CENTRALE 2016
MATH 2

I.A.1. Définissons

$$h : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \end{array} \right.$$

Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $h(\cdot,t) : x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$; pour tout $x \in [0,+\infty[$, $h(x,\cdot) : t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ [la continuité par morceaux suffisait, inutile de le dire]. De plus :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[\qquad |h(x,t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$$

Or la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ [...], positive, et vérifie :

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}, \quad \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (comparaison aux intégrales de Riemann). Par théorème de continuité sous le signe $\int$,

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[}$$

Sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, h est deux fois dérivable par rapport à sa première variable.

$\forall (x,t)\in(\mathbb{R}_*^+)^2$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ est, sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$, continue par rapport à chacune de ses variables. Si $0<a<b$,

$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[$ $\quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq (1-\cos t)e^{-at}$

et $t\mapsto(1-\cos t)e^{-at}$ est continue [...] intégrable sur $]0,+\infty[$ (elle est continue sur $[0,+\infty[$, et, par croissances comparées, $(1-\cos t)e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$)

Par théorème de classe C^2 des fonctions $x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$,

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[}$$

I.A.2. [On a le choix : théorème de convergence dominée et caractérisation des limites par les suites, ou extension du théorème de convergence dominée].

On a, pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

La domination vue au début de 1. montre alors, par extension du théorème de convergence dominée, que

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0}$$

Mais également, pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$-\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Or

$$\forall (x,t) \in [1,+\infty[\times]0,+\infty[\qquad \left|-\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\right| \leqslant \frac{1-\cos t}{t}e^{-t}$$

et $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t}e^{-t}$ est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc, par le même théorème,

$$\boxed{f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

[⚠ La domination sur tout segment ne suffirait pas ici, il faut une domination "qui aille jusqu'à $+\infty$". En revanche, on peut s'éloigner de 0, ce qui est une bonne chose car on a besoin d'une exponentielle pour assurer l'intégrabilité de la fonction "dominante"].

I.A.3. Par théorème dont les hypothèses ont été vérifiées dans 1.,

$$\forall x>0 \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}\,dt$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}$.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,dt = \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}$

$$= \frac{1}{x-i} \quad (\text{si } x>0)$$

Et donc, prenant les parties réelles,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{x}{x^2+1}$. Finalement,

$$\boxed{\forall x>0 \quad f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}}$$

Par primitivation, il existe un réel C tel que :

$$\forall x>0 \quad f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Mais $\displaystyle\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc,

avec 2., $C=0$.

$$\boxed{\forall x>0 \quad f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

I.A.4. La fonction $g : x \mapsto x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2}$ a pour dérivée :

$$x \mapsto 1 + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

c'est-à-dire f' (on a oublié de dire que g était C^1 sur $]0,+\infty[$). Qui plus est,

$$\begin{aligned} x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) &= \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\times x \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$, on en déduit que g a, comme f, une limite nulle en $+\infty$, et donc $g = f$:

$$\boxed{\forall x>0 \quad f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{\pi}{2}}$$

[On aurait pu y arriver seuls en primitivant par parties $x \mapsto 1 \times \ln(1+x^2)$].

Mais, par croissances comparées, $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2}$; comme f est continue en 0, on a bien $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{2}}$

I.A.5. Donc,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$$

Supposons $s>0$, faisons le changement de variable : $t = su$.

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{s^2u^2}\, s\, du$$

ou :

$$s = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du$$

Par parité du second membre (par rapport à s), on obtient, si $s<0$, $-s = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du$. Le résultat est facile pour $s=0$. Donc :

$$\boxed{\forall s\in\mathbb{R} \quad |s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt}$$

I.B.1. La fonction $\varphi_n : t \mapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue <u>positive</u> sur $]0,+\infty[$. De $\varphi_n(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ on déduit l'intégrabilité de φ_n sur $[1,+\infty[$. Qui plus est,

$$\frac{1-(\cos t)^n}{t^2} = \frac{1-\cos t}{t^2} \times \left(1 + (\cos t) + \dots + (\cos t)^{n-1}\right)$$

montrer que $\varphi_n(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{n}{2}$. Donc φ_n est intégrable sur $]0,1]$, et :

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bien définie}}$$

[On pourrait aussi faire un D.L. à l'ordre 2 de $(\cos t)^n$].

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in]0,+\infty[\qquad (\cos^2 t)^{n+1} \leq (\cos^2 t)^n$$

(car $\forall t \in]0,+\infty[\quad \cos^2 t \in [0,1]$).

Donc : $\forall t \in]0,+\infty[\quad \dfrac{1-(\cos^2 t)^n}{t^2} \leq \dfrac{1-(\cos^2 t)^{n+1}}{t^2}$

En intégrant, ou plutôt "par positivité de l'intégrale" :

$$\boxed{u_{2n} \leq u_{2(n+1)} : \text{la suite } (u_{2n}) \text{ croît.}}$$

I.B.2. A.S avec $s=1$ donne $\boxed{u_1 = \frac{\pi}{2}}$.

Avec $s=2$: $2 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(2t)}{t^2}\,dt$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2 t}{t^2}\,dt$$

Mais $u_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$. Donc : $\boxed{u_2 = \frac{\pi}{2}}$

I.C.1. Un changement de variable $t=\sqrt{\frac{2u}{n}}$ s'impose. Le programme permet de le faire sans plus de justification. Mais les auteurs du rapport ont semble-t-il un programme moins détaillé. Précisons donc que $u \mapsto \sqrt{\frac{2u}{n}}$ est une bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Ce qui légitime le changement de variable. Donc:

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2u}{n}}}\, du$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\, du$$

Ce qui est bien:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n, \quad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\, du}$$

I.C.2. Accroissements finis?

$\varphi_n : u \mapsto \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n$ est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \varphi_n'(u) = n \times \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2u}{n}}} \left(-\sin\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)$$

Donc :

$$\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad |\Psi_n'(u)| = \left|\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right|^{n-1} \times \frac{\left|\sin\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right|}{\sqrt{\frac{2u}{n}}}.$$

Mais, si $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$

(car $\sin' = \cos$, donc $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x - \sin 0| \leq 1 \times |x - 0|\ ).$$

On a ainsi : $|\Psi_n'| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$.

Et Ψ_n est C^1 sur $]0,u[$, C^0 sur $[0,u]$ si $u \in]0,1]$, donc l'inégalité des accroissements finis permet bien d'affirmer :

$$\boxed{\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1] \quad \left|1 - \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| \leq u}$$

I.C.3. Remarquons donc que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall u \in]0,+\infty[\quad \left|\frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\right| \leq \varphi(u)$$

où $\varphi : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0,1] \\ \dfrac{2}{u\sqrt{u}} & \text{si } u \in]1,+\infty[\end{cases}$

est continue par morceaux intégrable (comparaison aux intégrales de Riemann) sur $]0,+\infty[$. On a donc la domination.

Fixons $u>0$. À partir d'un certain rang, on a

$$\sqrt{\frac{2u}{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ donc } \cos\sqrt{\frac{2u}{n}} > 0.$$

On peut donc écrire, à partir d'un certain rang,

$$1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n = 1-\exp\left(n\ln\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)$$

$$= 1-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2}\frac{2u}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= 1-\exp\left(n\left[-\frac{u}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)$$

$$= 1-\exp\left(-u+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

Donc $1-\left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-e^{-u}$.

On peut donc bien utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,du}$$

I.C.4. Si $a<b$, $a>0$, on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b \frac{1-e^{-u}}{u^{3/2}}\,du = \left[-2(1-e^{-u})u^{-\frac{1}{2}}\right]_a^b + 2\int_a^b e^{-u}\times u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

Mais $\frac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$ (car $1-e^{-a} \underset{a\to 0}{\sim} a$)

et $\frac{1-e^{-b}}{\sqrt{b}} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$. On obtient donc, en prenant les limite quand $a \to 0$ et quand $b \to +\infty$,

$$\underline{\ell = 2\sqrt{\pi}}$$

Donc, comme $\ell \neq 0$, $v_n \sim \ell\sqrt{\pi}$, et :

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}$$