X 2000 corrigé

1.a) Supposons $\forall k \geq 1 \qquad |u_k| \leq M^k$, avec $M > 0$. Si $0 \leq \rho \leq 1/M$, la suite $(u_k \rho^k)$ est bornée. Et donc $\rho \leq r(u)$. On en déduit que $r(u) \geq 1/M > 0$.
Si réciproquement $u \in E_+$, soit $\rho \in]0, r(u)[$ (légitime car $r(u) > 0$). Alors la suite $(u_k \rho^k)$ est bornée ; il existe $A > 0$ tel que

$$\forall k \geq 1 \qquad \rho^k u_k \leq A$$

Si $0 < r < 1$,

$$\forall k \geq 1 \qquad (r\rho)^k u_k \leq A r^k \leq A r$$

Choisissons $r = 1/A$, alors, si $M = \dfrac{1}{r\rho}$, on a $|u_k| \leq M^k$ pour tout $k \geq 1$.

1.b) On a $\forall k \geq 1 \qquad |u_k| \left(\dfrac{1}{M}\right)^k \geq 1$. Donc $1/M \geq r(u)$ (sinon la série $\sum \dfrac{u_k}{M^k}$ convergerait, or elle diverge grossièrement).

2. *Des idées. . .se ramener à une somme de Riemann ? pas évident. Majorer par le nombre de termes multiplié par le plus grand des termes ? pas suffisant. . .Décomposer la fraction en éléments simples ? allons-y, on verra. . .*
On va écrire :

$$\frac{1}{i^2(k-i)^2} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i^2} + \frac{c}{k-i} + \frac{d}{(k-i)^2}$$

avec, du fait de l'invariance par la transformation $i \mapsto k - i$, $a = c$ et $b = d$. Multipliant par i^2 et évaluant en 0 (quelle horreur, il faudrait remplacer i par X pour donner à ces écritures une allure rigoureuse), $b = d = 1/k^2$. Evaluant en $k/2$ (encore une rédaction inacceptable) on obtient

$$\frac{16}{k^4} = \frac{4a}{k} + \frac{8}{k^4}$$

et donc $a = 2/k^3$. Notant $S(k)$ la somme proposée :

$$S(k) = \frac{4}{k^3} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} \leq \frac{4}{k^2} + \frac{2\zeta(2)}{k^2}$$

Donc $\gamma = 2\zeta(2) + 4$ convient.

3. Si $a \notin \mathbf{Z}_-^*$, $A_a \in GL(E)$, en effet l'endomorphisme B_a de E défini par

$$\forall k \geq 1 \qquad (B_a u)_k = \frac{u_k}{k+a}$$

vérifie facilement $B_a \circ A_a = A_a \circ B_a = \mathrm{Id}_E$. Donc dans ce cas $\mathrm{Ker}(A_a) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(A_a) = E$.
Si $a = -n_0$, où $n_0 \in \mathbf{N}_*$,

$$A_a u = 0 \iff \forall k \neq n_0 \quad u_k = 0$$

donc $\mathrm{Ker}(A_a) = \mathrm{Vect}(e_{n_0})$. De même,

$$\boxed{\mathrm{Im}(A_a) = \{u \ ; \ u_{n_0} = 0\}}$$

Attention à ne pas écrire $\mathrm{Im}(A_a) = \mathrm{Vect}(e_n \ ; \ n \neq n_0)$, *qui est faux.*
4. Soit $u \in E_R$. Si $|x| < R$, soit $\rho \in]|x|, R[$. On écrit, pour tout $k \geq 1$,

$$\left|(A_a u)_k x^k\right| = |u_k|\rho^k \times (k+a)\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^k = \mathrm{o}\left(|u_k|\rho^k\right)$$

par croissances comparées. Donc $\sum \left|(A_a u)_k x^k\right|$ converge par comparaison à une série convergente à termes réels positifs. Et donc $r(A_a u) \geq |x|$. Donc, pour tout $\epsilon \in]0, R[$, $R-\epsilon \leq r(A_a u)$. En prenant la limite quand $\epsilon \to 0$ on obtient $r(A_a u) \geq R$, donc $A_a u \in E_R$.
Donc A_a induit un endomorphisme de E_R. De même (sans qu'il soit besoin de croissance comparée) on vérifie que B_a défini en **3.** induit aussi un endomorphisme de E_R. Ces deux endomorphismes sont réciproques l'un de l'autre, donc
$\boxed{\text{La restriction de } A_a \text{ à } E_R \text{ est un isomorphisme de ce sous-espace sur lui-même}}$.
5.a) on a par sa définition, $v_1 = (1+a)u_1$ d'où $\boxed{u_1 = \dfrac{v_1}{1+a}}$
et, pour tout $k \geq 2$,

$$v_k = (k+a)u_k + c\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}$$

ce qui donne ($k + a \neq 0$) $\boxed{u_k = \dfrac{v_k - c\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}}{k+a}}$
5.b) La relation précédente montre que, si $v \in E$, il y a une unique $u \in E$ telle que $Tu = v$. En effet, les deux relations encadrées dans la question précédente définissent par récurrence une suite u unique, v étant donnée. Et ces deux relations sont la traduction de $Tu = v$. Donc $\boxed{T \text{ est bijective}}$ *Attention, T n'est pas linéaire ! elle n'a donc pas de noyau.*
6.a) Soit $u \in E_+$. Soit $M > 0$ tel que $\forall k \geq 1 \qquad |u_k| \leq M^k$. Alors $|v_1| \leq |1+a|M$ et, si $k \geq 2$,

$$|v_k| \leq M^k \left(|k+a| + |c|(k-1)\right)$$

Si $0 \leq |r| < 1/M$, alors par croissances comparées $v_k r^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc $r(v) \geq r$.
On a donc $r(v) > 0$. Et donc $\boxed{T(E^+) \subset E^+}$
6.b) *Ne pas se laisser noyer dans l'océan des conditions. On commence par traiter*

les plus simples, celles qui ne parlent que d'une des constantes à introduire.
L'application $k \mapsto |k+a|$ atteint un minimum sur $\mathbf{N}_*$. En effet,

$$|k+a| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

(on a $|k+a| \geq k - |a|$, mais c'est quand même assez simple pour ne pas avoir besoin d'être justifié), donc il y a un rang k_0 tel que

$$k \geq k_0 + 1 \implies |k+a| \geq |1+a|$$

Alors $\min(|1+a|, |2+a|, \ldots, |k_0+a|) = \min\{|k+a| \ ; \ k \in \mathbf{N}_*\}$.
Posons $\delta = \min\{|k+a| \ ; \ k \in \mathbf{N}_*\}$. On a bien $\boxed{\delta > 0}$ puisque a n'est pas un entier strictement négatif. Et (1) est vérifié.
On peut alors choisir M_0 tel que (2) soit une égalité.
L'existence de M tel que (3) soit vérifiée est conséquence de la question **1.a)** et du fait que $v \in E^+$. On fixe dorénavant un tel M.
Traitons maintenant (4) et (5). Et commençons par noter que (5)$\Rightarrow$(4) (pour $k = 1$). Notons que par croisssances comparées,

$$\frac{2k^2 M^k}{\delta M_0 (M+1)^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Il y a donc un rang k_0 tel que

$$\forall k \geq k_0 \qquad \frac{2k^2 M^k}{\delta M_0 (M+1)^k} \leq 1$$

Soit alors $M_1 = \max\left\{M+1, \max\left\{\left(\dfrac{2j^2}{\delta M_0}\right)^{1/j} M \ ; \ 1 \leq j \leq k_0 - 1\right\}\right\}$. Alors $M_0 > 0$ et (4) et (5) sont vérifiés.
6.c) Il est naturel de commencer par regarder $k = 1$:

$$\begin{aligned}
|u_1| &= \frac{|v_1|}{|1+a|} && \text{(par } \mathbf{5.a)}\text{)}\\
&\leq \frac{|v_1|}{\delta} && \text{(par } \mathbf{6.b)}\text{(1))}\\
&\leq \frac{M}{\delta} && \text{(par } \mathbf{6.b)}\text{(3))}\\
&\leq M_0 M_1 && \text{(par } \mathbf{6.b)}\text{(4))}
\end{aligned}$$

On peut donc espérer montrer, par récurrence (à hypothèse forte bien sûr) sur k que

$$\forall k \geq 1 \qquad |u_k| \leq \frac{M_0 M_1^k}{k^2}$$

Supposons $k \geq 2$ et

$$\forall i \in [\![1, k-1]\!] \qquad |u_i| \leq \frac{M_0 M_1^i}{i^2}$$

Alors par **5.a)** et inégalité triangulaire,

$$|u_k| \leq \frac{1}{|k+a|}\left(|v_k| + |c|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{M_0M_1^i}{i^2}\frac{M_0M_1^{k-i}}{(k-i)^2}\right)$$

et donc, avec la constante γ de la question **2.** :

$$|u_k| \leq \frac{1}{|k+a|}\left(|v_k| + |c|\frac{\gamma}{k^2}M_0^2M_1^k\right)$$

Utilisons alors (1) et (3) de **6.b.** pour obtenir

$$|u_k| \leq \frac{1}{\delta}\left(M^k + |c|\frac{\gamma}{k^2}M_0^2M_1^k\right)$$

Mais avec (2) de **6.b)**,

$$\frac{1}{\delta}\left(|c|\frac{\gamma}{k^2}M_0^2M_1^k\right) \leq \frac{1}{2k^2}M_0M_1^k$$

ne reste plus qu'à montrer que

$$\frac{1}{\delta}\left(M^k\right) \leq \frac{1}{2k^2}M_0M_1^k$$

qui ressemble énormément à (5) de **6.b)**. L'inégalité est donc récurrente, l'initialisation a été faite, on a

$$\boxed{\forall k \geq 1 \qquad |u_k| \leq \frac{M_0M_1^k}{k^2}}$$

6.d) Et donc $\left(\dfrac{u_k}{M_1^k}\right)_{k\geq 1}$ est bornée, on a donc $r(u) \geq 1/M_1 > 0$. L'unique antécédent par T d'un élément de E^+ est donc dans E^+, ce qui montre bien que T induit une bijection de E^+ sur lui-même.