Problème 2 (d'après CCP) (corrigé)

Dans tout ce problème, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombre réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. En utilisant par exemple des développements en série entière usuels, donner, dans chacun des cas suivants, un exemple de suite (a_n) telle que :

   (a) (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

   Par exemple, $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ si $n\geq 1$, $a_0=0$, $f(x)=\ln(1+x)$.

   (b) (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;

   Par exemple, $a_n=(-1)^n$ pour $n\geq 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

   (c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;

   Par exemple, $a_n=1$ pour $n\geq 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

   (d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).

   Le dernier exemple fonctionne : toute fonction polynôme étant bornée sur $]-1,1[$, si la somme d'une série entière n'est pas bornée sur $]-1,1[$ alors la convergence n'est pas uniforme (transmission du caractère borné par convergence uniforme). On peut aussi mettre en défaut le résultat du théorème de la double limite. . .

2. Enoncer le théorème radial d'Abel en termes d'implication entre les deux propriétés $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

$(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{P}_2)$.

---

3. On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

   (a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ? (On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ pour $n \geq 1$).

   $\sum u_n$ (et donc $\sum v_n$) converge par critère des séries alternées. Mais, si $n \geq 2$,

   $$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{1/4}} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^{1/4}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(k(n-k)\right)^{1/4}}$$

   Essayons de savoir lire un énoncé. La réponse à la question est évidemment non. Donc il faut montrer que la série $\sum w_n$ diverge. Or elle est à signes alternés. Donc c'est presque sûrement une divergence grossière qu'il faut viser. Donc minorer $|w_n|$. Donc majorer les $k(n-k)$. Donc chercher pour quels k on a $k(n-k)$ maximal !

   On voit assez facilement que $k(n-k)$ est d'autant plus grand (pour $1 \leq k \leq n-1$) que k est proche de $n/2$, d'autant plus petit que k est proche de 1 ou $n-1$. Conjecturons :

   $$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \qquad k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$$

   On peut montrer cela en étudiant $x \mapsto x(n-x)$, ou écrire

   $$\frac{n^2}{4} - k(n-k) = \frac{1}{4}\left(n^2 - 4nk + 4k^2\right) = \frac{1}{4}\left(n-2k\right)^2 \geq 0$$

   On en déduit (tout se passe entre nombres réels strictement postifs) que

   $$|w_n| \geq (n-1) \times \left(\frac{4}{n^2}\right)^{1/4} = \sqrt{2}\,\frac{n-1}{\sqrt{n}}$$

   et on a bien la divergence grossière recherchée.

(b) Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer, à l'aide du théorème radial d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Les trois séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$, $\sum w_n x^n$ ont toutes un rayon de convergence ≥ 1. On définit, si $x \in]-1, 1[$,

$$S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad , S_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \quad , S_w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$$

Par théorème d'Abel radial,

$$S_u(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et de même pour S_v et S_w (si un rayon de convergence est > 1, le résultat reste vrai, simplement par continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence). Mais d'autre part, par produit de Cauchy de séries entières (corollaire du théorème rappelé par l'énoncé sur le produit de Cauchy de séries absolument convergentes),

$$\forall x \in [0, 1[\qquad S_w(x) = S_u(x) \times S_v(x)$$

Il suffit de prendre les limites quand $x \to 1$ des deux membres de cette égalité pour obtenir le résultat souhaité.

---

4. On nomme $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geq 0$.
Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$ (on pourra montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \lim_{x\to 1^-} f(x)$).

Par positivité des a_n, f est croissante sur $[0, 1[$. On peut donc dire (la somme d'une série à termes réels positifs majorant toutes ses sommes partielles) que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in [0, 1[\qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq f(x) \leq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

A $n \geq 1$ fixé, on peut prendre les limites quand $x \to 1$ dans l'inégalité

$$\forall x \in [0, 1[\qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

et on obtient bien

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$\sum a_n$ est donc une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles est majorée, elle converge donc, c'est-à-dire $\mathcal{P}_1$.

---

5. Dans cette question on admet le théorème de Littlewood :

si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et si $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $(1/n)$) alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ périodique de période p formée d'élements de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

(a) Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \epsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n} x^n$.

Les rayons de convergence valent 1 tous les deux, par exemple par règle de D'Alembert, à rédiger convenablement.

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n x^{n-1}$.

(b) Etablir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f \ : \ x \mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Le théorème de primitivation terme à terme des séries entières, et le fait que $f(0) = 0$, montrent qu'on a bien

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Et comme $\frac{\epsilon_n}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, il suffit d'appliquer le théorème radial d'Abel dans un sens, le théorème de Littlewood dans l'autre, pour avoir l'équivalence cherchée.

(c) Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

Si $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{p} \epsilon_n x^{n-1} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \epsilon_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{p} \epsilon_n x^{n-1} + \sum_{m=1}^{+\infty} \epsilon_{m+p} x^{m+p-1} \end{aligned}$$

La suite ϵ est p-périodique, on peut donc écrire

$$g(x) = \sum_{n=1}^{p} \epsilon_n x^{n-1} + x^p g(x)$$

ce qui donne bien g comme fraction rationnelle :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad g(x) = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \epsilon_n x^{n-1}}{1-x^p}$$

(d) Retrouver, uniquement à l'aide des deux questions précédentes, que la série harmonique diverge et que la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

On prend $\epsilon_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, $p = 1$, donc $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $f : x \mapsto -\ln(1-x)$. Par (b) donc, comme $f(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} +\infty$, $\sum 1/n$ diverge.
On prend $\epsilon_n = (-1)^n$ si $n \geq 1$, $p = 2$, donc $g : x \mapsto \dfrac{-1+x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}$ et $f : x \mapsto -\ln(1+x)$. Cette fois, $f(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} -\ln 2$, $\sum (-1)^n/n$ converge et on retrouve la somme habituelle : $-\ln 2$.

(e) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i$ pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ converge. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i = 0$, alors 1 est racine de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \epsilon_n x^{n-1}$, donc (comme 1 est racine simple de $1 - X^p$) on peut écrire pour tout $x \in [0,1[$

$$g(x) = \frac{P(x)}{1 + x + \cdots + x^{p-1}}$$

(f) Dans le cas où la suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période 6 avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, $\epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = -1$, déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$ (ile st demandé de détailler les calculs).

Fin du problème 2