x|^k + \frac{2M|x|^{q+1}}{1-|x|}\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Fixons q tel que

$$\frac{2M|x|^{q+1}}{1-|x|} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{q} |a_{k,n} - \ell_k| \, |x|^k\right)_{n\geq 0}$, combinaison linéaire de suites qui convergent vers 0, converge vers 0, donc il existe un rang n_0 tel que

$$(n \geq n_0) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{q} |a_{k,n} - \ell_k| \, |x|^k \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et donc

$$(n \geq n_0) \Longrightarrow \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k x^k\right| \leq \epsilon$$

---

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on note G_{X_n} la fonction génératrice de X_n. Montrer que, si la suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X, alors la suite (G_{X_n}) converge simplement vers G_X sur $]-1,1[$.

Il suffit d'appliquer ce qui précède en prenant

$$a_{k,n} = \mathbf{P}(X_n = k)$$

On a bien (1) avec $M = 1$. Et $\ell_k = \mathbf{P}(X = k)$.

---

4. On considère encore dans cette question $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$ une famille de réels vérifiant (1). On note, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-1,1[$,

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} x^k$$

On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée et telle que, notant

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \quad ,$$

la suite (h_n) converge simplement vers h sur $]0,1[$. Montrer qu'alors

$$a_{0,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b_0$$

Démarche naturelle : faire apparaître ce que l'on veut voir tendre vers 0 *à l'aide de ce qu'on sait tendre vers* 0.

Pour simplifier les écritures, on peut supposer

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad |b_k| \leq M$$

(quitte à remplacer M par un réel plus grand).

On a, pour tout $x \in]0,1[$,

$$h(x) - h_n(x) = a_{0,n} - b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_{k,n})\, x^k$$

d'où

$$\begin{aligned} |a_{0,n} - b_0| &\leq |h(x) - h_n(x)| + \left| \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_{k,n})\, x^k \right| \\ &\leq |h(x) - h_n(x)| + 2M \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \\ &= |h(x) - h_n(x)| + 2M \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. On fixe $x_0 \in]0,1[$ tel que

$$2M \frac{x_0}{1-x_0} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Il existe alors un rang n_0 tel que

$$(n \geq n_0) \Rightarrow |h(x_0) - h_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et alors

$$(n \geq n_0) \Rightarrow (|a_{0,n} - b_0| \leq \epsilon)$$

ce qui conclut.

---

5. Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, montrer que (X_n) converge en loi vers X si et seulement si la suite (G_{X_n}) converge simplement vers G_X sur $]0,1[$.

Un sens a déjà été fait, reste la réciproque. On suppose que, pour tout t dans $]0,1[$,

$$G_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G_X(t)$$

On applique alors la question précédente (les hypothèses en sont facilement vérifiées avec $M = 1$), on obtient

$$\mathbf{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbf{P}(X = 0)$$

Mais alors la suite de fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{G_{X_n}(t) - \mathbf{P}(X_n = 0)}{t} \right)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \dfrac{G_X(t) - \mathbf{P}(X = 0)}{t}$ sur $]0,1[$, et la question précédente s'applique de nouveau pour conclure que

$$\mathbf{P}(X_n = 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbf{P}(X = 1)$$

et on conclut par une récurrence à hypothèse forte : si, pour tout $k \in \{0, \ldots, q\}$, on a

$$\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X = k)$$

alors on peut dire que la suite de fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{G_{X_n}(t) - \sum_{k=0}^{q} \mathbf{P}(X_n = k)t^k}{t^{q+1}}\right)_{n\geq 0}$ converge vers la fonction $t \mapsto \dfrac{G_X(t) - \sum_{k=0}^{q} \mathbf{P}(X = k)t^k}{t^{q+1}}$ ce qui permet d'appliquer ne nouveau la question précédente pour obtenir

$$\mathbf{P}(X_n = q+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X = q+1)$$

et de conclure la récurrence.

---

6. Montrer que, si chaque variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$, la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

Application de ce qui précède.

---

7. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la suite (G_{X_n}) converge simplement sur $]0, 1[$ vers une fonction qui n'est pas la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

On peut par exemple considérer X_n qui suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$. La fonction génératrice en est

$$g_n \ : \ t \mapsto \frac{1}{n+1}\frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

La suite g_n converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle, qui n'est pas une fonction génératrice.

[Somme aléatoire de variables aléatoires, identités de Wald]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}_*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et N une variable aléatoire sur le même espace, indépendante des X_i (i.e. la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $X_0 = N$, est une suite de variables aléatoires indépendantes). On suppose que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Et on pose

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_{N(\omega)} = X_1(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

1. Exprimer la fonction génératrice de S_N à l'aide des fonctions génératrices de X_1 et de N (on rappelle que toutes les X_i ont même loi, donc même fonction génératrice).

Soit z tel que $|z| \leq 1$. On peut supposer z réel ou z complexe, cela ne change rien au calcul. Notons G_S la fonction génératrice cherchée :

$$G_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_N = n) z^n$$

(la somme commence à $n = 1$ parce que l'énoncé précise que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$, mais on pourrait faire commencer la somme à $n = 0$ sans inconvénient). La formule des probabilités totales permet d'écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_N = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_N = n, N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n, N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)
\end{aligned}$$

En effet, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ et N sont indépendantes, pour tout $k \geq 1$. Donc

$$G_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k) z^n \right)$$

Mais, si l'on pose $u_{n,k} = \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k) z^n$, la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}_*^2}$ est sommable ; on peut en effet écrire, pour tout (n, k), $|u_{n,k}| \leq v_{n,k}$ où

$$v_{n,k} = \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)$$

Or, pour tout n, par formule des probabilités totales, $\sum_k v_{n,k}$ converge, et

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} = \mathbf{P}(S_N = n)$$

donc $\sum_n \sigma_n$ converge. Il en résulte la sommabilité de la famille $(v_{n,k})$, et par suite celle de la famille $(u_{n,k})$.
On peut donc intervertir les sommations :

$$\begin{aligned} G_S(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k) z^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n) z^n \right) \end{aligned}$$

Or le cours affirme, par indépendance des X_i, que, si $|z| \leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n) z^n = (G_X(z))^k$$

où G_X désigne la fonction génératrice de chaque variable aléatoire X_i. Finalement,

$$\begin{aligned} G_S(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n) z^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) (G_X(z))^k \\ &= G_N (G_X(z)) \end{aligned}$$

où l'on note G_N la fonction génératrice de N. On notera que $|G_X(z)| \leq 1$, ce qui autorise l'écriture $G_N (G_X(z))$. Mais de toute manière, la sommabilité montrée précédemment justifie l'existence de toutes les sommes écrites.

---

2. En déduire que, si les X_i et N sont d'espérances finies, S_N l'est, et calculer $\mathbf{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{E}(N)$.

Si les X_i et N sont d'espérances finies, G_N et G_X, que l'on considère ici comme fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, sont dérivables en 1. Donc G_S l'est (autre rédaction : G_X et G_N sont C^1 sur $[0, 1]$, donc G_S l'est), et

$$G_S'(1) = G_X'(1) G_N' (G_X(1)) = \mathbf{E}(X)\ G_N'(1) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N)$$

---

3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.

On passe par la formule des probabilités totales et par une sommabilité.

---

4. On suppose que N et X_1 ont des moments d'ordre 2. Montrer

$$\mathbf{E}\big((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\big) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)$$

et

$$\mathbf{V}(S_N) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{V}(N)$$

Ici, G_N et G_X sont de classe C^2 sur $[0,1]$. Par composition ($[0,1]$ est stable par n'importe quelle fonction génératrice), G_S l'est, et

$$\forall t \in [0,1] \qquad G_S''(t) = G_X''(t)G_N'\left(G_X(t)\right) + \left(G_X'(t)\right)^2 G_N''\left(G_X(t)\right)$$

Toutes les variables aléatoires, S_N, X, N ont des moments d'ordre 2, et donc les produits de deux de ces variables aléatoires admettent des moments d'ordre 1. Donc $\mathbf{E}(NS_N) < +\infty$, et d'autre part, par transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\right) &= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*} \left(p - q\mathbf{E}(X)\right)^2 \mathbf{P}(S_N = p, N = q) \\
&= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*} \left(p - q\mathbf{E}(X)\right)^2 \mathbf{P}(S_q = p, N = q) \\
&= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*} \left(p - q\mathbf{E}(X)\right)^2 \mathbf{P}(S_q = p)\mathbf{P}(N = q) \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = q) \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \left(p - \mathbf{E}(S_q)\right)^2 \mathbf{P}(S_q = p)\right) \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = q)\mathbf{V}(S_q) \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty} q\mathbf{V}(X)\mathbf{P}(N = q) \\
&= \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)
\end{aligned}$$

On a utilisé diverses choses : indépendance, sommabilité, transfert...
Pour l'autre formule :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(S_N) &= G_S''(1) + G_S'(1)(1 - G_S'(1) \\
&= G_X''(1)G_N'(1) + (G_X'(1))^2 G_N''(1) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)(1 - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)) \\
&= (\mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)(\mathbf{E}(X) - 1))\mathbf{E}(N) + \cdots \\
&\cdots (\mathbf{E}(X))^2((\mathbf{V}(N) + \mathbf{E}(N)(\mathbf{E}(N) - 1)) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)(1 - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)) \\
&= \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + (\mathbf{E}(X))^2\mathbf{V}(N)
\end{aligned}$$

[Loi trinomiale] Soit p, q, r trois réels strictement positifs tels que $p+q+r = 1$. Soit, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = (U_n, V_n)$ de loi définie par :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2 \quad 0 \leq k+\ell \leq n \Longrightarrow \mathbf{P}\left(Y_n = (k,\ell)\right) = \frac{n!}{k!\ \ell!\ \ (n-(k+\ell))!} p^k q^\ell r^{n-(k+\ell)}$$

On définit enfin $Y_0 = (0,0)$. **1.** Déterminer les lois de U_n et V_n.

U_n suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$, V_n suit une loi $\mathcal{B}(n,q)$.

---

2. U_n et V_n sont-elles indépendantes ?

Non ; $\mathbf{P}(U_n = n, V_n = n) = 0$ alors que $\mathbf{P}(U_n = n) \neq 0$ et $\mathbf{P}(V_n = n) \neq 0$. Ou encore $\mathbf{P}(U_n = 0, V_n = 0) \neq \mathbf{P}(U_n = 0)\ \mathbf{P}(V_n = 0)$. Notons cependant que si $n = 0$, U_0 et V_0 sont constantes, donc indépendantes.

---

3. Calculer $\mathbf{E}(U_n V_n)$.

On part de

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(U_n V_n) &= \sum_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2} k\ell \mathbf{P}(U_n = k, V_n = \ell) \\
&= \sum_{k+\ell=n} k\ell \mathbf{P}(U_n = k, V_n = \ell)
\end{aligned}$$

et on arrive après calculs à

$$\mathbf{E}(U_n V_n) = n(n-1)pq$$

---

4. Calculer $\mathrm{Cov}(U_n, V_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U_n V_n) &= \mathbf{E}(U_n V_n) - \mathbf{E}(U_n)\mathbf{E}(V_n) \\
&= n(n-1)pq - (np)(nq) \\
&= -npq
\end{aligned}$$

---

5. Calculer $\mathbf{V}(U_n + V_n)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(U_n + V_n) &= \mathbf{V}(U_n) + \mathbf{V}(V_n) + 2\mathrm{Cov}(U_n V_n) \\
&= np(1-p) + nq(1-q) - 2npq \\
&= n[p - p^2 + q - q^2 - 2pq] \\
&= n[1 - r - (1-r)^2] \\
&= n[-r + 2r - r^2] \\
&= nr(1-r)
\end{aligned}
$$

On suppose dorénavant la famille de variables aléatoires $((Y_n)_{n\in\mathbf{N}}, N)$ indépendantes. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{N}$. Et on définit, pour $\omega \in \Omega$,

$$
U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega) \qquad , \qquad V(\omega) = V_{N(\omega)}(\omega)
$$

(toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$). On pose enfin $Y = (U, V)$.

6. On suppose que N suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$, i.e.

$$
\forall n \in \mathbf{N} \qquad \mathbf{P}(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}
$$

Calculer la loi de Y, en déduire que U et V sont indépendantes et calculer leur loi.

Y est à valeurs dans $\mathbf{N}^2$. Par formule des probabilités totales, si $(k,\ell)\in\mathbf{N}^2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=(k,\ell)) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n,U=k,V=\ell)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n,U_n=k,V_n=\ell)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n,Y_n=(k,\ell))\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(Y_n=(k,\ell)) \qquad \text{(Indépendance)}\\
&= \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!\ \ell!\ (n-(k+\ell))!}p^k q^\ell r^{n-(k+\ell)}\\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k q^\ell}{k!\ell!}\sum_{n=k+\ell}^{+\infty}\lambda^n\frac{1}{(n-(k+\ell))!}r^{n-(k+\ell)}\\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k q^\ell}{k!\ell!}\lambda^{k+\ell}e^{\lambda r}\\
&= e^{-\lambda(p+q)}\frac{p^k q^\ell}{k!\ell!}\lambda^{k+\ell}
\end{aligned}$$

D'où la première loi marginale : pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U=k) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbf{P}(U=k,V=\ell)\\
&= e^{-\lambda(p+q)}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{q^\ell}{\ell!}\lambda^\ell\\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

de même $\mathbf{P}(V=\ell)=e^{-\lambda q}\dfrac{(\lambda q)^\ell}{\ell!}$ et on constate bien que

$$\mathbf{P}(U=k,V=\ell)=\mathbf{P}(U=k)\ \mathbf{P}(V=\ell)$$

U et V sont donc des v.a. indépendantes qui suivent des lois de Poisson respectivement $\mathcal{P}(\lambda p)$ et $\mathcal{P}(\lambda q)$.

---

7. On suppose que N suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On définit la fonction génératrice de Y par :

$$\forall(\xi,\eta)\in[0,1]^2 \qquad g_Y(\xi,\eta)=\mathbf{E}(\xi^U\eta^V)$$

Calculer g_Y, en déduire les fonctions génératrices de U et V. Retrouver les lois de U et V, montrer qu'elles sont indépendantes.

On commence par écrire :

$$g_Y(\xi,\eta)=\sum_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2}\mathbf{P}(Y=(k,\ell))\xi^k\eta^\ell$$

d'où, toujours avec les probabilités totales :

$$\begin{aligned}g_Y(\xi,\eta)&=\sum_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n,Y=(k,\ell))\xi^k\eta^\ell\right)\\&=\sum_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(Y_n=(k,\ell))\xi^k\eta^\ell\right)\end{aligned}$$

La famille $\left(\mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}(Y_n=(k,\ell))\xi^k\eta^\ell\right)_{(k,\ell,n)\in\mathbf{N}^3}$ est donc sommable (on aurait pu dire depuis le début que $\xi^U\eta^V$ est une variable aléatoire bornée par 0 et 1, donc d'espérance finie), on peut intervertir les sommations (ce qui revient à faire d'autres paquets dans $\mathbf{N}^3$) :

$$g_Y(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n)\left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2}\mathbf{P}(Y_n=(k,\ell))\xi^k\eta^\ell\right)$$

Mais, pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2}\mathbf{P}(Y_n=(k,\ell))\xi^k\eta^\ell&=\sum_{k+\ell\leq n}\frac{n!}{k!\ \ell!\ (n-(k+\ell))!}p^kq^\ell r^{n-(k+\ell)}\xi^k\eta^\ell\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!}(p\xi)^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{1}{\ell!\ (n-k-\ell))!}q^\ell r^{n-k-\ell}\eta^\ell\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(p\xi)^k(q\eta+r)^{n-k}\\&=(p\xi+q\eta+r)^n\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}g_Y(\xi,\eta)&=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}(p\xi+q\eta+r)^n\\&=e^{\lambda(p\xi+q\eta+r-1)}\end{aligned}$$

Or $g_Y(\xi,1)=g_U(\xi)$, on trouve donc la fonction génératrice de U :

$$g_U(\xi)=e^{\lambda(p\xi-p)}=e^{\lambda p(\xi-1)}$$

On retrouve la loi de U. De même la loi de V, par $g_Y(1,\eta) = g_V(\eta)$. Or on voit que

$$g_Y(\xi,\eta) = g_U(\xi)g_V(\eta)$$

c'est-à-dire

$$\forall(\xi,\eta)\in[0,1]^2 \qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbf{P}(Y=(k,l)\eta^\ell\right)\xi^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbf{P}(U=k)\mathbf{P}(V=\ell)\eta^\ell\right)\xi^k$$

ce qui, en appliquant deux fois l'uncité du développement en série entière, donne le résultat.

---

8. On ne fait plus d'hypothèse sur la loi de N, mais on suppose U et V indépendantes. Montrer que N suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

Le calcul de la question **7.** donne

$$g_Y(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n)(p\xi+q\eta+r)^n = g_N(p\xi+q\eta+r)$$

Mais, si U et V sont indépendantes, on a aussi

$$g_Y(\xi,\eta) = \mathbf{E}(\xi^U)\mathbf{E}(\eta^V) = g_U(\xi)g_V(\eta)$$

Avec $\eta = 1$, on obtient $g_U(\xi) = g_N(p\xi+1-p)$; de même avec $\eta = 1$, et donc

$$g_N(p\xi+q\eta+r) = g_N(p\xi+1-p)\ g_N(q\eta+1-q)$$

pour tous (ξ,η) dans $[0,1]$. Ou encore, si $h_N(x) = g_N(x+1)$,

$$h_N(p(\xi-1)+q(\eta-1)) = h_N(p(\xi-1))\ h_N(q(\eta-1))$$

Ou encore, si $(x,y)\in[-1,0]^2$,

$$h_N(px+qy) = h_N(px)h_N(qy)$$

On peut dériver par rapport à x :

$$ph'_N(px+qy) = ph'_N(px)h_N(qy)$$

avec $x = 0$, on obtient

$$h'_N(qy) = \alpha h_N(qy)$$

ce qui permet de retrouver que h_N est du type $x\mapsto e^{\alpha x}$ (elle vaut 1 en 0), et d'identifier dans g_N une fonction génératrice de loi de Poisson.